Métodos Matemáticos
Series de Fourier

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Noviembre, 2026

Definiciones

Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua a trozos, si existe una cantidad finita de puntos $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ tal que f es continua en (x_{i-1}, x_i) y los límites laterales $f(x_i+)$ y $f(x_{i+1}-)$ existen para $i = 1, ..., n-1$.

$$\lim_{x \to x_i^+} f(x)$$

Definiciones

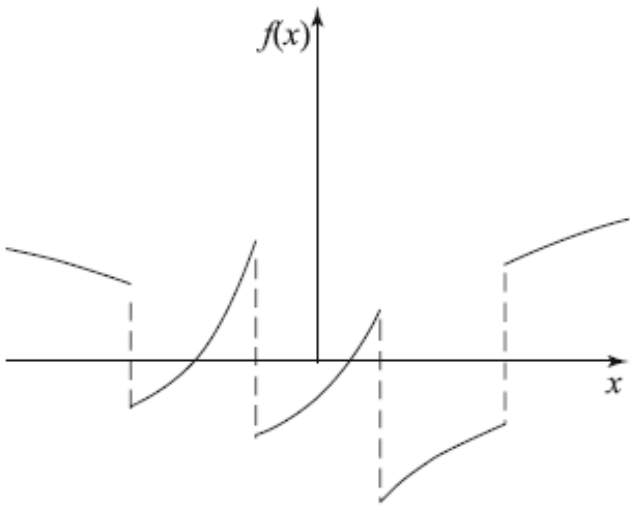
Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua a trozos, si existe una cantidad finita de puntos $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ tal que f es continua en (x_{i-1}, x_i) y los límites laterales $f(x_i+)$ y $f(x_{i+1}-)$ existen para $i = 1, ..., n-1$.

Una función continua a trozos es periódica si existe p tal que

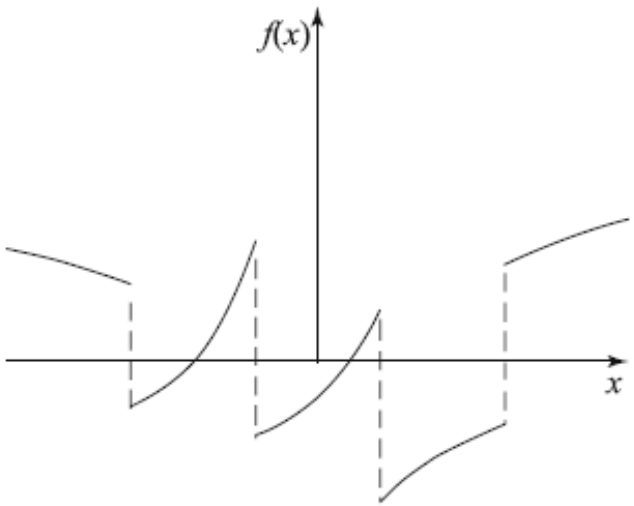
$$f(x + p) = f(x)$$

para todo x. El número p se denomina periodo y el menor de tales números se llama periodo fundamental.

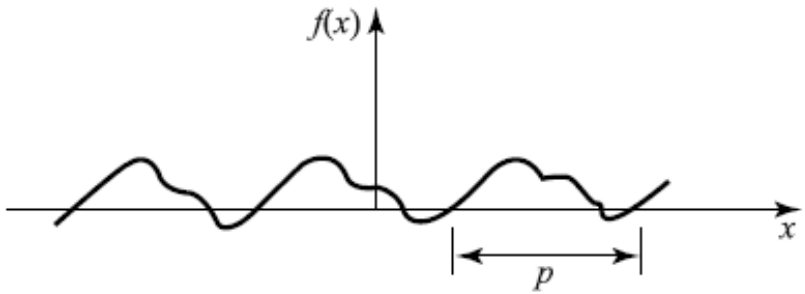
Función continua a trozos:



Función continua a trozos:



Función periódica:



Sistema ortogonal de funciones

Una colección de funciones $\{\phi_n\}$ es un sistema ortogonal con respecto al peso $q = q(x)$ en $[a, b]$ si:

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)q(x)\,dx = 0, \quad m \neq n.$$

Ejercicio (expone García 17/11, los demás no entregan): Pruebe que el sistema $\{sen(mx)\}$ $m = 1, 2, \ldots$ es un sistema ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Sistema ortogonal de funciones

Una colección de funciones $\{\phi_n\}$ es un sistema ortogonal con respecto al peso $q = q(x)$ en $[a, b]$ si:

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)q(x)\,dx = 0, \quad m \neq n.$$

Ejercicio (expone García 17/11, los demás no entregan): Pruebe que el sistema $\{sen(mx)\}$ $m = 1, 2, ...$ es un sistema ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Sistemas ortonormales

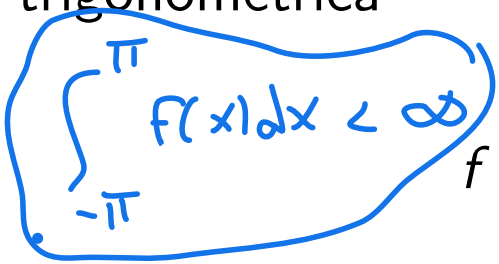
Un sistema ortogonal de funciones $\{\phi_n\}$ en $[a, b]$ es ortonormal si

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)q(x)\,dx = \begin{cases} 0, \text{ si } m \neq n, \\ 1, \text{ si } n = m. \end{cases}$$

Ejercicio: pruebe que el sistema
$1, cos(x), sen(x), cos(2x), sen(2x), ..., cos(nx), sen(nx), ...$ es ortonormal en $[-\pi, \pi]$.

Series de Fourier

Para cada función f integrable en $[-\pi, \pi]$, asociamos una serie trigonométrica



$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)).$$

$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$

$(e^{it})^n = \cos(nt) + i \operatorname{sen}(nt)$

Las sumas parciales de la serie son

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)).$$

Series de Fourier

Para cada función f integrable en $[-\pi, \pi]$, asociamos una serie trigonométrica

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)).$$

Las sumas parciales de la serie son

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)).$$

Buscaremos los coeficientes de tal forma de minimizar

$$I(a_0, a_k, b_k) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 \, dx. \tag{1}$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = -\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] dx.$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = -2\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] \cos kx \, dx.$$

$$\frac{\partial I}{\partial b_k} = -2\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] \sin kx \, dx.$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = -\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] dx.$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = -2\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] \cos kx\, dx.$$

$$\frac{\partial I}{\partial b_k} = -2\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] \sin kx\, dx.$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = \pi a_0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \quad = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2\pi a_k - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial b_k} = 2\pi b_k - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx, \quad = 0$$

Asi,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Así,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Ahora bien, calculando las derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a_0^2} = \pi,$$
$$\frac{\partial^2 I}{\partial a_k^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial b_k^2} = 2\pi$$

y realizando una expansión de Taylor:

$$I(a_0 + \Delta a_0, \ldots, b_n + \Delta b_n) = I(a_0, \ldots, b_n) + \Delta I$$

donde

$$\Delta I = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 I}{\partial a_0^2}\Delta a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 I}{\partial a_k^2}\Delta a_k^2 + \frac{\partial^2 I}{\partial b_k^2}\Delta b_k^2\right)\right].$$

se concluye que efectivamente la elección de los coeficientes minimiza (1).

Ejercicio (expone Cepeda 17/11, los demás no entregan): determine la serie de Fourier generada por $f(x) = x + x^2$ para $-\pi < x < \pi$.

Nociones de convergencia de series de funciones

- Decimos que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **converge puntualmente** en (a, b) a $f(x)$ si para cada $x \in (a, b)$ se tiene

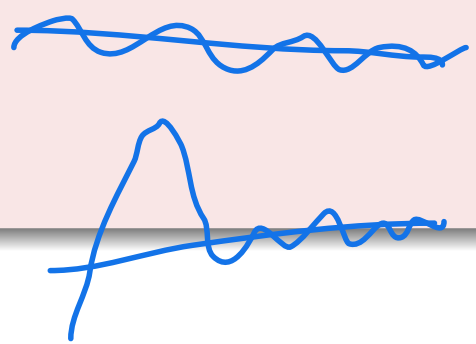
$$\lim_{k\to\infty} |s_k(x) - f(x)| = 0,$$

donde $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$.

$|s_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$, $\forall k \geq k_0$

$|s_k(\bar{x}) - f(\bar{x})| < \frac{1}{2}$, $\forall k \geq k_0$

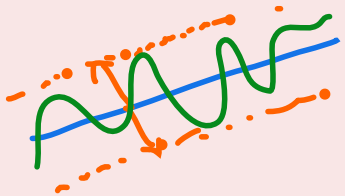
$x, \bar{x} \in (a; b)$.



Nociones de convergencia de series de funciones

- Decimos que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **converge puntualmente** en (a, b) a $f(x)$ si para cada $x \in (a, b)$ se tiene

$$\lim_{k\to\infty} |s_k(x) - f(x)| = 0,$$



donde $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$.

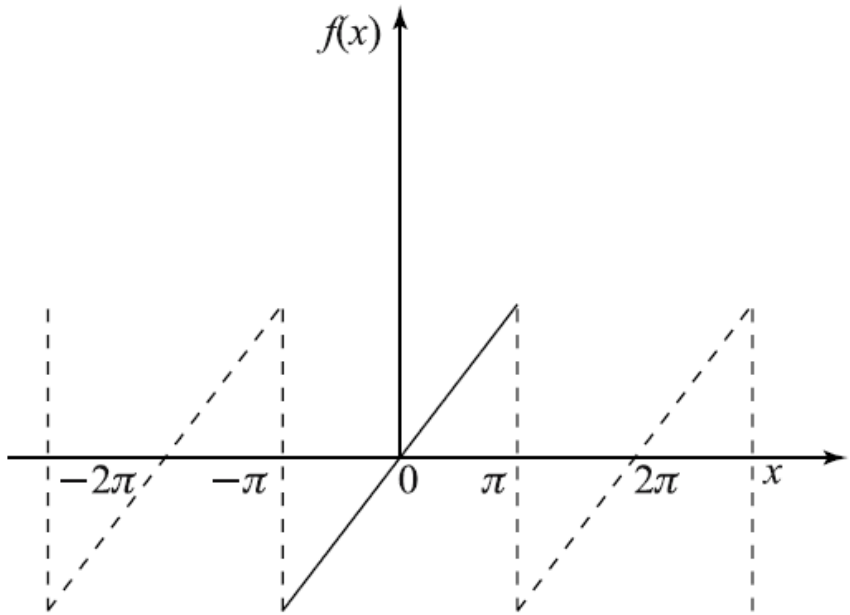
- Decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **converge uniformente** en $[a, b]$ a f si

$$\lim_{k\to\infty} \left(\max_{x\in[a,b]} |s_k(x) - f(x)| \right) = 0.$$

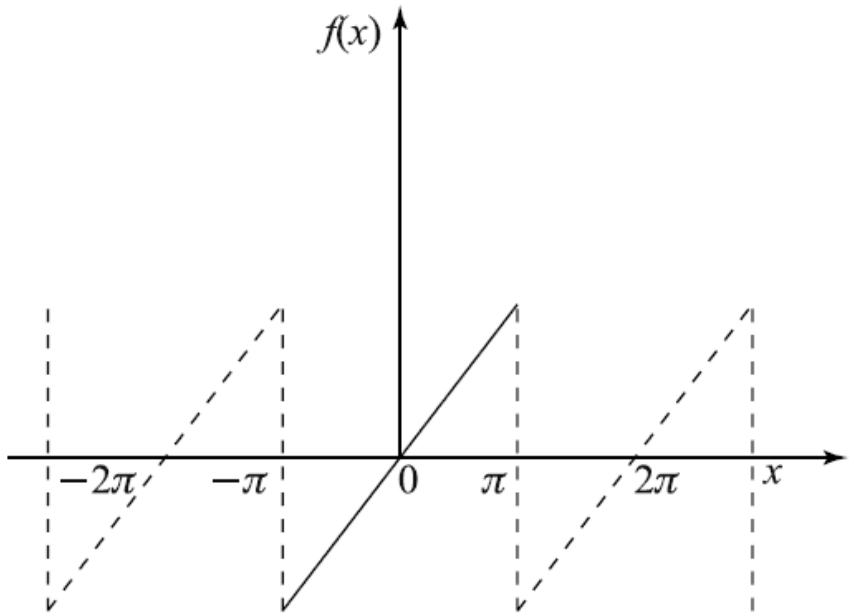
$|s_k(\bar{x}) - f(\bar{x})| \leq \max_{x\in[a,b]} |s_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2} \quad \forall k \geq$

$k \geq k_0 \quad \forall \bar{x} \in [a, b]$

Considere la función $f(x) = x$ en $-\pi < x < \pi$, $f(x) = f(x \pm 2k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$.



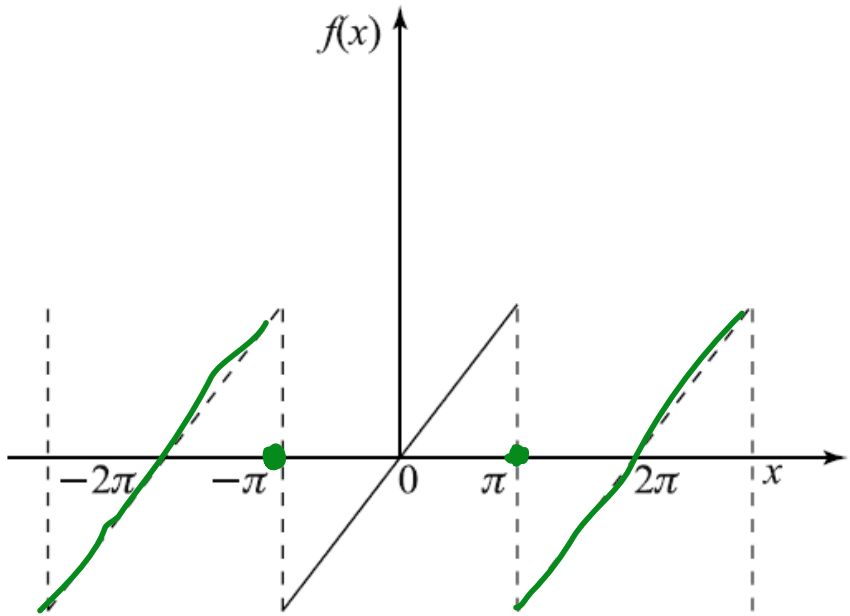
Considere la función $f(x) = x$ en $-\pi < x < \pi$, $f(x) = f(x \pm 2k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$.



La serie de Fourier generada por f es:

$$f \sim 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\text{sen}(kx)}{k}.$$

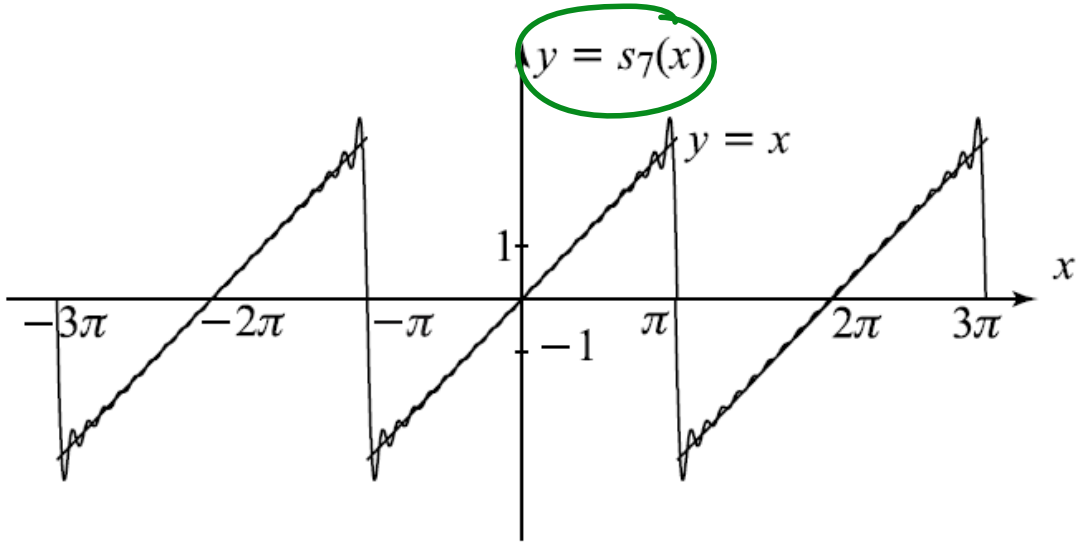
Considere la función $f(x) = x$ en $-\pi < x < \pi$, $f(x) = f(x \pm 2k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$.



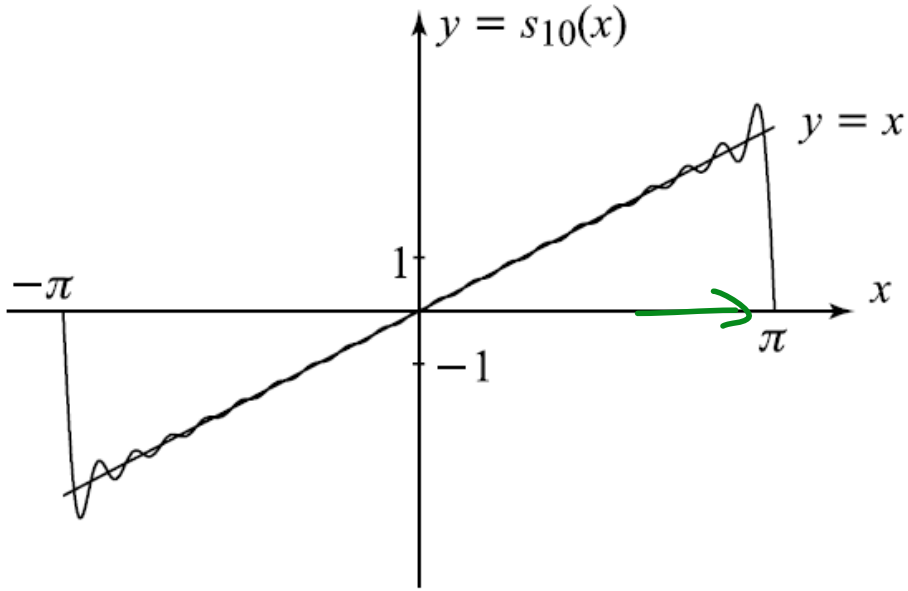
La serie de Fourier generada por f es:

$$f \sim 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}.$$

Observar que la serie se anula en $x = \pm\pi$, que es valor del promedio de los límites laterales de f en esos puntos.



(a)



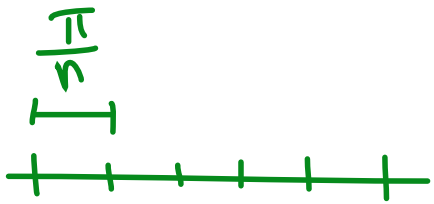
(b)

Análisis de la serie de Fourier alrededor de los puntos $\pm\pi$

Sea $x_n = \pi - \frac{\pi}{n}$. Entonces

$$s_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}\left[k\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{n}\right)}{\frac{\pi k}{n}} \frac{\pi}{n}.$$

$$\cong 2 \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$



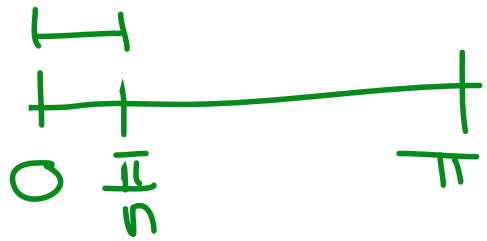
Análisis de la serie de Fourier alrededor de los puntos $\pm\pi$

Sea $x_n = \pi - \frac{\pi}{n}$. Entonces

$$s_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen} k\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{n}\right)}{\frac{\pi k}{n}} \frac{\pi}{n}.$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_n) = 2\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx \approx 1{,}18\pi.$$



Análisis de la serie de Fourier alrededor de los puntos $\pm\pi$
Sea $x_n = \pi - \frac{\pi}{n}$. Entonces

$$s_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen} k\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi k}{n})}{\frac{\pi k}{n}} \frac{\pi}{n}.$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_n) = 2\int_0^n \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx \approx 1{,}18\pi.$$

Esta oscilación no uniforme cerca de las discontinuidades se conoce como **fenómeno de Gibbs.**

17/11

Ejercicio (exponen Chiguano y Fiallos, los demás no entregan): obtenga la serie de Fourier de

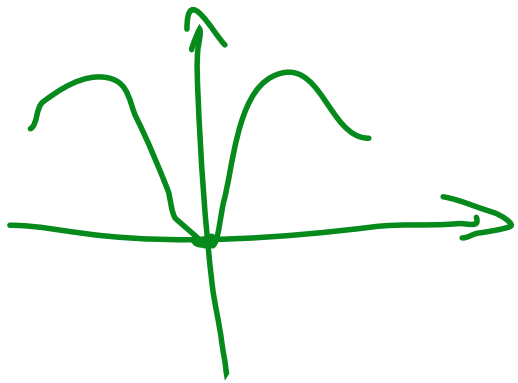
$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

y $f(x \pm 2k\pi) = f(x)$. Analice el fenómeno de Gibbs a la derecha del origen, buscando los valores máximos de las sumas parciales s_n. Haciendo $n \to \infty$, calcule el valor del salto máximo.

Extensión de funciones

Si f está definida en $(0, \pi)$, podemos extender f de forma par:

$$F_e(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ f(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$



o de forma impar:

$$F_o(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ -f(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Series complejas de Fourier

Supongamos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right).$$

Utilizando:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

reescribimos la serie de Fourier de f:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \right) + b_k \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) e^{ikx} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) e^{-ikx} \right] \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \, e^{ikx} + c_{-k} \, e^{-ikx} \right), \end{aligned}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos kx - i\sin kx\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}dx \\
c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos kx + i\sin kx\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{ikx}dx.
\end{aligned}
$$

donde:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(\cos kx - i\sin kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}dx$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(\cos kx + i\sin kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{ikx}dx.$$

Así, obtenemos

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,e^{ikx}, \qquad -\pi < x < \pi,$$

con coeficientes

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}dx.$$

Series de Fourier en intervalos arbitrarios

Supongamos que $f = f(x)$ está definida en $[a, b]$. Sea

$$x = \frac{1}{2}(b + a) + \frac{(b - a)}{2\pi} t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

La función $F(t) = f(x)$ está definida en $[-\pi, \pi]$ y

$$F \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k cos(kt) + b_k sen(kt) \right),$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) cos(kt)\, dt, \quad k = 0, 1, ...,$$

y

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) sen(kt)\, dt, \quad k = 1, ...$$

Luego, la expansión para f en $[a, b]$ es

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k cos\left(\frac{k\pi(2x - b - a)}{b - a} \right) + b_k sen\left(\frac{k\pi(2x - b - a)}{b - a} \right) \right),$$

donde ahora

$$a_k = \frac{2}{b - a} \int_a^b f(x) cos\left(\frac{k\pi(2x - b - a)}{b - a} \right) dx, \quad k = 0, 1, ...$$

y

$$b_k = \frac{2}{b - a} \int_a^b f(x) sen\left(\frac{k\pi(2x - b - a)}{b - a} \right) dx, \quad k = 1, ...$$

En el caso particular en que $[a, b] = [-l, l]$, la serie de Fourier generada por f es

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k sen\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right),$$

con

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\, dx,$$

y

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) sen\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\, dx.$$

En el caso particular en que $[a, b] = [-l, l]$, la serie de Fourier generada por f es

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k sen\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right),$$

con

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\, dx,$$

y

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) sen\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\, dx.$$

Ejercicio (Expone Corteggiano 19/11, los demás no entregan): obtenga la serie de Fourier de la extensión impar de la función $f(x) = x$ definida en $-2 < x < 2$.

Funciones suaves a trozos

Si f es una función continua a trozos en $[a, b]$, si f' es continua en cada uno de los intervalos (x_{j-1}, x_j) para $j = 1, ..., n$ y los límites laterales $f'(x_{j-1}+)$ y $f'(x_j-)$ existen, se dice que f es suave a trozos.

Convergencia de series de Fourier



Funciones suaves a trozos

Si f es una función continua a trozos en $[a, b]$, si f' es continua en cada uno de los intervalos (x_{j-1}, x_j) para $j = 1, ..., n$ y los límites laterales $f'(x_{j-1}+)$ y $f'(x_j-)$ existen, se dice que f es suave a trozos.

Teorema de convergencia puntual

Si f es suave a trozos y periódica con periodo 2π en $[-\pi, \pi]$, entonces

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k cos(kx) + b_k sen(kx)) = \frac{1}{2} \left(f(x+) + f(x-) \right),$$

para toda $x \in [-\pi, \pi]$.

Teorema de convergencia uniforme

Sea f una función continua con periodo 2π y sea f' una función continua a trozos en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Si además, $f(-\pi) = f(\pi)$, entonces la serie de Fourier de f converge a f uniformemente.

Teorema de convergencia uniforme

Sea f una función continua con periodo 2π y sea f' una función continua a trozos en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Si además, $f(-\pi) = f(\pi)$, entonces la serie de Fourier de f converge a f uniformemente.

Teorema de convergencia uniforme local

Sea f una función suave a trozos en $[-\pi, \pi]$ con periodo 2π, entonces la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en cada intervalo cerrado que no contenga discontinuidades.

Teorema de diferenciación de series de Fourier

Sea f continua en $[-\pi, \pi]$, con $f(-\pi) = f(\pi)$, y sea f' suave a trozos en ese intervalo. Entonces, la serie de Fourier de f' se obtiene diferenciando término a término la serie de Fourier de f y esta serie converge a $f'(x)$ en los puntos de continuidad de f' y a $(f'(x-) + f'(x+))/2$.

$$\int_a^b \left(\frac{a_0}{2} + \sum \left(a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx) \right) \right) dx$$

Teorema de diferenciación de series de Fourier

Sea f continua en $[-\pi, \pi]$, con $f(-\pi) = f(\pi)$, y sea f' suave a trozos en ese intervalo. Entonces, la serie de Fourier de f' se obtiene diferenciando término a término la serie de Fourier de f y esta serie converge a $f'(x)$ en los puntos de continuidad de f' y a $(f'(x-) + f'(x+))/2$.

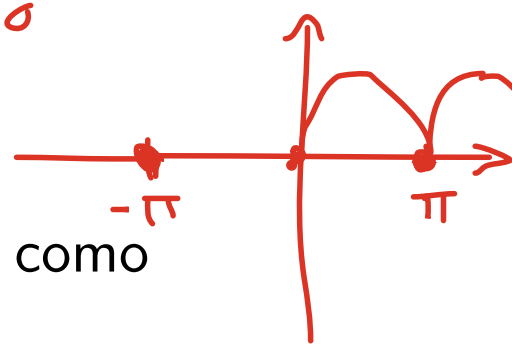
Teorema de integración de series de Fourier

Sea f una función continua a trozos en $[-\pi, \pi]$ y periódica con periodo 2π. Entonces, la series de Fourier de f (ya sea que converja o no), puede ser integrada término a término.

$$f(x) = \cdots$$
$$f'(x) = \sum (\quad)'$$

$[\cos(x)]' = |\operatorname{sen}(x)| \quad \forall x \in [-\pi;\pi]$?

$-\operatorname{sen}(x)$



Ejemplo: la función $f(x) = |sen(x)|$ puede representarse como

$= |\operatorname{sen}(x)| = sen(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos(2kx)}{(1-4k^2)}, \quad -\pi < x < \pi.$

¿ $\frac{d}{dx}$?

Entonces

$$cos(x) = -\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ksen(2kx)}{(1-4k^2)}, \quad -\pi < x < \pi.$$

¿?

¿?

$$-\operatorname{sen} x = \frac{-8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2\cos(2kx)}{(1-4k^2)}$$

$$\operatorname{Sen} x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2\cos(2kx)}{(1-4k^2)}$$

Series dobles de Fourier

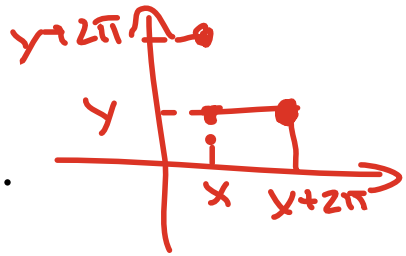
Supongamos que $f = f(x, y)$ es una función continuamente diferenciable, con periodo 2π:

$$f(x + 2\pi, y) = f(x, y + 2\pi) = f(x, y).$$

Series dobles de Fourier

Supongamos que $f = f(x, y)$ es una función continuamente diferenciable, con periodo 2π:

$$f(x + 2\pi, y) = f(x, y + 2\pi) = f(x, y).$$



Así, para cada y fijo, $f(\cdot, y)$ puede expandirse en una serie de Fourier uniformemente convergente:

$$f(x, y) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m(y) cos(mx) + b_m(y) sen(mx) \right),$$

con coeficientes

$$a_m(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) cos(mx)\, dx,$$

$$b_m(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) sen(mx)\, dx.$$

Expandimos los coeficientes:

$$a_m(y) = \frac{a_{m0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{mn} \cos ny + b_{mn} \sin ny\right),$$

$$b_m(y) = \frac{c_{m0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{mn} \cos ny + d_{mn} \sin ny\right),$$

Expandimos los coeficientes:

$$a_m(y) = \frac{a_{m0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn}\cos ny + b_{mn}\sin ny),$$

$$b_m(y) = \frac{c_{m0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{mn}\cos ny + d_{mn}\sin ny),$$

donde

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_m(y)\cos(ny)\,dy = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\cos(mx)$$

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\cos mx\cos ny\,dx\,dy,$$

$$b_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\cos mx\sin ny\,dx\,dy,$$

$$c_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\sin mx\cos ny\,dx\,dy,$$

$$d_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\sin mx\sin ny\,dx\,dy.$$

Así, la serie doble de Fourier de f es

$$\begin{aligned} f(x,y) = \frac{a_{00}}{4} &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{0n}\cos ny + b_{0n}\sin ny\right) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{m0}\cos mx + c_{m0}\sin mx\right) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos mx\cos ny + b_{mn}\cos mx\sin ny\right. \\ &\qquad \left. + c_{mn}\sin mx\cos ny + d_{mn}\sin mx\sin ny\right). \end{aligned}$$

Así, la serie doble de Fourier de f es

$$\begin{aligned} f(x,y) = \frac{a_{00}}{4} &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{0n}\cos ny + b_{0n}\sin ny\right) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{m0}\cos mx + c_{m0}\sin mx\right) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos mx\cos ny + b_{mn}\cos mx\sin ny\right. \\ &\qquad \left. + c_{mn}\sin mx\cos ny + d_{mn}\sin mx\sin ny\right). \end{aligned}$$

Ejercicios (Huancho y Jácome 19/11, los demás no entregan):
pruebe que si $f(-x,y) = f(x,y)$ y $f(x,-y) = f(x,y)$, entonces sólo los términos con cosenos permanecen.
Expanda en serie de Fourier la función $f(x,y) = xy$, $-\pi < x < \pi$, $-\pi < y < \pi$.