Métodos Matemáticos
Método de separación de variables

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Noviembre, 2026

El método de separación de variables, también llamado método de Fourier, combinado con el principio de superposición, es una técnica importante que permite resolver problemas con valores iniciales y valores de frontera que involucran ecuaciones diferenciales (lineales) en derivadas parciales.

El método de separación de variables, también llamado método de Fourier, combinado con el principio de superposición, es una técnica importante que permite resolver problemas con valores iniciales y valores de frontera que involucran ecuaciones diferenciales (lineales) en derivadas parciales. La idea del método es proponer

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

y entonces la ecuación diferencial en derivadas parciales se transforma en un problema de autovalores.

Problema de la cuerda vibrante con extremos fijos

Supongamos que la tensión de la cuerda (de longitud l) es constante, que la densidad es ρ con $c^2 = T/\rho$ (c velocidad de propagación de la onda), y que tiene extremos fijos.

Problema de la cuerda vibrante con extremos fijos

Supongamos que la tensión de la cuerda (de longitud l) es constante, que la densidad es ρ con $c^2 = T/\rho$ (c velocidad de propagación de la onda), y que tiene extremos fijos.

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, & 0 < x < l, \quad & t > 0, \\
u(x,0) &= f(x), & 0 \leq x \leq l, & \\
u_t(x,0) &= g(x), & 0 \leq x \leq l, & \\
u(0,t) &= 0, & & t \geq 0, \\
u(l,t) &= 0, & & t \geq 0,
\end{aligned}
$$

con f y g el desplazamiento y la velocidad iniciales, respectivamente.

Problema de la cuerda vibrante con extremos fijos

Supongamos que la tensión de la cuerda (de longitud l) es constante, que la densidad es ρ con $c^2 = T/\rho$ (c velocidad de propagación de la onda), y que tiene extremos fijos.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq l, & \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq l, & \\ u(0,t) = 0, & & t \geq 0, \\ u(l,t) = 0, & & t \geq 0, \end{cases}$$

con f y g el desplazamiento y la velocidad iniciales, respectivamente.



Proponemos

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0.$$

Sustituyendo en la ecuación:

Proponemos

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0.$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$XT'' = c^2 X'' T,$$

y entonces

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Proponemos

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0.$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$XT'' = c^2 X'' T,$$

y entonces

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esto da origen a dos ecuaciones diferenciales ordinarias (lineales, con coeficientes constantes):

$$X'' - \lambda X = 0,$$

$$T'' - \lambda c^2 T = 0.$$

A partir de $u(0,t) = 0$,

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0.$$

De forma similar, $X(l) = 0$.

La ecuación característica para el problema

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0,$$

es

$$r^2 - \lambda = 0.$$

La ecuación característica para el problema

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0,$$

es

$$r^2 - \lambda = 0.$$

- $\lambda > 0$. La solución general es

$$X(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}.$$

Las condiciones iniciaes implican

$$A + B = 0, \quad Ae^{-\sqrt{\lambda}l} + Be^{\sqrt{\lambda}l} = 0.$$

La ecuación característica para el problema

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0,$$

es

$$r^2 - \lambda = 0.$$

- $\lambda > 0$. La solución general es

$$X(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}.$$

Las condiciones iniciaes implican

$$A + B = 0, \quad Ae^{-\sqrt{\lambda}l} + Be^{\sqrt{\lambda}l} = 0.$$

Así, $A = B = 0$. La solución es trivial y por ende, no es de interés.

La ecuación característica para el problema

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0,$$

es

$$r^2 - \lambda = 0.$$

- $\lambda > 0$. La solución general es

  $$X(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}.$$

  Las condiciones iniciaes implican

  $$A + B = 0, \quad Ae^{-\sqrt{\lambda}l} + Be^{\sqrt{\lambda}l} = 0.$$

  Así, $A = B = 0$. La solución es trivial y por ende, no es de interés.
- $\lambda = 0$. La solución general es

  $$X(x) = A + Bx$$

  y luego de aplicar las condiciones iniciales, obtenemos la solución trivial.

- $\lambda < 0$. La solución general es

$$X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\text{sen}(\sqrt{-\lambda}x).$$

De las condiciones iniciales se obtiene $A = 0$ y

$$\sqrt{-\lambda}l = n\pi, n = 1, 2, ...,$$

y entonces

$$\lambda_n = -(n\pi/l)^2.$$

- $\lambda < 0$. La solución general es

$$X(x) = Acos(\sqrt{-\lambda}x) + Bsen(\sqrt{-\lambda}x).$$

De las condiciones iniciales se obtiene $A = 0$ y

$$\sqrt{-\lambda}l = n\pi, n = 1, 2, ...,$$

y entonces

$$\lambda_n = -(n\pi/l)^2.$$

Así,

$$X_n(x) = B_n sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

- $\lambda < 0$. La solución general es

$$X(x) = Acos(\sqrt{-\lambda}x) + Bsen(\sqrt{-\lambda}x).$$

De las condiciones iniciales se obtiene $A = 0$ y

$$\sqrt{-\lambda}l = n\pi, n = 1, 2, ...,$$

y entonces

$$\lambda_n = -(n\pi/l)^2.$$

Así,

$$X_n(x) = B_n sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Luego,

$$T_n(t) = C_n cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + D_n sen\left(\frac{n\pi c}{l}t\right),$$

donde C_n y D_n son constantes arbitrarias.

- $\lambda < 0$. La solución general es

$$X(x) = Acos(\sqrt{-\lambda}x) + Bsen(\sqrt{-\lambda}x).$$

De las condiciones iniciales se obtiene $A = 0$ y

$$\sqrt{-\lambda}l = n\pi, n = 1, 2, ...,$$

y entonces

$$\lambda_n = -(n\pi/l)^2.$$

Así,

$$X_n(x) = B_n sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Luego,

$$T_n(t) = C_n cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + D_n sen\left(\frac{n\pi c}{l}t\right),$$

donde C_n y D_n son constantes arbitrarias. Así,

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(a_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

satisface la ecuación de onda y las condiciones de borde.

Por superposición, la expresión

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right)$$

es solución de la ecuación de onda y satisface las condiciones de borde.

Por superposición, la expresión

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right)$$

es solución de la ecuación de onda y satisface las condiciones de borde. Derivando con respecto a t,

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} \left(-a_n \sin \frac{n\pi c}{l} t + b_n \cos \frac{n\pi c}{l} t \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right).$$

Entonces

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right),$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{l} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right).$$

$x \in (0; l)$

Observar que las igualdades anteriores se satisfacen si

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \qquad b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx,$$

Observar que las igualdades anteriores se satisfacen si

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \qquad b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx,$$

En conclusión, la función

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

es solución formal del problema considerado.

Interpretación física de u_n

Las funciones $X_n(x)T_n(t)$

$$u_n(x,t) = (a_n cos(\omega_n t) + b_n sen(\omega_n t)) sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{l}$$

se denomina modos normales de orden n de vibración o n-ésimo armónico.

Interpretación física de u_n

Las funciones

$$u_n(x,t) = (a_n cos(\omega_n t) + b_n sen(\omega_n t)) sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{l}$$

se denomina modos normales de orden n de vibración o n-ésimo armónico. El primer armónico $n = 1$ se llama armónico fundamental y todos los demás armónicos son los sobretonos. La frecuencia del modo fundamental es

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{l}, \text{ con frec. angular } \nu_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Esta es la Ley de Mersenne.

Interpretación física de u_n

Las funciones

$$u_n(x,t) = (a_n cos(\omega_n t) + b_n sen(\omega_n t)) sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{l}$$

se denomina modos normales de orden n de vibración o n-ésimo armónico. El primer armónico $n = 1$ se llama armónico fundamental y todos los demás armónicos son los sobretonos. La frecuencia del modo fundamental es

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{l}, \text{ con frec. angular } \nu_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Esta es la Ley de Mersenne.
La expresión de $u = \sum u_n$ representa el movimiento de una cuerda pulsada como superposición de los modos normales de vibración con frecuencias que son múltiplos de la frecuencia fundamental.

Interpretación física de u_n

Supongamos que la cuerda pulsada verifica que $u_t(x,0) = 0$, entonces

$$u_n(x,t) = a_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right) cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right), n \in \mathbb{N}.$$

X_n

Interpretación física de u_n

Supongamos que la cuerda pulsada verifica que $u_t(x,0) = 0$, entonces

$$u_n(x,t) = a_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right) cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Estas ondas se llaman ondas estacionarias (no son ondas de propagación, sino distintos modos de vibración de una cuerda).

Interpretación física de u_n



Supongamos que la cuerda pulsada verifica que $u_t(x,0) = 0$, entonces

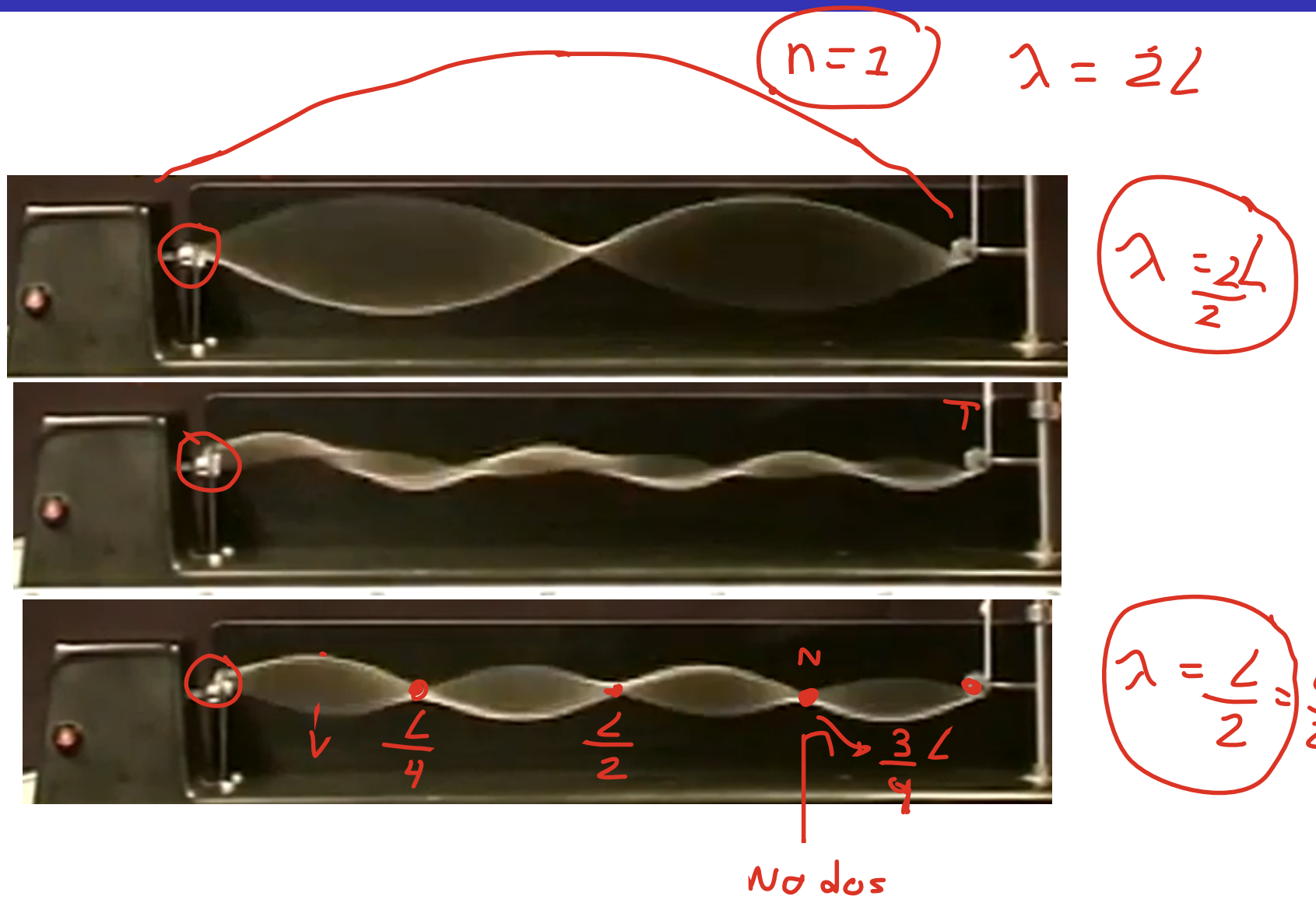
$$u_n(x,t) = a_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right) cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Estas ondas se llaman ondas estacionarias (no son ondas de propagación, sino distintos modos de vibración de una cuerda).
Observe que la expresión de u_n puede escribirse como:

$$u_n(x,t) = \frac{1}{2}a_n\left(sen\frac{n\pi}{l}(x-ct) + sen\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right),$$

lo que muestra que una onda estacionaria es una suma de dos ondas de igual amplitud que viajan en direcciones opuestas, onda incidente y reflejada (en correspondencia con la solución de d'Alambert).

Interpretación física de u_n



Interpretación física de u_n

Observar que se las ondas estacionarias se anulan para

$$x = 0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, ..., l.$$

Son los nodos del n-ésimo armónico.

Interpretación física de u_n

Observar que se las ondas estacionarias se anulan para

$$x = 0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, ..., l.$$

Son los nodos del n-ésimo armónico. Para que se den los modos armónicos, la longitud de la cuerda debe cumplir

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \text{ siendo } \lambda \text{ longitud de onda.}$$

$$\lambda = \frac{2}{n} l$$

Interpretación física de u_n

Observar que se las ondas estacionarias se anulan para

$$x = 0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, ..., l.$$

Son los nodos del n-ésimo armónico. Para que se den los modos armónicos, la longitud de la cuerda debe cumplir

$l = n\frac{\lambda}{2}$, siendo λ longitud de onda.

Ahora bien, la velocidad de la onda propagada c se relaciona con la frecuencia del motor ν (sistema en resonancia: $\nu = \nu_n$) mediante

$$c = \lambda\nu.$$

Con lo cual,

$$\lambda = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

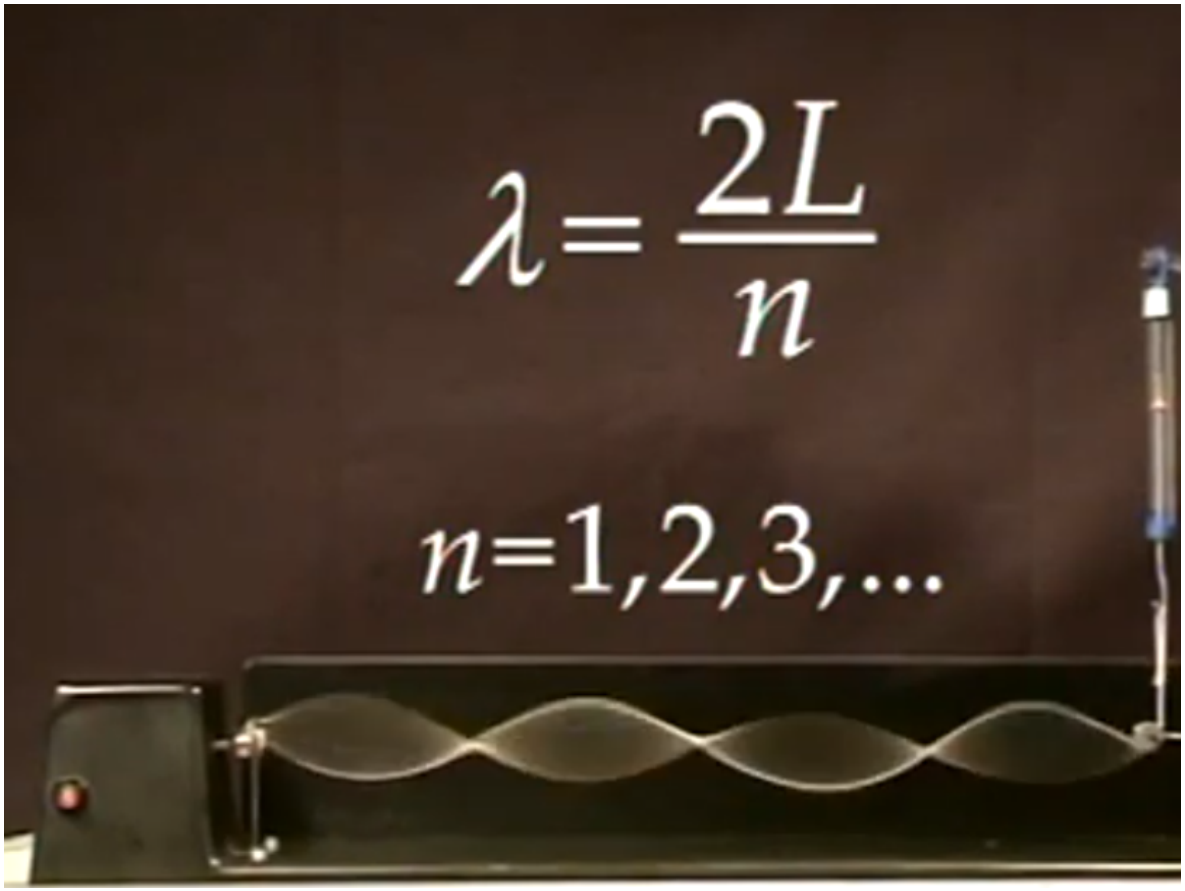
Interpretación física de u_n

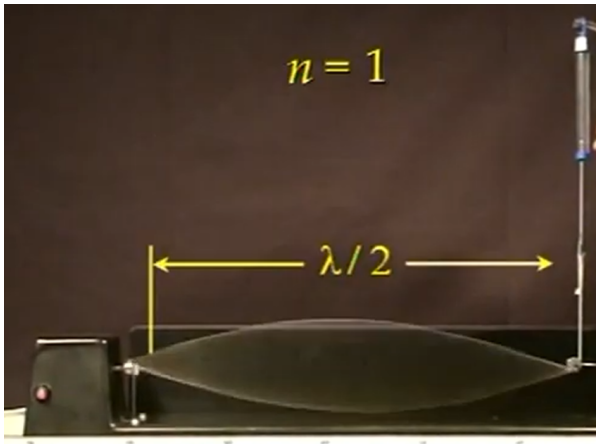
Luego, para que se produzca una onda estacionaria, necesariamente se debe cumplir

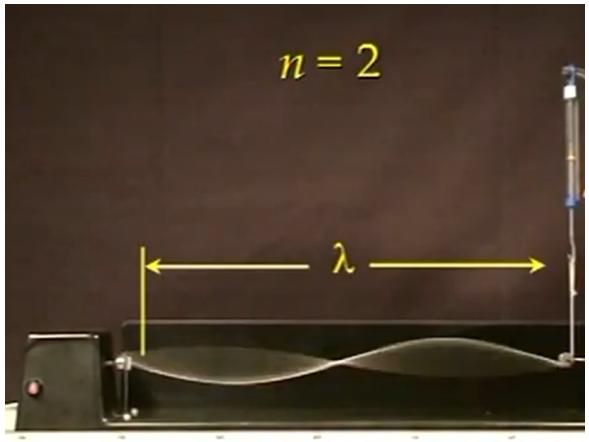
$$T = \frac{4\nu^2 L^2 \rho}{n^2}.$$

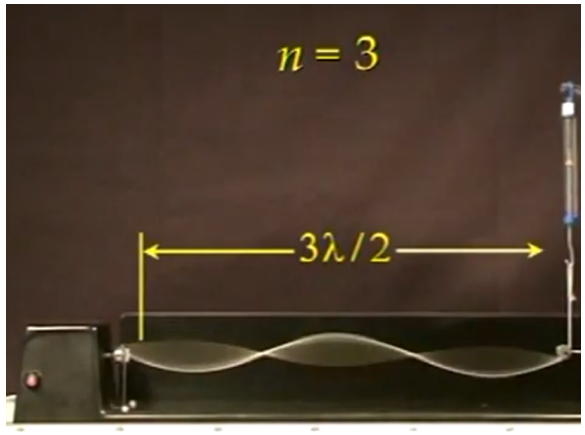
$T \sim \frac{1}{n^2}$

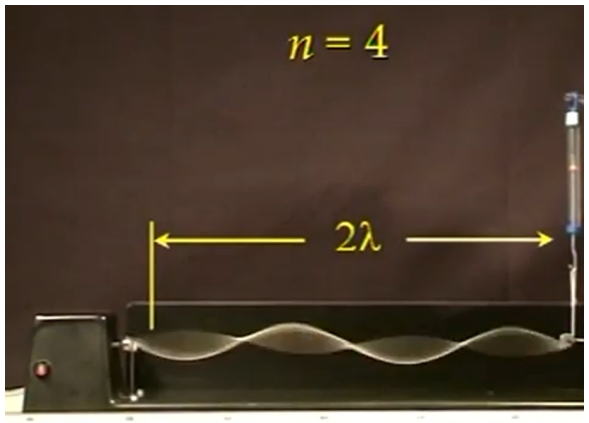
En la experiencia, la única variable es T.


$\lambda = \frac{2L}{n}$
$n=1,2,3,\ldots$









Sólo se producen ondas estacionarias cuando el motor entra en resonancia con la cuerda, es decir, cuando la tensión satisface la condición de resonancia. Fuente: https://www.youtube.com/watch?v=iUNIoGvwvh0.

Ejercicio (exponen Montúfar y Orozco 24/11, los demás entregan 19/11): Considere una cuerda con extremos fijos. Suponga que la cuerda es pulsada de tal manera de formar un triángulo isósceles de altura h. Suponga que $g(x) = 0$. Obtenga las ondas estacionarias y la expresión de u como superposición de las ondas estacionarias.

Teorema de existencia y unicidad

Supongamos que f'' es continua en $[0, l]$, $f(0) = f(l) = 0$ y $f''(0) = f''(l) = 0$. Además, supongamos que g' es continua en $[0, l]$, con $g(0) = g(l)$. Entonces, existe una única solución del problema

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, && 0 < x < l, && t > 0, \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le l, && \\
u_t(x,0) &= g(x), && 0 \le x \le l, && \\
u(0,t) &= 0, && && t \ge 0, \\
u(l,t) &= 0, && && t \ge 0,
\end{aligned}
$$

Demostración

Primero,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

y la convergencia es uniforme en $[0, l]$.

Demostración

Primero,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

y la convergencia es uniforme en $[0, l]$.
Extendemos f de forma impar a $\mathbb{R}$ definiendo

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Así, $F(x) = f(x)$ si $x \in [0, l]$, F es impar y $F(x \pm 2l) = F(x)$.

Demostración

Primero,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

y la convergencia es uniforme en $[0, l]$.
Extendemos f de forma impar a $\mathbb{R}$ definiendo

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$F(l) = F(-l)$

$F(l) = f(l) = 0$

$F(-l) = -F(l) = 0.$

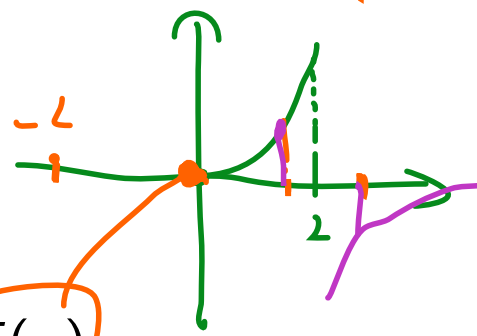
Así, $F(x) = f(x)$ si $x \in [0, l]$, F es impar y $F(x \pm 2l) = F(x)$.

Sea

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x-ct) + F(x+ct)\right].$$

$u_1(x;t) = \frac{1}{2}[F(x-ct) + F(x+ct)]$

$u_1(x;0) = f$



Entonces u_1 satisface las condiciones de frontera y la condición inicial.

$u_1(0;t) = \frac{1}{2}[F(-ct) + F(ct)] = 0$

Además, como F' existe y es continua,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}\left[-cF'(x-ct) + cF'(x+ct)\right]$$

y entonces

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = \frac{1}{2}\left[-cF'(x) + cF'(x)\right] = 0. \overset{?}{=} g(x)$$

Además, como F' existe y es continua,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}\left[-cF'(x-ct) + cF'(x+ct)\right]$$

y entonces

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = \frac{1}{2}\left[-cF'(x) + cF'(x)\right] = 0.$$

Por otro lado, como f'' es continua en $[0,l]$ y $f''(0) = f''(l) = 0$, F'' es continua en $\mathbb{R}$ y

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{2}c^2\left(F''(x-ct) + F''(x+ct)\right)$$

y

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{2}\left(F''(x-ct) + F''(x+ct)\right).$$

Así, u_1 satisface el problema original con $g = 0$.

Por las hipótesis en g, tenemos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{l}\right) sen \left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

y la convergencia es uniforme en $[0, l]$.

Por las hipótesis en g, tenemos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{l}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

y la convergencia es uniforme en $[0, l]$. Considere la extensión periódica impar de g en $\mathbb{R}$:

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad c_n = \frac{n\pi c}{l},$$

y defina

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t G(x-c\tau)\, d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t G(x+c\tau)\, d\tau.$$

Ejercicio: compruebe, justificando cada paso, que u_2 es solución de la ecuación de onda, que $u_2(x,0) = 0$, $u_2(0,t) = u_2(l,t) = 0$ y $\partial u_2/\partial t(x,0) = g(x)$.

Por lo tanto, la función

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

es solución del problema original.

Por lo tanto, la función

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

es solución del problema original.
Para ver la unicidad, supongamos que hay dos soluciones u y v del problema original. Entonces $w = u - v$ es solución del problema con datos nulos.

Por lo tanto, la función

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

es solución del problema original.
Para ver la unicidad, supongamos que hay dos soluciones u y v del problema original. Entonces $w = u - v$ es solución del problema con datos nulos.
Consideremos la energía total de la cuerda vibrante en t:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l c^2 w_x^2(x,t) + w_t^2(x,t)\,dx.$$

$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$

$w(x,0) = 0$

$w_t(x,0) = 0$

$w(0,t) = w(L,t) = 0.$

$w \equiv 0$

Por lo tanto, la función

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

es solución del problema original.

Para ver la unicidad, supongamos que hay dos soluciones u y v del problema original. Entonces $w = u - v$ es solución del problema con datos nulos.

Consideremos la energía total de la cuerda vibrante en t:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l c^2 w_x^2(x,t) + w_t^2(x,t)\, dx.$$

Observar que

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_0^t c^2 w_x w_{xt} + w_t w_{tt}\, dx = (c^2 w_x w_t)|_0^l - \int_0^l c^2 w_t w_{xx}\, dx + \int_0^l w_t w_{tt}\, dx = 0.$$

Por lo tanto, la función

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

es solución del problema original.

$w(x;0) = 0$
$w_t(x;0) = 0$
$w(0;t) = w(L;t) = 0.$

Para ver la unicidad, supongamos que hay dos soluciones u y v del problema original. Entonces $w = u - v$ es solución del problema con datos nulos.

Consideremos la energía total de la cuerda vibrante en t:

$w_{tt} = c^2 w_{xx}$

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[c^2 w_x^2(x,t) + w_t^2(x,t)\right] dx.$$

Observar que

$$c^2\left[w_x(L;t)\,w_t(L;t) - w_x(0;t)\,w_t(0;t)\right] = 0$$

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_0^l c^2 w_x w_{xt} + w_t w_{tt}\, dx = \left(c^2 w_x w_t\right)\Big|_0^l - \int_0^l c^2 w_t w_{xx}\, dx + \int_0^l w_t w_{tt}\, dx = 0.$$

Así, $E = C$. Evaluando en $t = 0$ y usando las condiciones iniciales, $C = 0$. Luego, $w(x,t) = c$ y usando condiciones iniciales, $w = 0$ para todo x y t.

El problema de conducción del calor

Consideramos una varilla de longitud l. La varilla es lo suficientemente delgada para asumir que calor se distribuye uniformemente en cada sección transversal. La superficie de la varilla está aislada. La distribución de temperatura está dada por la solución del problema:

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \qquad\qquad\quad t \geq 0, \\ u(l,t) &= 0, \qquad\qquad\quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

El problema de conducción del calor

Consideramos una varilla de longitud l. La varilla es lo suficientemente delgada para asumir que calor se distribuye uniformemente en cada sección transversal. La superficie de la varilla está aislada. La distribución de temperatura está dada por la solución del problema:

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \qquad\qquad\qquad\quad t \geq 0, \\ u(l,t) &= 0, \qquad\qquad\qquad\quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Por separación de variables, asumimos

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \neq 0.$$

y entonces

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\alpha^2,$$

Así,

$$X'' + \alpha^2 X = 0,$$
$$T' + \alpha^2 k T = 0.$$

Recordamos

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \qquad u(l,t) = X(l)T(t) = 0.$$

Luego,

$$X'' + \alpha^2 X = 0,$$
$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0.$$

Así,

$$X'' + \alpha^2 X = 0,$$
$$T' + \alpha^2 kT = 0.$$

Recordamos

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \qquad u(l,t) = X(l)T(t) = 0.$$

Luego,

$$X'' + \alpha^2 X = 0,$$
$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0.$$

La solución general del problema anterior es

$$X(x) = A\cos(\alpha x) + B\mathit{sen}(\alpha x).$$

Usando $X(0) = 0$, se obtiene $A = 0$.

La segunda condición

$$X(l) = Bsen(\alpha l) = 0$$

implica

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}, n \in \mathbb{N}.$$

Por ende,

$$X_n(x) = B_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

La segunda condición

$$X(l) = Bsen(\alpha l) = 0$$

implica

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}, n \in \mathbb{N}.$$

Por ende,

$$X_n(x) = B_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

Con respecto a T, la solución general es

$$T_n(t) = C_n e^{-(n\pi/l)^2 kt}, \ n \in \mathbb{N}.$$

La segunda condición

$$X(l) = Bsen(\alpha l) = 0$$

implica

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}, n \in \mathbb{N}.$$

Por ende,

$$X_n(x) = B_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

Con respecto a T, la solución general es

$$T_n(t) = C_n e^{-(n\pi/l)^2 kt}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Por superposición,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi/l)^2 kt} sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

es una solución formal de la ecuación del calor.

u satisface la condición inicial si

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

u satisface la condición inicial si

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Así, si f puede expresarse en términos de una serie de senos de Fourier con coeficientes

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\, dx,$$

la función u dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\, dx\right) e^{-(n\pi/l)^2 kt} sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

es una solución formal del problema original.

Teorema de existencia y unicidad

Supongamos que f es continua en $[0, l]$, que $f(0) = f(l) = 0$ y que f' es continua a trozos en $[0, l]$. Entonces, existe una única solución del problema

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ u(l,t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Ecuación de Laplace

Considere la distribución estacionaria de temperatura en una placa rectangular delgada. Dos lados están aislados, un lado se mantiene a temperatura cero y la temperatura del lado restante está prescrita por $f(x)$. Por lo tanto, se requiere resolver

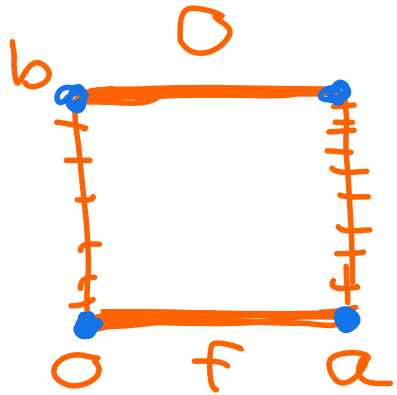
$$\Delta u = \nabla^2 u = 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le a,$$

$$u(x,b) = 0, \qquad 0 \le x \le a,$$

$$u_x(0,y) = 0, \qquad u_x(a,y) = 0.$$



Sea

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación de Laplace se obtiene

$$X'' - \lambda X = 0, \qquad Y'' + \lambda Y = 0.$$

Como las condiciones de frontera son homogéneas en $x = 0$ y $x = a$, se tiene $\lambda = -\alpha^2$, con $\alpha \geq 0$, para soluciones no triviales del problema de valores propios

$$X'' + \alpha^2 X = 0,$$

Sea

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación de Laplace se obtiene

$$X'' - \lambda X = 0, \qquad Y'' + \lambda Y = 0.$$

Como las condiciones de frontera son homogéneas en $x = 0$ y $x = a$, se tiene $\lambda = -\alpha^2$, con $\alpha \geq 0$, para soluciones no triviales del problema de valores propios

$$X'' + \alpha^2 X = 0,$$

$$X'(0) = X'(a) = 0.$$

La solución general es

$$X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x).$$

La aplicación de las condiciones de frontera produce

$$B = 0, \qquad \alpha = \frac{n\pi}{a}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Por consiguiente,

$$X_n(x) = A \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

La solución de la ecuación para Y es

$$Y(y) = C\cosh(\alpha y) + D\sinh(\alpha y),$$

la cual puede escribirse en la forma

$$Y(y) = E\sinh\big(\alpha(y+F)\big),$$

donde

$$E = (D^2 - C^2)^{1/2}, \qquad F = \frac{\tanh^{-1}(C/D)}{\alpha}.$$

Aplicando la condición de frontera homogénea $Y(b) = 0$, obtenemos

$$Y(b) = E \sinh\big(\alpha(b + F)\big) = 0,$$

lo que implica

$$F = -b, \qquad E \neq 0,$$

para soluciones no triviales. Por lo tanto,

$$u(x, y) = \left(\frac{b - y}{b}\right) \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{a}(y - b)\right].$$

Ahora aplicamos la condición de frontera no homogénea restante para obtener

$$u(x,0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(-\frac{n\pi b}{a}\right).$$

Ahora aplicamos la condición de frontera no homogénea restante para obtener

$$u(x,0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(-\frac{n\pi b}{a}\right).$$

Como esta es una serie de cosenos de Fourier, los coeficientes vienen dados por

$$a_0 = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\,dx,$$

$$a_n = -\frac{2}{a\,\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\int_0^a f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Por tanto, la solución es

$$u(x,y) = \left(\frac{b-y}{b}\right)\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

donde

$$a_n^* = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,dx.$$

Por ejemplo, si

$$f(x) = x, \qquad 0 < x < \pi, \qquad 0 < y < \pi,$$

entonces (observe que $a = \pi$) se obtiene

$$a_0 = \pi,$$

$$a_n^* = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right], \qquad n = 1, 2, \ldots$$

y, por consiguiente, la solución es

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(\pi - y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] \frac{\sinh\big(n(\pi - y)\big)}{\sinh(n\pi)} \cos(nx).$$