Métodos Matemáticos
Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: ecuaciones de segundo orden y el teorema de Cauchy-Kowalevski

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Noviembre, 2026

Modelando con EDP: cuerda vibrante en 1 d

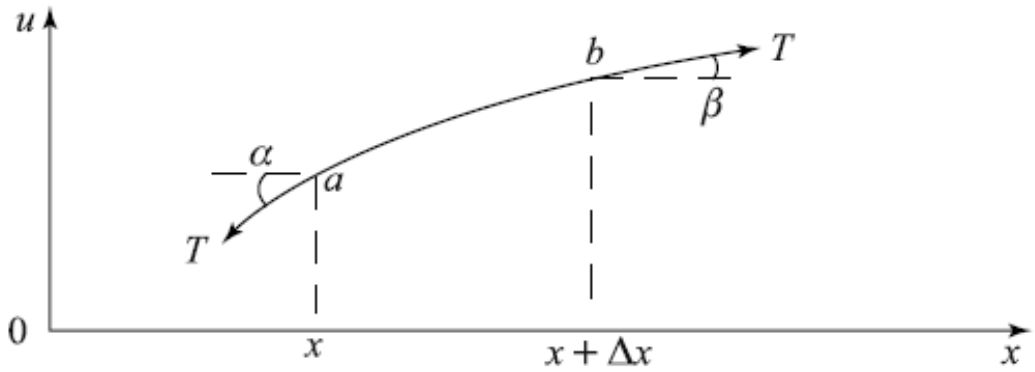
Problema: considere una cuerda estirada con extremos fijos y obtenga la dinámica que describe la posición $u(x,t)$ de la cuerda en x y el instante t, luego de una perturbación inicial.

Modelando con EDP: cuerda vibrante en 1 d

Problema: considere una cuerda estirada con extremos fijos y obtenga la dinámica que describe la posición $u(x,t)$ de la cuerda en x y el instante t, luego de una perturbación inicial.

- La cuerda es flexible, así la tensión en la cuerda es tangente al perfil de la cuerda en el momento dado.
- No hay elongación de la cuerda y entonces la tensión es constante.
- El peso de la cuerda es despreciable con respecto a la tensión en la cuerda.
- Los desplazamientos son pequeños.
- Las vibraciones son transversales.

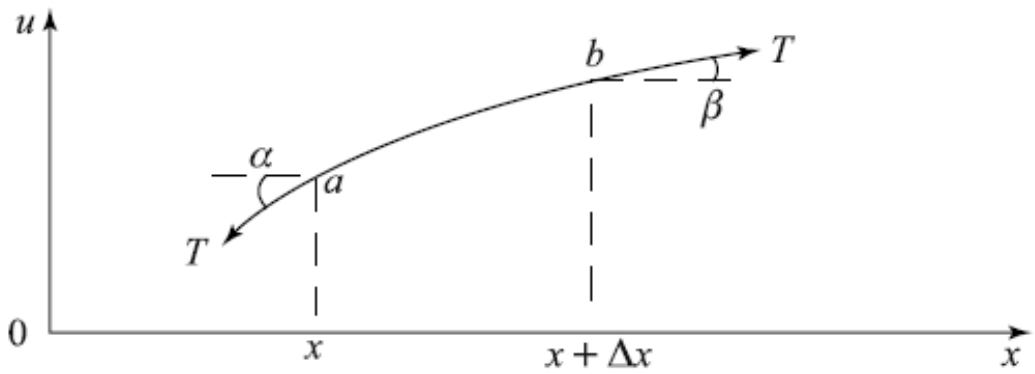
Modelando con EDP: cuerda vibrante en 1 d



Por la segunda ley de Newton:

$$T\text{sen}\,\beta - T\text{sen}\,\alpha = \rho(\delta s)u_{tt}.$$

Modelando con EDP: cuerda vibrante en 1 d



Por la segunda ley de Newton:

$$T sen\,\beta - T sen\,\alpha = \rho(\delta s) u_{tt}.$$

Realizando las aproximaciones:

$$\delta s \approx \delta x, \quad sen\,\alpha \approx tan\alpha, \quad sen\,\beta \approx tan\,\beta,$$

se obtiene

$$tan\,\beta - \tan\,\alpha = \frac{\rho\delta x}{T} u_{tt}.$$

$$\frac{u_x(x+\delta x,t)-u_x(x,t)}{\delta x}=\frac{\rho}{T}u_{tt}(x,t),$$

tomando límite $\delta x \to 0$, obtenemos la ecuación de onda uni-dimensional:

$$u_{tt}=c^2u_{xx},\quad c^2=\rho/T.$$

Una membrana vibrante

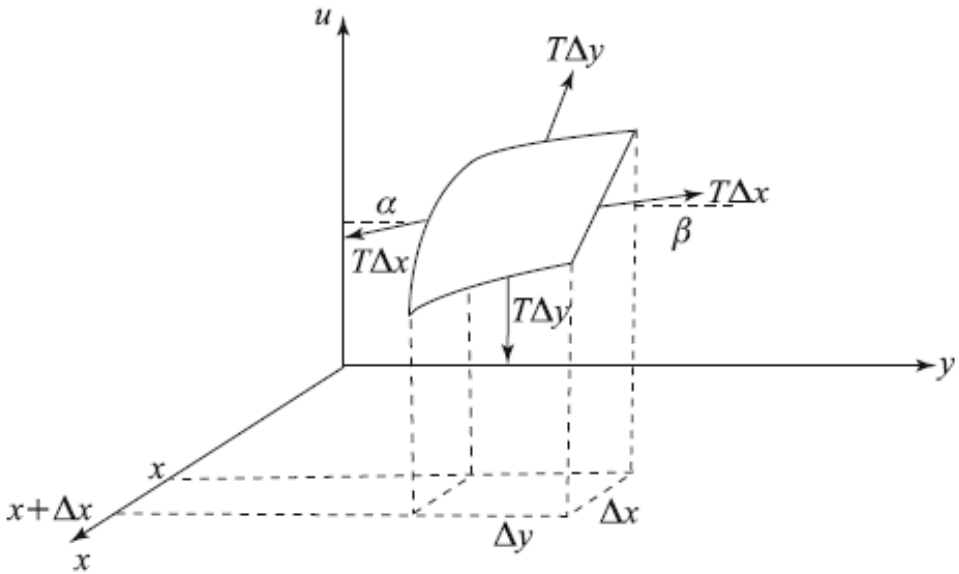
Se busca obtener la ecuación dinámica para la posición $u(x, y, t)$ de una membrana en el tiempo t.

Una membrana vibrante

Se busca obtener la ecuación dinámica para la posición $u(x, y, t)$ de una membrana en el tiempo t.

- La membrana es flexible, así la tensión en la cuerda es tangente al perfil de la membrana en el momento dado.
- No hay elongación de la membrana y entonces la tensión es constante.
- El peso de la membrana es despreciable con respecto a la tensión en la membrana.
- Los desplazamientos son pequeños.
- Las vibraciones son transversales.

Una membrana vibrante

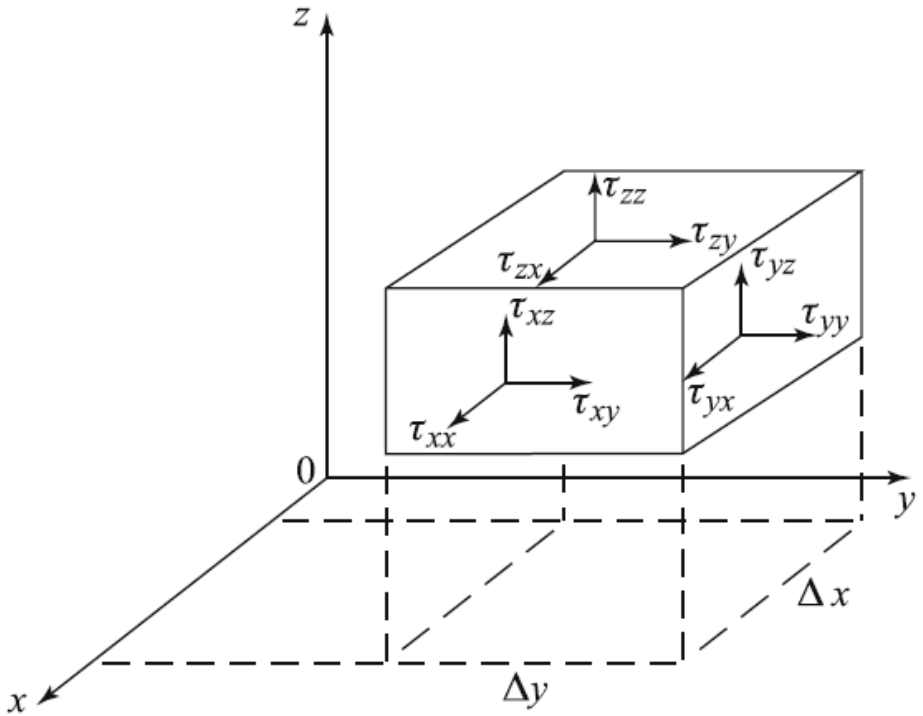


Ejercicio: deducir la ecuación de onda bidimensional para la membrana vibrante

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{xx} + u_{yy} \right), \quad c^2 = T/\rho.$$

Ondas en un medio elástico

If a small disturbance is originated at a point in an elastic medium, neighboring particles are set into motion, and the medium is put under a state of strain. We consider such states of motion to extend in all directions. We assume that the displacements of the medium are small and that we are not concerned with translation or rotation of the medium as a whole.



Llamaremos $\mathbf{u}(x,t) = (u(x,t), v(x,t), w(x,t))$ al campo de desplazamientos.

Por la segunda ley de Newton:

$$\left[(\tau_{xx})_{x+\delta x} - (\tau_{xx})_x\right] \delta y \delta z + \left[(\tau_{xy})_{y+\delta y} - (\tau_{xy})_y\right] \delta z \delta x + \left[(\tau_{xz})_{z+\delta z} - (\tau_{xz})_z\right] \delta x \delta y = \rho \, \delta x \delta y \delta z \, u_{tt}$$

Cuando $\partial V \to 0$,

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

De manera similar,

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

Sea el tensor de deformación lineal $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

y empleando la ley de Hooke obtenemos:

$$\tau_{xx} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{xx}, \quad \tau_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}$$
$$\tau_{yy} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{yy}, \quad \tau_{zx} = 2\mu\varepsilon_{zx}$$
$$\tau_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz}, \quad \tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}$$

donde $\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ es la dilatación y λ y μ son las constantes de Lame. Así, podemos expresar los tensores en términos de los desplazamientos,

$$\tau_{xx} = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$
$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Derivado:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = \lambda\frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Así:

$$\lambda\frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Similarmente, se obtienen ecuaciones para v y w. Así, se llega a la ecuación de Navier:

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} = \rho\,\mathbf{u}_{tt}$$

Similarmente, se obtienen ecuaciones para v y w. Así, se llega a la ecuación de Navier:

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} = \rho\,\mathbf{u}_{tt}$$

Si div $\mathbf{u} = 0$ (propagación equivolumétrica), se recupera la ecuación de onda tridimensional para un campo vectorial:

$$\nabla^2\mathbf{u} = c^2\mathbf{u}_{tt}.$$

Δu

Conducción de calor en sólidos

Sea D^* un dominio acotado, con frontera B^*. Sea $u = u(x, y, z, t)$ la temperatura del cuerpo en el punto (x, y, z) en el tiempo t. Si la temperatura no es constante, el calor fluye de zonas de mayor temperatura a zonas de menor temperatura, de acuerdo a la ley de Fourier:

$$v = -K\nabla u,$$

donde v es la velocidad del flujo y K es la conductividad térmica.

Conducción de calor en sólidos

Sea D^* un dominio acotado, con frontera B^*. Sea $u = u(x, y, z, t)$ la temperatura del cuerpo en el punto (x, y, z) en el tiempo t. Si la temperatura no es constante, el calor fluye de zonas de mayor temperatura a zonas de menor temperatura, de acuerdo a la ley de Fourier:

$$v = -K\nabla u,$$

donde v es la velocidad del flujo y K es la conductividad térmica.
Sea D un dominio en D^* con frontera B en D^*. Entonces, el flujo neto de calor a través de B es

$$\int\int_B v \cdot u \, ds.$$



Conducción de calor en sólidos

Sea D^* un dominio acotado, con frontera B^*. Sea $u = u(x, y, z, t)$ la temperatura del cuerpo en el punto (x, y, z) en el tiempo t. Si la temperatura no es constante, el calor fluye de zonas de mayor temperatura a zonas de menor temperatura, de acuerdo a la ley de Fourier:

$$v = -K\nabla u,$$

donde v es la velocidad del flujo y K es la conductividad térmica.
Sea D un dominio en D^* con frontera B en D^*. Entonces, el flujo neto de calor a través de B es

$$\int\int_B v \cdot n \, ds.$$

El teorema de la divergencia implica

$$\int\int_B v \cdot n \, ds = \int\int\int_D \operatorname{div}(-K\nabla u)\, dx\, dy\, dz = -K \int\int\int_D \Delta u \, dx\, dy\, dz.$$

La cantidad de calor en D es

$u(x, y, z, t)$.

$$\int\int\int_D \sigma\rho u \, dx\, dy\, dz,$$

donde ρ es la densidad del material y σ el calor específico. Ya que la tasa de cambio de la cantidad total de calor en D es el negativo del flujo neto a través de B, se obtiene

$$\int\int\int_D \sigma\rho u_t \, dx\, dy\, dz = K \int\int\int_D \Delta u \, dx\, dy\, dz.$$

Como esto es cierto para todo subdominio,

$$u_t = \kappa \Delta u,$$

donde $\kappa = K/\sigma\rho$. Esta ecuación es la ec. del calor.

$\Delta u = 0$

Ec. de Laplace.

Ecuaciones de segundo orden: ec. casi lineales

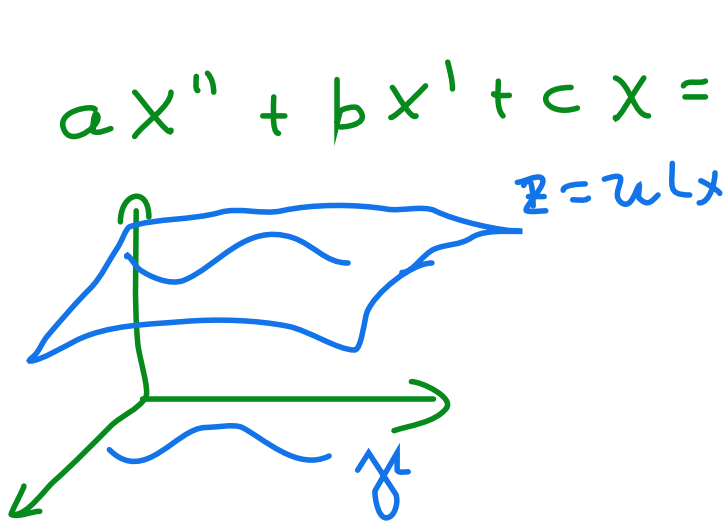
La ecuación general de segundo orden casi lineal para $u = u(x, y)$ es

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d,$$

donde a, b, c, d dependen de x, y, u, u_x y u_y. El **problema de Cauchy** consiste en encontrar una solución prescribiendo valores de

$$u, u_x \text{ y } u_y$$

sobre una curva γ en el plano xy.



Ecuaciones de segundo orden: ec. casi lineales

La ecuación general de segundo orden casi lineal para $u = u(x, y)$ es

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d,$$

donde a, b, c, d dependen de x, y, u, u_x y u_y. El **problema de Cauchy** consiste en encontrar una solución prescribiendo valores de

$$u, u_x \text{ y } u_y$$

sobre una curva γ en el plano xy.
Supongamos que γ está dada por

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad s \in I \subset \mathbb{R},$$

y prescribimos sobre γ $u(f(s), g(s)) = h(s)$, $u_x(f(s), g(s)) = \phi(s)$

$$u = h(s), \quad u_x = \phi(s), \quad u_y = \psi(s).$$

$u_y(f(s), g(s)) = \psi(s)$.

Entonces

$\phi(s)$ $u(f(s), g(s)) = h(s)$

$u_x \, f'(s) + u_y \cdot g'(s) = h'(s)$

$\psi(s)$

Ecuaciones de segundo orden: ec. casi lineales

La ecuación general de segundo orden casi lineal para $u = u(x, y)$ es

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d,$$

donde a, b, c, d dependen de x, y, u, u_x y u_y. El **problema de Cauchy** consiste en encontrar una solución prescribiendo valores de

$$u, u_x \text{ y } u_y$$

sobre una curva γ en el plano xy.
Supongamos que γ está dada por

$$x = f(s), \quad y = g(s),$$

y prescribimos sobre γ

$$u = h(s), \quad u_x = \phi(s), \quad u_y = \psi(s).$$

Entonces

$$h'(s) = \phi(s)f'(s) + \psi(s)g'(s).$$

Estas son condiciones de compatibilidad. **Así, dada la curva γ, sólo dos valores prescriptos son independientes**.

Ecuaciones de segundo orden: ec. casi lineales

Las condiciones de compatibilidad también aparecen en derivadas de orden superior:

$$\frac{du_x}{ds} = u_{xx} f'(s) + u_{xy} g'(s), \qquad \frac{du_y}{ds} = u_{yx} f'(s) + u_{yy} g'(s).$$

Ecuaciones de segundo orden: ec. casi lineales

Las condiciones de compatibilidad también aparecen en derivadas de orden superior:

$$\frac{du_x}{ds} = u_{xx} f'(s) + u_{xy} g'(s), \qquad \frac{du_y}{ds} = u_{yx} f'(s) + u_{yy} g'(s).$$

Así, se obtiene

$$\begin{aligned} a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} &= d \\ f' u_{xx} + g' u_{xy} &= \phi' \\ f' u_{xy} + g' u_{yy} &= \psi' \end{aligned} \tag{1}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \end{vmatrix} \neq 0$$

Ecuaciones de segundo orden: ec. casi lineales

Las condiciones de compatibilidad también aparecen en derivadas de orden superior:

$$\frac{du_x}{ds} = u_{xx}f'(s) + u_{xy}g'(s), \quad \frac{du_y}{ds} = u_{yx}f'(s) + u_{yy}g'(s).$$

Así, se obtiene

$$\begin{aligned} au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} &= d \\ f'u_{xx} + g'u_{xy} &= \phi' \\ f'u_{xy} + g'u_{yy} &= \psi'. \end{aligned} \tag{1}$$

El sistema tiene solución única si

$$\Delta = \begin{vmatrix} f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \\ a & 2b & c \end{vmatrix} = a(g')^2 - 2bf'g' + c(f')^2 \neq 0.$$

Ecuaciones de segundo orden: ec. casi lineales

Las condiciones de compatibilidad también aparecen en derivadas de orden superior:

$$\frac{du_x}{ds} = u_{xx}f'(s) + u_{xy}g'(s), \quad \frac{du_y}{ds} = u_{yx}f'(s) + u_{yy}g'(s).$$

Así, se obtiene

$$\begin{aligned} au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} &= d \\ f'u_{xx} + g'u_{xy} &= \phi' \\ f'u_{xy} + g'u_{yy} &= \psi'. \end{aligned} \tag{1}$$

El sistema tiene solución única si

$$\Delta = \begin{vmatrix} f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \\ a & 2b & c \end{vmatrix} = a(g')^2 - 2bf'g' + c(f')^2 \neq 0.$$

Una curva γ es característica con respecto a una ec. diferencial y a los datos si $\Delta = 0$ a lo largo de γ, y no característica si $\Delta \neq 0$ a lo largo de γ.

Ecuaciones de segundo orden: ec. casi lineales

Así, a lo largo de una curva no característica, los datos de Cauchy determinan unívocamente los valores de u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} y u_{yy} en γ.

Ahora bien, si γ es característica, el problema de Cauchy generalmente no tiene solución. Ahora, a partir de

$$a(g')^2 - 2bf'g' + c(f')^2 = 0$$

se obtiene

Ahora bien, si γ es característica, el problema de Cauchy generalmente no tiene solución. Ahora, a partir de

$$a(g')^2 - 2bf'g' + c(f')^2 = 0$$

se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Esta es una EDO si a, b y c son funciones conocidas.

Ahora bien, si γ es característica, el problema de Cauchy generalmente no tiene solución. Ahora, a partir de

$$a(g')^2 - 2bf'g' + c(f')^2 = 0$$

$x = f(s)$
$y = g(s)$

se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Esta es una EDO si a, b y c son funciones conocidas. La ecuación $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d$ es:

- **elíptica**, si $b^2 - ac < 0$;
- **parabólica**, si $b^2 - ac = 0$;
- **hiperbólica**, si $b^2 - ac > 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{g'(s)}{f'(s)}$$

$$a(g')^2 - 2bf'g' + c(f')^2 = 0$$

$$a\left(\frac{g'}{f'}\right)^2 - 2b\left(\frac{g'}{f'}\right) + c = 0.$$

t $\quad$ t

$$at^2 - 2bt + c = 0$$

Ahora bien, si γ es característica, el problema de Cauchy generalmente no tiene solución. Ahora, a partir de

$$a(g')^2 - 2bf'g' + c(f')^2 = 0$$

se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Esta es una EDO si a, b y c son funciones conocidas. La ecuación $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d$ es:

- **elíptica**, si $b^2 - ac < 0$;
- **parabólica**, si $b^2 - ac = 0$;
- **hiperbólica**, si $b^2 - ac > 0$.

Ejercicio (Aguirre expone 10/11, los demás entregan 12/11): clasifique la siguiente ecuación: $u_{yy} - yu_{xx} = 0$ en elíptica, parabólica y/o hiperbólica.

Ejercicio (Alberto y Bastidas exponen 10/11, los demás entregan 12/11): encuentre la solución del siguiente problema mediante expansión en serie de Taylor en la variable y:

$$u_{yy} = u_{xx} + u, \quad u(x,0) = e^x, \quad u_y(x,0) = 0.$$

La ecuación de segundo orden lineal

Ahora analizaremos con más detalle la ecuación de segundo orden lineal:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y + fu = 0, \tag{2}$$

donde los coeficientes dependen de x e y.

La ecuación de segundo orden lineal

Ahora analizaremos con más detalle la ecuación de segundo orden lineal:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y + fu = 0, \tag{2}$$

donde los coeficientes dependen de x e y.
Sea

$$\xi = \phi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

nuevas variables independientes. Entonces

$$Lu = A(\xi, \eta)u_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta)u_{\xi\eta} + \cdots = 0,$$

donde

$$A = a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2$$

$$B = a\phi_x\psi_x + b(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x) + c\phi_y\psi_y$$

$$C = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 \ldots$$

En el caso hiperbólico, introducimos las curvas características:

$$\xi = \phi(x, y) = \text{constante}, \quad \eta = \psi(x, y) = \text{constante}.$$

Así, $A = C = 0$ y , dividiendo por B, se obtiene la forma canónica:

$$u_{\xi\eta} + 2Du_{\xi} + 2Eu_{\eta} + Fu = 0.$$

La nueva ecuación tiene como curvas características las ecuaciones $\xi = cont.$ y $\eta = cont.$

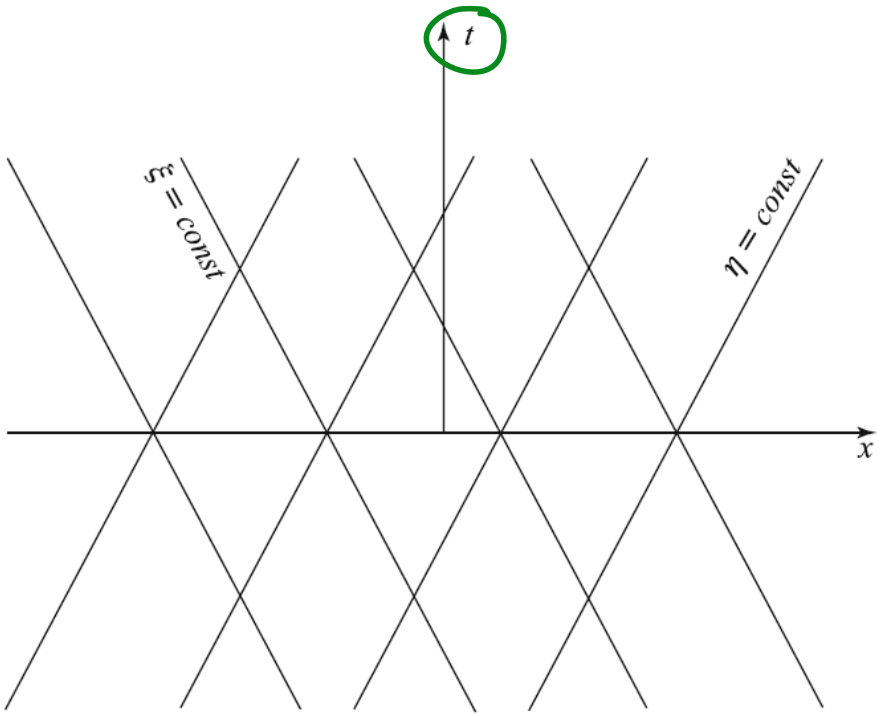
Ecuación de onda unidimensional

Sea

$$Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Hay dos familias de características:

$$x \pm ct = \text{constante}.$$



Ecuación de onda unidimensional

Sean

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct.$$

Ecuación de onda unidimensional

Sean

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct.$$

Escribimos $u(\xi, \eta) = u(x + ct, x - ct)$ y calculamos u_{tt} y u_{xx} en términos de las derivadas de ξ y η.

$$u(\xi, \eta) = u(x + ct; x - ct)$$

$$u_t = u_\xi \cdot c + u_\eta \cdot (-c) = c(u_\xi - u_\eta)$$

$$u_{tt} = c(u_{\xi\xi} \cdot c + u_{\xi\eta}(-c) - u_{\eta\xi} c + u_{\eta\eta} c)$$

$$c^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = -$$

$$u(\xi, \eta) =$$

Ecuación de onda unidimensional

Sean

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct.$$

Escribimos $u(\xi, \eta) = u(x + ct, x - ct)$ y calculamos u_{tt} y u_{xx} en términos de las derivadas de ξ y η.
Luego

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Así,

Ecuación de onda unidimensional

Sean

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct.$$

Escribimos $u(\xi, \eta) = u(x + ct, x - ct)$ y calculamos u_{tt} y u_{xx} en términos de las derivadas de ξ y η.
Luego

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Así,

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

Ecuación de onda unidimensional

Sean

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct.$$

Escribimos $u(\xi, \eta) = u(x + ct, x - ct)$ y calculamos u_{tt} y u_{xx} en términos de las derivadas de ξ y η.
Luego

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Así,

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

La función $v = F(x + ct)$ es solución de $v_t - cv_x = 0$ y $v = G(x - ct)$ resuelve $v_t + cv_x = 0$. Por ende, el gráfico de u es una superposición de ondas, de forma constante, propagándose a velocidad c en direcciones opuestas.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = (u_t - c u_x)(u_t + c u_x)$$

Ecuación de onda unidimensional

Consideremos

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

$$\left[u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) \right]$$

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x)$$

$$u_t(x,t) = F'(x+ct)\cdot c - G'(x-ct)\cdot c$$

$$u_t(x,0) = c\cdot\left[F'(x) - G'(x)\right] = g(x)$$

$$\left[F'(x) = \frac{g(x)}{c} - \frac{G'(x)}{c} \right]$$

Ecuación de onda unidimensional

Consideremos

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Luego,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi.$$

Ecuación de onda unidimensional

Consideremos

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Luego,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi.$$

Si $f \in C^2$ y $g \in C^1$, entonces $u \in C^2$. La expresión de u se denomina **solución de d'Alambert**.

Ecuación de onda unidimensional

Consideremos

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

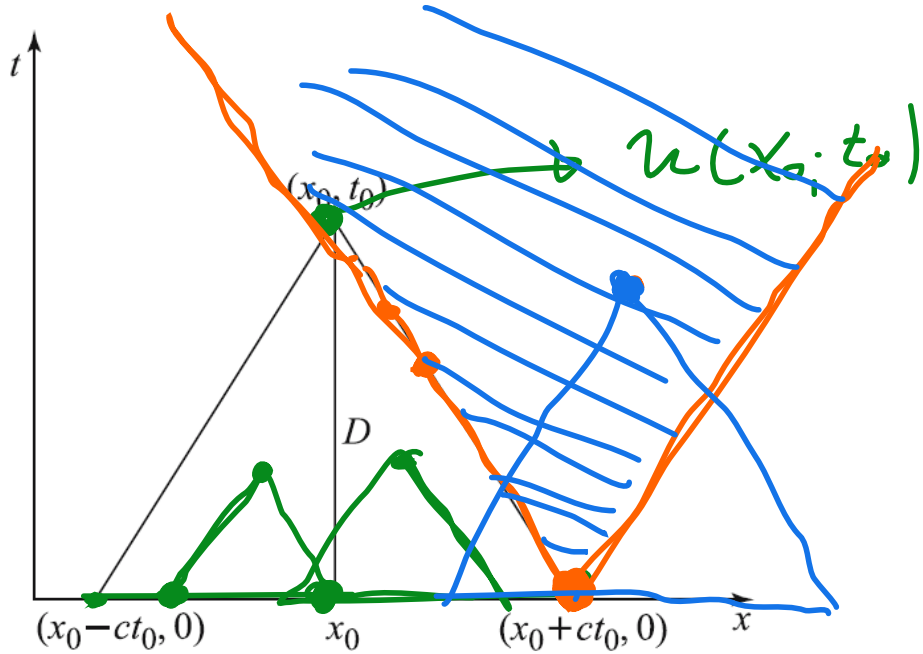
Luego,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi.$$

Si $f \in C^2$ y $g \in C^1$, entonces $u \in C^2$. La expresión de u se denomina **solución de d'Alambert**.

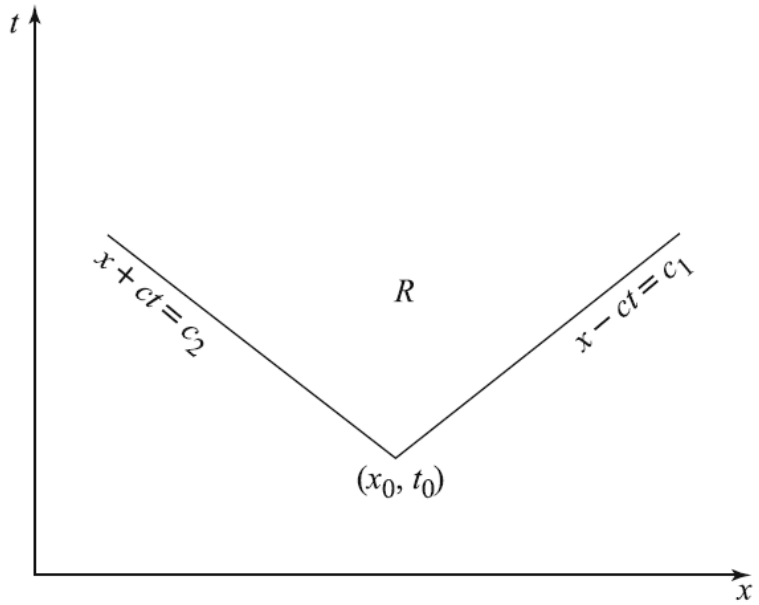
Ejercicio (Bravo expone 12/11, los demás entregan 12/11): en el problema anterior, identifique la curva γ sobre la que se dan los datos de Cauchy y calcule el determinante Δ. También, calcule Δ para las familias de características de la ec. de onda.

Observar que $u(x_0, t_0)$ depende de los valores iniciales f y g en el intervalo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$:

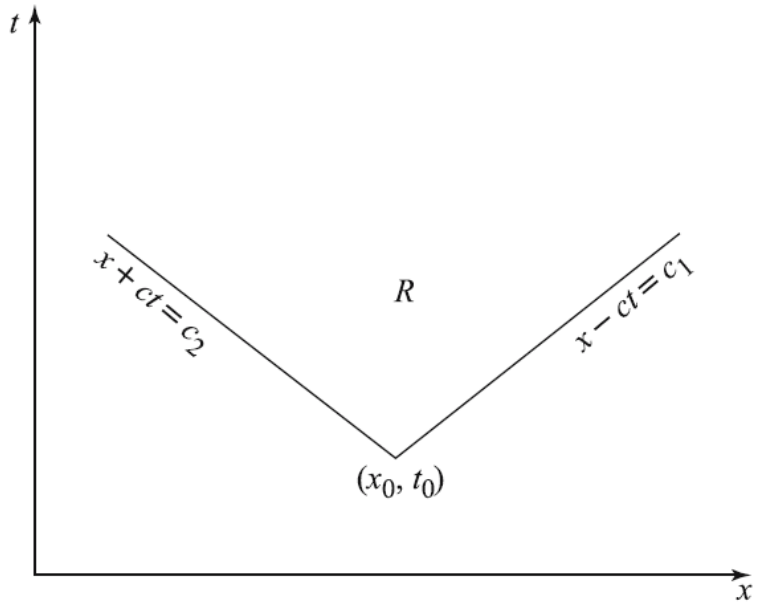


El intervalo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ es el dominio de dependencia de la solución en el punto (x_0, t_0).

Recíprocamente, el punto (x_0, t_0) influye en la solución $u(x, t)$ en puntos (x, t) de la región acotada por las características $x - ct = x_0 - ct_0$ y $x + ct = x_0 + ct_0$.



Recíprocamente, el punto (x_0, t_0) influye en la solución $u(x, t)$ en puntos (x, t) de la región acotada por las características $x - ct = x_0 - ct_0$ y $x + ct = x_0 + ct_0$.



Ejercicio (no se entrega): encuentre la solución de d'Alambert del problema

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},\ x \in \mathbb{R}, t > 0$$

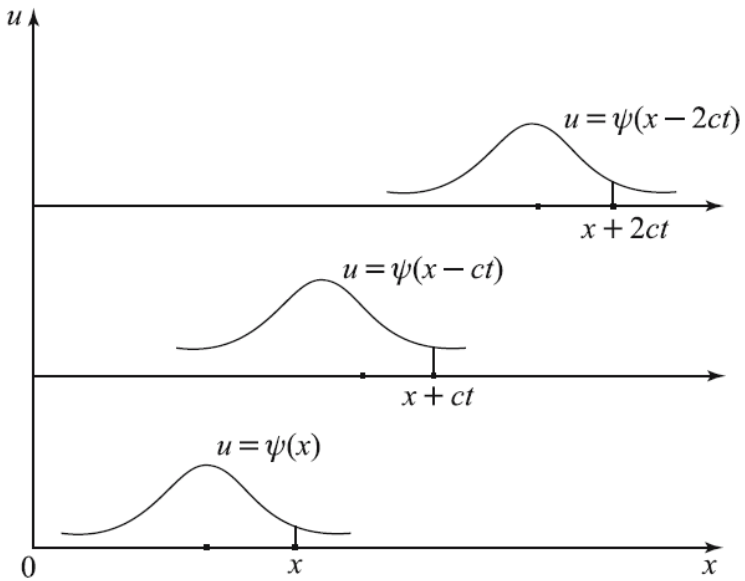
$$u(x, 0) = sen(x),\ u_t(x, 0) = cos(x).$$

Interpretación de la solución de d'Alambert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(\tau)\,d\tau$$
$$= \phi(x+ct) + \psi(x-ct).$$

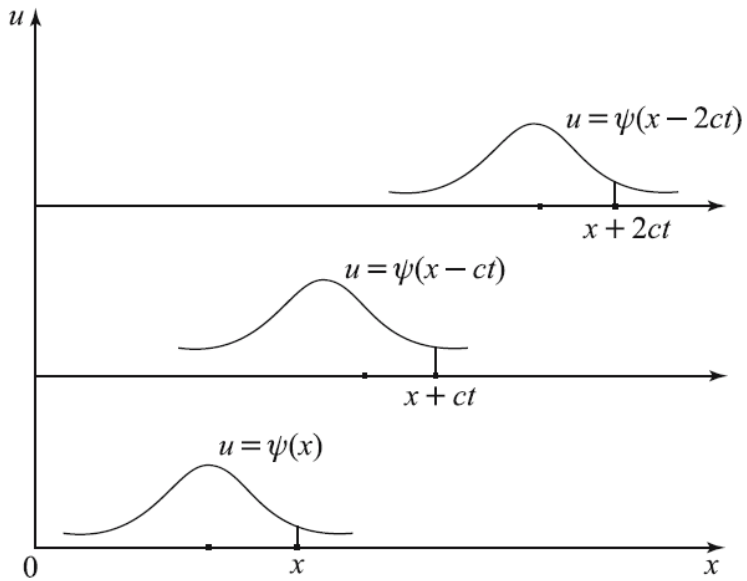
Interpretación de la solución de d'Alambert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(\tau)\,d\tau$$
$$= \phi(x+ct) + \psi(x-ct).$$



Interpretación de la solución de d'Alambert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(\tau)\,d\tau$$
$$= \phi(x+ct) + \psi(x-ct).$$



Así, la forma de la curva permanece, pero la curva se mueve hacia la derecha una distancia ct en un tiempo t.

Supongamos que $u_t(x,0) = g(x) = 0$. Entonces

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right).$$

$t=0$ $\quad u(x,0) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(x)\right]$

$$= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x)$$

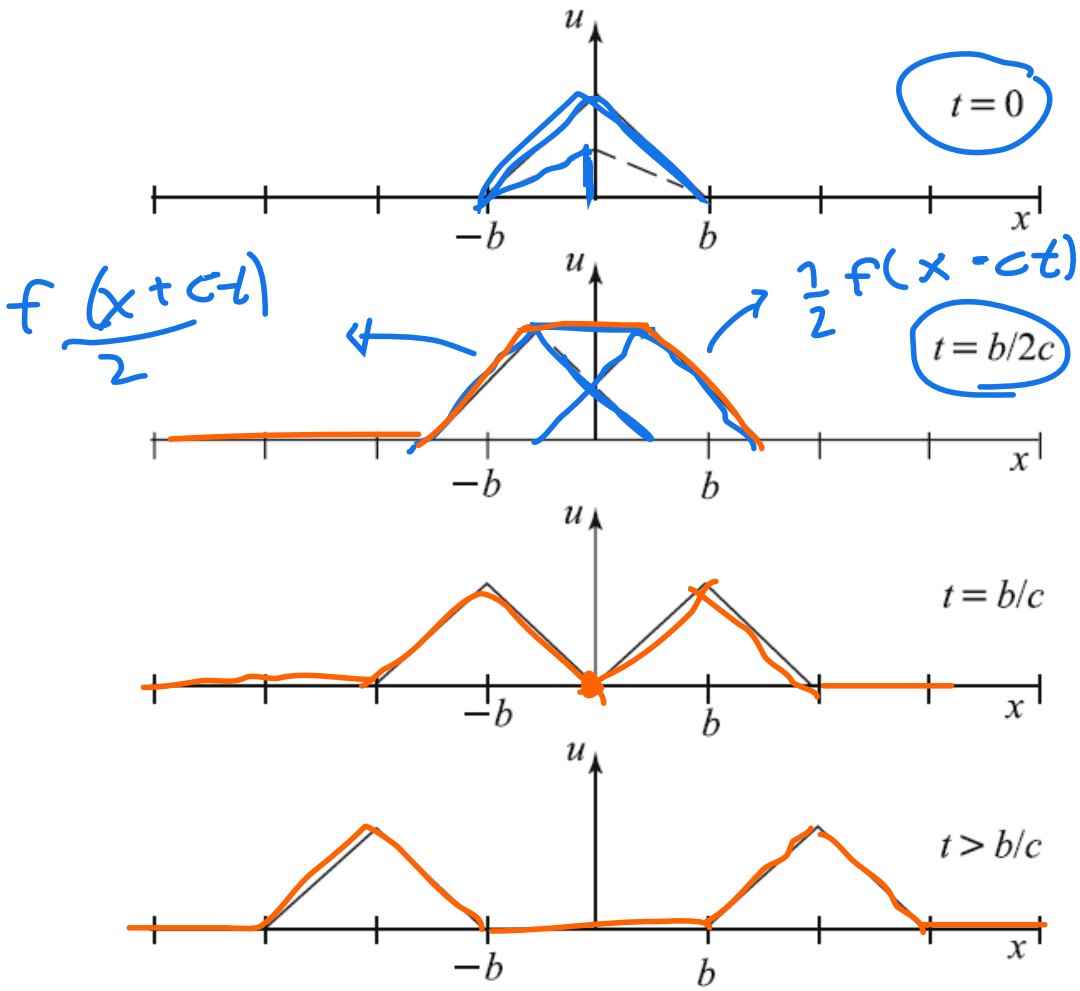
Supongamos que $u_t(x,0) = g(x) = 0$. Entonces

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right).$$

Si $f(x) \neq 0$ en $(-b,b)$, entonces las ondas iniciales (que se desplazarán en ondas opuestas) están dadas por

$$\frac{1}{2}f(x).$$

Las ondas inicialmente están superimpuestas y luego se separan en direcciones opuestas.


u
t = 0
−b
b
x
f(x+ct)/2
(1/2) f(x−ct)
t = b/2c
t = b/c
t > b/c

Problema con valores iniciales y de frontera para la ec. de onda

Observar que toda función de la forma

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

satisface la ecuación funcional

$$\begin{aligned} & u(x,t) - u(x + c\zeta, t + \zeta) - u(x - c\eta, t + \eta) \\ & + u(x + c\zeta - c\eta, t + \zeta + \eta) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Problema con valores iniciales y de frontera para la ec. de onda

Observar que toda función de la forma

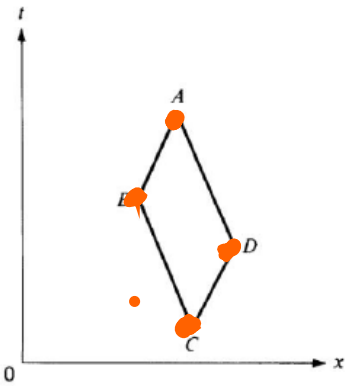
$$u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

satisface la ecuación funcional

$$\begin{aligned} &u(x,t) - u(x+c\zeta, t+\zeta) - u(x-c\eta, t+\eta) \\ &+ u(x+c\zeta-c\eta, t+\zeta+\eta) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Geométricamente, para cada paralelogramo ABCD en el plano xt acotado por cuatro características, las sumas de los valores de u sobre vértices opuestos coinciden:

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D).$$



Problema con valores iniciales y de frontera para la ec. de onda

Considere el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad x \in (0, T),\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \qquad x \in (0, L) \\ u(0,t) = \alpha(t),\ u(L,0) = \beta(t), \quad t > 0. \end{cases}$$

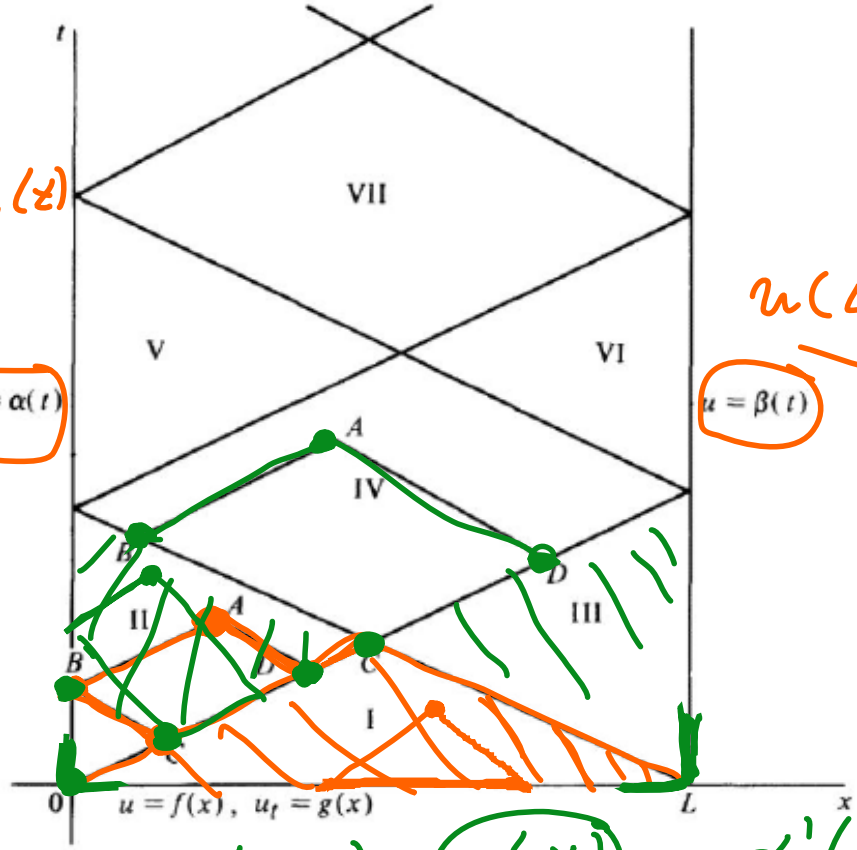
Problema con valores iniciales y de frontera para la ec. de onda

Considere el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad x \in (0, T),\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \qquad x \in (0, L) \\ u(0,t) = \alpha(t),\ u(L,0) = \beta(t), \quad t > 0. \end{cases}$$

Recordar:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi.$$



$u(0;t) = \alpha(t)$

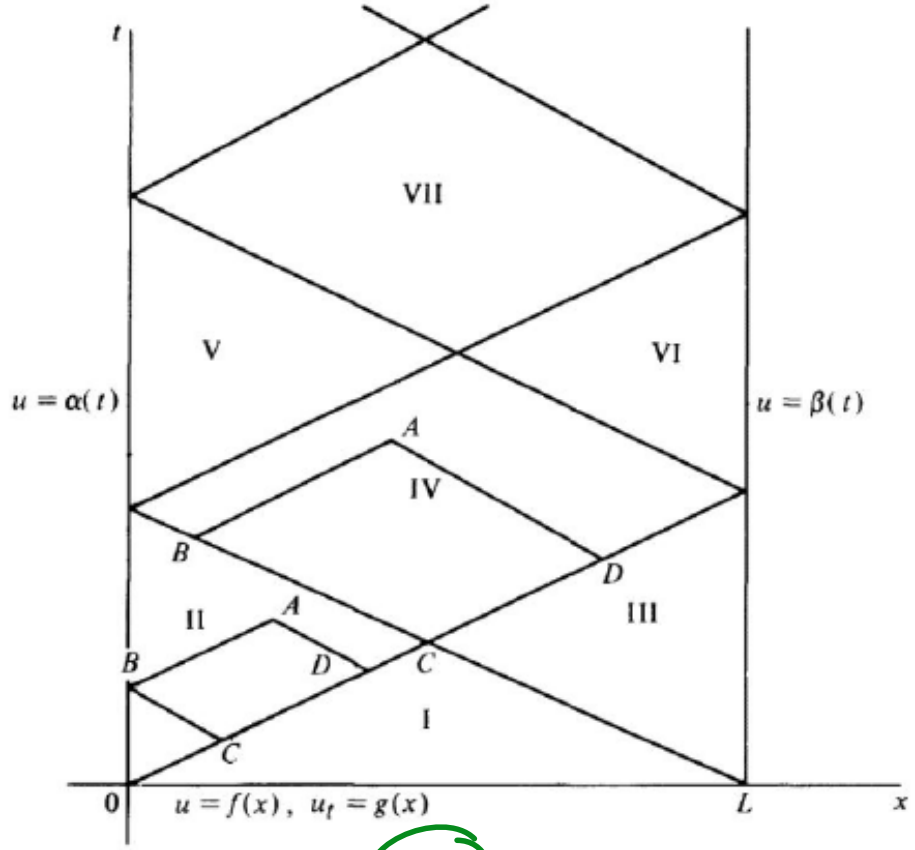
$u(L;t) = \beta(t)$

α, β, f, g

$u_t(x;0) = g(x)$

$u(0;t) = \alpha(t)$, $t > 0$

$\alpha'(t) \to 0$ cuando $t \to 0$



Ejercicio (expone González 17/11): aplique el método anterior, para resolver el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad x \in (0,\pi),\ t > 0 \\ u(x,0) = 1, \quad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,0) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Teorema de Cauchy-Kowalevski

El teorema se refiere a la existencia y unicidad de soluciones analíticas reales del problema de Cauchy, donde tanto la ecuación como los datos son analíticos.

Teorema de Cauchy-Kowalevski

El teorema se refiere a la existencia y unicidad de soluciones analíticas reales del problema de Cauchy, donde tanto la ecuación como los datos son analíticos. Considere la ecuación casi-lineal de orden m:

$$Lu = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha D^\alpha u + C = 0,$$

donde A y C son funciones de las variables independientes $x_1, ..., x_n$ y de todas las derivadas $D^\beta u$ de orden $|\beta| \leq m - 1$.

Teorema de Cauchy-Kowalevski

El teorema se refiere a la existencia y unicidad de soluciones analíticas reales del problema de Cauchy, donde tanto la ecuación como los datos son analíticos.
Considere la ecuación casi-lineal de orden m:

$$Lu = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha D^\alpha u + C = 0,$$

donde A y C son funciones de las variables independientes $x_1, ..., x_n$ y de todas las derivadas $D^\beta u$ de orden $|\beta| \leq m-1$.
El **problema de Cauchy** para la ecuación anterior consiste de encontrar una solución u verificando datos de Cauchy prescriptos sobre una hipersuperficie $S \subset \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(x_1, ..., x_n) = 0.$$

Asumimos que ϕ tiene derivadas continuas hasta orden m y $D\phi = (\phi_{x_1}, ..., \phi_{x_n}) \neq 0$.

Teorema de Cauchy-Kowalevski

El teorema se refiere a la existencia y unicidad de soluciones analíticas reales del problema de Cauchy, donde tanto la ecuación como los datos son analíticos.
Considere la ecuación casi-lineal de orden m:

$$Lu = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha D^\alpha u + C = 0,$$

donde A y C son funciones de las variables independientes $x_1, ..., x_n$ y de todas las derivadas $D^\beta u$ de orden $|\beta| \leq m-1$.
El **problema de Cauchy** para la ecuación anterior consiste de encontrar una solución u verificando datos de Cauchy prescriptos sobre una hipersuperficie $S \subset \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(x_1, ..., x_n) = 0.$$

Asumimos que ϕ tiene derivadas continuas hasta orden m y $D\phi = (\phi_{x_1}, ..., \phi_{x_n}) \neq 0$.
Los datos de Cauchy en S consisten en prescribir los valores de u y de todas las derivadas de orden inferior a m sobre S.

Teorema de Cauchy-Kowalevski

Consideraciones generales:

- Dado un punto $x_0 \in S$, asumimos que ϕ es analítica real en un entorno de x_0 y $D\phi(x_0) \neq 0$ (por ejemplo, $\phi_n \neq 0$);

Teorema de Cauchy-Kowalevski

Consideraciones generales:

- Dado un punto $x_0 \in S$, asumimos que ϕ es analítica real en un entorno de x_0 y $D\phi(x_0) \neq 0$ (por ejemplo, $\phi_n \neq 0$);
- Los datos $D^\beta u$ prescriptos en S para $|\beta| \leq m-1$ son analíticos reales en x_0 (se expanden en potencias de $x_1 - (x_0)_1$, ..., $x_{n-1} - (x_0)_{n-1}$).

Teorema de Cauchy-Kowalevski

Consideraciones generales:

- Dado un punto $x_0 \in S$, asumimos que ϕ es analítica real en un entorno de x_0 y $D\phi(x_0) \neq 0$ (por ejemplo, $\phi_n \neq 0$);
- Los datos $D^\beta u$ prescriptos en S para $|\beta| \leq m-1$ son analíticos reales en x_0 (se expanden en potencias de $x_1 - (x_0)_1$, ..., $x_{n-1} - (x_0)_{n-1}$).
- Los coeficientes A_α y C son funciones analíticas reales en sus argumentos x y $D^\beta u$ en x_0 y $D^\beta u^0$.

Teorema de Cauchy-Kowalevski

Consideraciones generales:

- Dado un punto $x_0 \in S$, asumimos que ϕ es analítica real en un entorno de x_0 y $D\phi(x_0) \neq 0$ (por ejemplo, $\phi_n \neq 0$);
- Los datos $D^\beta u$ prescriptos en S para $|\beta| \leq m-1$ son analíticos reales en x_0 (se expanden en potencias de $x_1 - (x_0)_1$, ..., $x_{n-1} - (x_0)_{n-1}$).
- Los coeficientes A_α y C son funciones analíticas reales en sus argumentos x y $D^\beta u$ en x_0 y $D^\beta u^0$.
- S es una superficie no característica.

Entonces el teorema de Cauchy-Kowalevski asegura que existe una única solución analítica en x_0 del problema de Cauchy.

Ecuación de onda no homogénea

Sea

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t)$$
$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x).$$

Ecuación de onda no homogénea

Sea

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t)$$
$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x).$$

Sea $y = ct$, entonces

$$u_{xx} - u_{yy} = \tilde{h}(x,y)$$
$$u(x,0) = f(x), \quad u_y(x,0) = \tilde{g}(x).$$

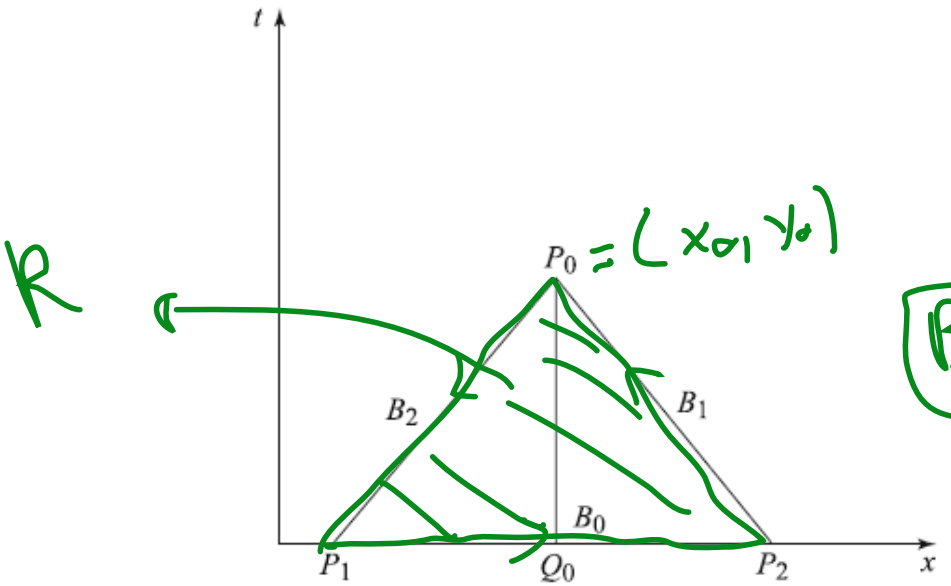
Ecuación de onda no homogénea

Sea

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t)$$
$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x).$$

Sea $y = ct$, entonces

$$u_{xx} - u_{yy} = \tilde{h}(x,y)$$
$$u(x,0) = f(x), \quad u_y(x,0) = \tilde{g}(x).$$



R

$P_0 = (x_0, y_0)$

$B = B_0 \cup B_1 \cup B_2$

Integrando la ecuación:

$$\int\int_R (u_{xx} - u_{yy})dR = \int\int_R \tilde{h}(x,y)dR$$

y por teorema de Green,

$$\int\int_R (u_{xx} - u_{yy})dR = \int_B (u_x\,dy + u_y\,dx).$$

Integrando la ecuación:

$$\int\int_R (u_{xx} - u_{yy})dR = \int\int_R \tilde{h}(x,y)dR$$

y por teorema de Green,

$$\int\int_R (u_{xx} - u_{yy})dR = \oint_B (u_x\,dy + u_y\,dx).$$

Como B está compuesta de B_0, B_1 y B_2:

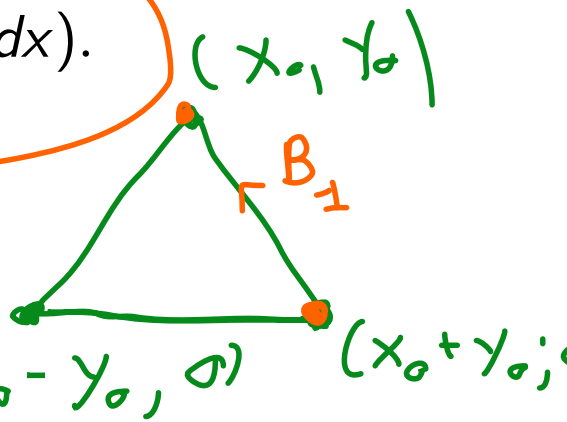
$$\int_{B_0} (u_x\,dy + u_y\,dx) = \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} u_y\,dx,$$

$$\int_{B_1} (u_x\,dy + u_y\,dx) = \int_{B_1} (-u_x\,dx - u_y\,dy),$$

$$= u(x_0+y_0,0) - u(x_0,y_0),$$

$$\int_{B_2} (u_x\,dy + u_y\,dx) = \int_{B_2} (u_x\,dx + u_y\,dy),$$

$$= u(x_0-y_0,0) - u(x_0,y_0).$$



$dy = y'(t)\,dt$
$= -x'(t)\,dt$
$= -dx$

Así,

$$\oint_B (u_x\,dy + u_y\,dx) = -2\,u\,(x_0, y_0) + u\,(x_0 - y_0, 0) + u\,(x_0 + y_0, 0) + \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} u_y\,dx.$$

Así,

$$\oint_B (u_x\,dy + u_y\,dx) = -2u(x_0, y_0) + u(x_0 - y_0, 0) + u(x_0 + y_0, 0) + \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} u_y\,dx.$$

Luego,

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left(u(x_0 + y_0, 0) + u(x_0 - y_0, 0)\right) + \frac{1}{2}\int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} u_y\,dx - \frac{1}{2}\int\int_R \tilde{h}(x, y)\,dR.$$

Así,

$$\oint_B (u_x\,dy + u_y\,dx) = -2\,u\,(x_0, y_0) + u\,(x_0 - y_0, 0)$$
$$+u\,(x_0 + y_0, 0) + \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} u_y\,dx.$$

Luego, $y=ct$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\,(u(x_0 + y_0, 0) + u(x_0 - y_0, 0)) + \frac{1}{2}\int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} u_y\,dx$$
$$-\frac{1}{2}\int\int_R \tilde{h}(x, y)\,dR.$$

En término de las variables originales,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\,(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds - \frac{1}{2}\int\int_R h(x, y)\,dR.$$

Ejercicio (Caicedo 17/11, los demás no entregan): determine la solución de

$$u_{xx} - u_{yy} = 1$$

$$u(x,0) = sen(x), \quad u_y(x,0) = x.$$