Contenidos:

Introducción. Espacio muestral. Eventos. Conteo de puntos de muestra. Probabilidad de un evento. Definición clásica, frecuencial y axiomática. Regla de la suma. Eventos condicionados. Probabilidad para eventos condicionados. Eventos independientes. Regla de la multiplicación. Teorema de Bayes**.**

Introducción histórica

El estudio matemático de la probabilidad tiene su origen en el juego de azar. Fue una disputa entre jugadores en 1654 que llevó a dos famosos matemáticos franceses, Blaise Pascal y Pierre de Fermat al desarrollo del cálculo de probabilidades. Antoine Gombaud, caballero de Méré (un noble francés interesado en las no tan nobles cuestiones del juego y las apuestas) llamó la atención de Pascal con un problema surgido de un popular juego. Éste consistía en lanzar veinticuatro veces un par de dados. El desafío consistía en decidir si daba igual apostar a favor o en contra de la aparición de por lo menos un "doble seis" en los veinticuatro lanzamientos. De Méré creía que era ventajoso apostar a favor, pero sus cálculos le indicaban lo contrario. Este problema, entre otros planteados por de Méré, generó un fructífero intercambio epistolar entre Pascal y Fermat en el que se formularon por primera vez los principios fundamentales del cálculo de probabilidades. Dado las alusiones al juego de azar, el Cálculo de Probabilidades llegó a ser muy popular y se desarrolló rápidamente a lo largo del s. XVIII. Jakob Bernoulli y Abraham de Moivre fueron quienes más contribuyeron al mismo en ese período.
Pierre de Laplace, en 1812, introdujo una gran cantidad de nuevos conceptos y técnicas en su libre *Théorie analytique des probabilités*.
Diferentes definiciones de la Probabilidad se han dado a lo largo de todo esos siglos pero ninguna fue lo suficientemente rigurosa desde lo matemático y a la vez lo bastante amplia para alcanzar el mayor número de fenómenos como para desarrollar una teoría matemática de la probabilidad. Hubo que esperar hasta 1933 para que el matemático ruso Andréi N. Kolmogorov en su *Foundation of Probability Theory* diera la definición que se considera hoy la base de la teoría moderna; a ésta se la conoce como Definición axiomática.

Algunos conceptos previos.

Se desarrollarán algunas ideas, conceptos y herramientas que debemos conocer previamente para poder trabajar luego con probabilidades.

- **Experimento estadístico**: designado con la letra $\mathcal{E}$ es todo ensayo cuyos resultados no son predecibles sino que la observación de los mismos depende pura y exclusivamente del azar. Estos resultados son aleatorios y llamados **estocásticos**, frente a aquellos en los que el siguiente estado del sistema es predecible, llamados determinísticos.
- **Espacio muestral**: designado con la letra Ω es el conjunto de todos los resultados aleatorios generados por el experimento estadístico
- **Evento o suceso simple**: es cada uno de los resultados individuales que conforman el espacio muestral
- **Evento o suceso** (a secas): designado con letras mayúsculas A, B, C…, es cualquier subconjunto de Ω formado por los eventos o sucesos simples. Puede enunciarse por comprensión y/o extensión.
- **Complemento de un evento A (o evento complementario)**: designado con $\overline{A}$, son todos aquellos resultados Ω que no pertenecen a A, de tal forma que $\overline{A} = \Omega - A$
- **Operaciones entre eventos o sucesos:**

  - Unión entre dos o más conjuntos. Sean $A,B \in \Omega$ se define la unión $\cup$ como la observación de A **o** de B o de ambos, si fuera posible, tal que $(A \cup B) \in \Omega$

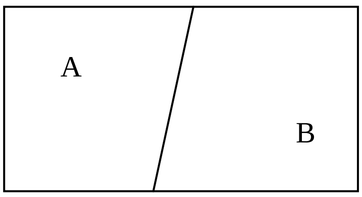
- Intersección entre dos o más conjuntos. Sean $A,B \in \Omega$ se define la intersección $\cap$ como la observación de A **y** de B, tal que $(A \cap B) \in \Omega$

Como se ve, el espacio muestral y los eventos son conjuntos, por lo que indicaremos la cantidad de elementos que los conforman con el símbolo # (cardinal del conjunto)
La representación gráfica de un espacio muestral y eventos se realiza mediante un rectángulo que contiene a diagramas de Venn (tantos como eventos representemos). En algunos casos, en lugar de diagramas de Venn se recurre a divisiones del rectángulo (llamadas particiones del espacio muestral)

Algunos ejemplos.

$\mathcal{E}_1$: se lanza un dado legal
$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ (notar que los eventos o sucesos simples son 1, 2,…,6) ; $\#\Omega_1=6$. El símbolo # se lee como "cardinal del conjunto"
Algunos eventos o sucesos
A: "obtener un resultado par cuando se lanza un dado legal" (enunciado por comprensión)
$A = \{2,4,6\}$ (enunciado por extensión); $\#A = 3$
B: "obtener un resultado impar cuando se lanza un dado legal" (enunciado por comprensión)
$B = \{1,3,5\}$ (enunciado por extensión); $\#B = 3$
$A \cup B$: "obtener un resultado par **o** impar cuando se tira un dado legal"
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega_1$
$A \cap B$: "obtener un resultado impar y par cuando se tira un dado legal" Vemos que aquí no se puede enumerar resultado alguno para este evento pues no es posible observar en el mismo instante un resultado par e impar al lanzar un dado. Cuando esto ocurre se indica que el conjunto es vacío $\emptyset$
Así, $A \cap B = \emptyset$ y $\#\emptyset = 0$
$\overline{A} = \{1,3,5\} = B$
$\overline{B} = \{2,4,6\} = A$

Representación gráfica



Ω

Aquí los eventos son particiones del espacio muestral (eventos disjuntos de a pares)
¿Cómo se **interpretan** la unión e intersección **en el contexto** del experimento?
De acuerdo a la definición la unión es la observación de A o B o ambos si fuera posible. Esto es, observar un resultado par o impar cuando se lanza el dado. Siempre observaremos uno u otro (no es posible no obtener un resultado) y puede verse como la unión de ellos es Ω. ¿Pueden observarse ambos? Por ambos se entiende simultáneamente. Como no es posible observar un resultado par e impar al mismo tiempo, su intersección es $\emptyset$. De aquí se dará la siguiente definición:

Sean A, B tales que $A, B \in \Omega$ y $A \cap B = \emptyset$ se dice que A y B son sucesos mutuamente excluyentes.

$\mathcal{E}_2$: se lanzan dos dados legales

$\Omega_2 = \{(1,1); (1,2); (1,3) \cdots (2,2) \cdots (4,5) \cdots (6,6)\}$ [notar que los eventos o sucesos simples son ahora los pares (a,b) donde la primer componente, a, pertenece al primer dado y la segunda componente, b, pertenece al segundo dado] ; $\#\Omega_2=36$

Algunos eventos o sucesos

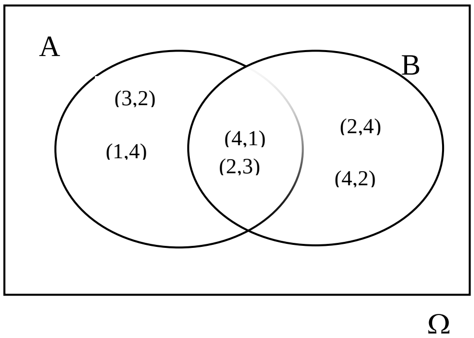
A: “obtener una suma igual a 5 cuando se lanzan dos dados legales” (enunciado por comprensión)

$A = \{(2,3); (3,2); (4,1); (1,4)\}$ (enunciado por extensión); $\#A = 4$

B: “obtener una suma 5, cuya primer componente sea par, y una suma 6, de componentes pares, cuando se lanzan dos dados legales” (enunciado por comprensión)

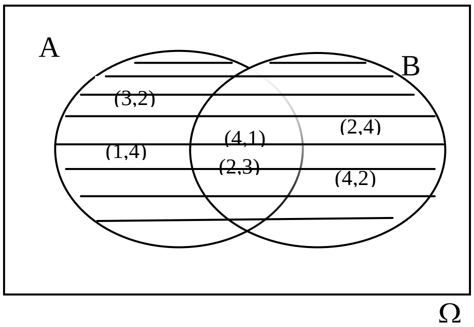
$B = \{(2,3); (4,1); (2,4); (4,2)\}$ (enunciado por extensión); $\#B = 4$

Representación gráfica

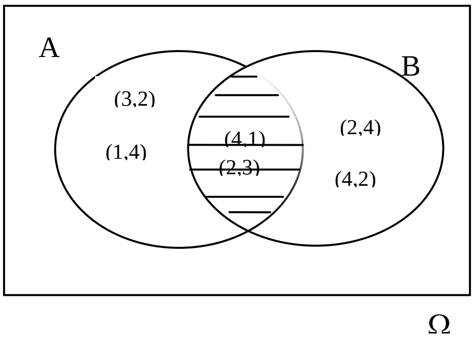


A diferencia del primer experimento, no todos los resultados están en A o B. Aquellos que no están definidos en A o B son el resto de los pares que pertenecen a Ω pero que no se encuentran en aquéllos.

$A \cup B = \{(2,3); (3,2); (4,1); (1,4); (2,4); (4,2)\}$



$A \cap B = \{(4,1); (2,3)\}$



$\mathcal{E}_3$: se lanzan tres monedas legales (identificando con c a la cara y x a la cruz)

Ω_3= {(ccc); (ccx); (cxc); (xcc); (cxx); (xcx); (xxc); (xxx)} [notar que los eventos o sucesos simples son ahora las ternas (a,b,c) donde la primer componente, a, pertenece a la primera moneda, la segunda componente, b, pertenece a la segunda moneda y la tercer componente, c, pertenece a la tercera moneda] ; $\#\Omega_3=8$

Algunos eventos o sucesos

A: "obtener exactamente dos caras cuando se tiran tres monedas legales" (enunciado por comprensión)

A = {(ccx); (cxc); (xcc)} (enunciado por extensión); $\#A = 3$

B: "obtener exactamente una cara cuando se tiran tres monedas legales" (enunciado por comprensión)

B = {(cxx); (xcx); (xxc)} (enunciado por extensión); $\#B = 3$

Algunas observaciones.

1. Se ha utilizado la expresión "legal" en todos los casos para garantizar la aleatoriedad de los resultados, es decir, que se trata de dados, monedas, etc. que no están "trucados"
2. Tanto en $\mathfrak{S}_2$ como en $\mathfrak{S}_3$ es lo mismo lanzar un dado dos veces o una moneda tres veces, respectivamente, en lugar de lanzar verdaderamente dos dados y tres monedas. Esto es así porque solamente podremos decir que observamos un suceso simple cuando hayamos tirado dos veces el dado en $\mathfrak{S}_2$ y tres veces la moneda en $\mathfrak{S}_3$
3. Tanto $\#\Omega$ como #A, #B,…pueden ser números muy grandes si, por ejemplo, lanzáramos más que dos dados o tres monedas. No es necesario conocerlos a todos, **pero sí lo es poder contarlos**. Las técnicas para poder enumerar los resultados de espacios muestrales extensos se conoce como **Conteo de puntos de muestra** y se dan algunas fórmulas al final del apunte en el Apéndice

Probabilidad

La probabilidad ocupa un lugar muy importante en la vida diaria. Se extiende más allá de los juegos de azar y abarca campos (siempre asociados al azar) como la predicción del clima, los negocios, la investigación científica, etc. En todos ellos se dan fenómenos aleatorios, es decir no determinísticos, al no ser capaces de establecer fehacientemente el estado posterior de cualquiera de estos sistemas después de realizar el experimento estadístico; tan solo podemos realizar un pronóstico, una predicción de la evolución de los mismos y asignar a esa predicción un número. Así, puede decirse que la Probabilidad es UNA CUANTIFICACIÓN DE NUSTRA INCERTIDUMBRE

I. DEFINICIÓN CLÁSICA o REGLA DE LAPLACE **(a priori)**

Dado un espacio muestral con sucesos elementales equiprobables y mutuamente excluyentes, la probabilidad de un suceso A es el cociente entre la cantidad de casos favorables (cardinal de A) y la cantidad de casos posibles (cardinal de Ω):
Simbólicamente:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Observaciones:

- Esta definición es *a priori* porque no es necesario realizar el experimento para calcularla; es decir, es *anterior* a la experiencia.
- Una limitación de esta definición es que los **sucesos** intervinientes deben ser **equiprobables**, (todos deben tener la misma probabilidad de ocurrir) además de ser mutuamente **excluyentes**, es decir, que no pueden ocurrir al mismo tiempo, como las caras de una

moneda o de un dado. No siempre los experimentos estadísticos generan sucesos equiprobables ni/o mutuamente excluyentes, con lo que los casos en los que se puede utilizar esta definición son reducidos.

Así, para algunos de los experimentos desarrollados en la primera sección, se tendrá:

$\mathcal{E}_1$: se lanza un dado legal
$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$; $\#\Omega_1 = 6$
A: "obtener un resultado par cuando se lanza un dado legal"
$A = \{2,4,6\}; \#A = 3$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

Leemos este resultado como "la probabilidad de obtener un resultado *par* cuando se lanza un dado legal es 0,5"

B: "obtener un resultado impar cuando se lanza un dado legal"
$B = \{1,3,5\}; \#B = 3$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

Leemos este resultado como "la probabilidad de obtener un resultado *impar* cuando se lanza un dado legal es 0,5"

$A \cup B$: "obtener un resultado par **o** impar cuando se tira un dado legal"
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega_1$
$\#(A \cup B) = 6$

$$P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} = \frac{6}{6} = 1 = 100\%$$

O sea:

$$P(\Omega_1) = 1 = 100\%$$

Leemos este resultado como "la probabilidad de obtener un resultado *par* o *impar* cuando se lanza un dado legal es 1" (Volveremos sobre este resultado después)

$A \cap B$: "obtener un resultado impar **y** par simultáneamente cuando se tira un dado legal"
$A \cap B = \emptyset$
$\#(A \cap B) = \#\emptyset = 0$

$$P(A \cap B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega} = \frac{0}{6} = 0$$

O sea:

$$P(\emptyset) = 0 = 0\%$$

Leemos este resultado como "la probabilidad de obtener un resultado im*par* y *par* al mismo tiempo cuando se lanza un dado legal es 0" (Volveremos sobre este resultado después)

¿Cuál es la probabilidad de obtener un "6" cuando se tira un dado?
C: "obtener un 6 cuando se lanza un dado legal" (recordar que "6" es un suceso simple)
$C = \{6\}; \#C = 1$

$$P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{1}{6}$$

Este resultado será el mismo para cualquiera de los otros sucesos simples del espacio muestral resultante de este experimento

Si el experimento consiste en lanzar una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener una cara? ¿Y una cruz?
$\Omega = \{c,x\}$; $\#\Omega=2$
C: "obtener una cara cuando se lanza una moneda"
$C = \{c\}$; $\#C = 1$
X: "obtener una cruz cuando se lanza una moneda"
$X = \{x\}$; $\#X = 1$

$$P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{1}{2}$$

$$P(X) = \frac{\#X}{\#\Omega} = \frac{1}{2}$$

Este resultado es intuitivo pues parece lógico que obtener una cara tenga no sólo la misma probabilidad que una cruz sino también que sea "50 y 50" (ya que, siendo estos dos resultados los únicos posibles y la moneda se comporta "legalmente", no hay otra posibilidad que 0,5 para cada uno)

$\mathcal{E}_3$: se lanzan tres monedas legales
$\Omega_3 = \{(ccc); (ccx); (cxc); (xcc); (cxx); (xcx); (xxc); (xxx)\}$; $\#\Omega_3=8$
A: "obtener exactamente dos caras cuando se tiran tres monedas legales"
$A = \{(ccx); (cxc); (xcc)\}$; $\#A = 3$
B: "obtener exactamente una cara cuando se tiran tres monedas legales"
$B = \{(cxx); (xcx); (xxc)\}$; $\#B = 3$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

Este resultado ya no es tan intuitivo como el anterior pues hasta que se calculó, resultaba quizás inesperado que "obtener exactamente una cara" tuviera la misma probabilidad que "obtener exactamente dos caras" cuando se lanzan tres monedas.

Un caso más. El full house de ases en el póker consiste en tres ases y dos cartas cualesquiera en una mano de cinco cartas de la baraja inglesa. a) ¿Cuán probable es obtener un full house de ases en una partida de póker? b) ¿Cuán probable es obtener un full house de ases y cuatros en una partida de póker?

a) Ω: "todas las diferentes manos de cinco cartas que puede tocarle a un jugador en una partida de póker"
   A: "obtener tres ases en una mano de cinco cartas de póker"

$$\#A = C_{4,3} \cdot C_{48,2} = \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2} = 4.512$$

$$\#\Omega = C_{52,5} = \binom{52}{5} = 2.598.960$$

   Entonces:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} \cong 1{,}7 \times 10^{-3}$$

b) En (a) las restantes cartas de la mano podían ser cualesquiera de las 48 restantes del mazo, pero en este caso deben ser únicamente cuatros, por lo que

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\#\mathrm{A}}{\#\Omega} = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{48}{0}}{\binom{52}{5}} \cong 9 \times 10^{-6}$$

El número combinatorio $C_{48,0}$ no es relevante pues da 1, sin embargo se lo ha escrito para dar consistencia a la formación del numerador.
Ambos resultados son extremadamente pequeños, virtualmente cero. Esto quiere decir que es esperable observar dichas manos en juegos de póker muy rara vez (pero una probabilidad cero o cercana a cero **no significa imposibilidad** pues dicha afirmación sería determinística, contradiciendo el postulado de aleatoriedad sobre el cual se trabaja)

Observaciones.

1. Puede verse que no fue necesario lanzar dados, monedas ni cartas para conocer el espacio muestral y sus sucesos por lo que las probabilidades asociadas pudieron ser calculadas *a priori* (sin necesidad de realizar efectivamente el experimento)
2. Todos estos ejemplos cumplen con las condiciones de igual probabilidad de ocurrencia (equiprobables). Vemos que todas las caras del dado tienen la misma probabilidad de ser observadas (1/6), los resultados pares e impares tienen la misma probabilidad (1/2), una cara en una moneda tiene la misma probabilidad que una cruz (1/2 respectivamente). También se observa que son mutuamente excluyentes pues no es posible observar simultáneamente una cara y una cruz cuando se lanza una moneda, un resultado par y uno impar cuando se tira un dado, etc.

¿Qué podemos interpretar cuando, por ejemplo, vemos que la probabilidad de obtener una cara al arrojar una moneda es 1/2? La **interpretación correcta** es que “es acertado *esperar* que uno de cada dos lanzamientos de la moneda terminen en el resultado ‘cara’”
¿Quiere esto decir que si realizamos dos lanzamientos de la moneda veremos una vez cara y otra vez cruz, en cuatro lanzamientos veremos dos caras y dos cruces, y así sucesivamente.? Esto no es necesariamente así pues, si pudiéramos afirmarlo, estaríamos contradiciendo el supuesto de aleatoriedad de nuestro experimento estadístico. Nada impide que en dos lanzamientos observemos dos cruces o dos caras, en cuatro lanzamientos tres caras y una cruz, etc. ¿Contradice la experiencia los resultados previstos por esta definición de probabilidad entonces? **Tampoco**.
Para entender mejor las razones detrás de estas aparentes contradicciones avanzaremos en la siguiente definición de probabilidad.

II. <u>Definición frecuencial</u> **(a posteriori)**

Ahora la probabilidad aparece como **resultado de muchos ensayos o pruebas**, siempre bajo las mismas condiciones, y sin poder calcularla con anterioridad, ya sea por desconocerse la manera de actuar de las causas que originan el fenómeno, ya sea por ser éstas demasiado numerosas o complicadas.

Si se realiza *n* veces un experimento y se observa *k* veces el suceso que nos interesa (por ejemplo, suceso A) se define la probabilidad del suceso A entonces como el cociente entre la “cantidad de veces que se *observa* dicho suceso, *k*, y la cantidad de veces que se *realiza el experimento, n*”
Simbólicamente:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{k}{\mathrm{n}} = f_r$$

La frecuencia absoluta k con la que observamos el suceso dividida la cantidad de veces n que se realiza el experimento es lo que conocemos como frecuencia relativa fr.
La probabilidad definida así es entonces una proporción, tomada como la cantidad de veces que esperamos que se repita el suceso sobre el total de veces que realicemos el experimento, siempre que el experimento pueda reproducirse bajo las mismas condiciones. **Es necesario realizar el experimento** para luego calcular la probabilidad del suceso (**a posteriori**)
Como se dijo, esta definición de probabilidad es muy útil cuando no se conoce a priori los resultados de la misma sino hasta realizar el experimento una cantidad relativamente grande de veces. Pero principalmente, esta definición no le impone a los sucesos sobre los que se calcula las condiciones arbitrarias de ser equiprobables y mutuamente excluyentes, independientemente de que en la práctica puedan cumplirlas alguna o ambas.

Ejemplo.

Una persona frecuenta el hipódromo local realizando apuestas todos los domingos. De entre todos los caballos le gusta uno en particular que, de las últimas 15 carreras, ha ganado 9. Si bien no es el que más ha ganado, aunque sí está entre los primeros, cree que tiene buenas chances de ganar cualquier domingo (aquí es imposible eliminar completamente el factor subjetivo sobre el cual el apostador toma su decisión, pero decidiremos ignorarlo; esta consideración de la subjetividad da paso a toda una rama de la Probabilidad llamada probabilidad bayesiana)
Vemos que los sucesos "que gane tal o cual caballo" no son equiprobables, pues no es realista pensar que todos los caballos tienen la misma posibilidad de ganar. Sin embargo en este caso sí son mutuamente excluyentes pues, como es lógico, no pueden ganar simultáneamente dos (o más) caballos. De todas maneras, ya no se cumple una de las condiciones que eran obligatorias en la definición clásica.
Entonces, siendo $k = 9$ y $n = 15$ y A: "que gane la carrera cierto caballo en particular" se tiene:

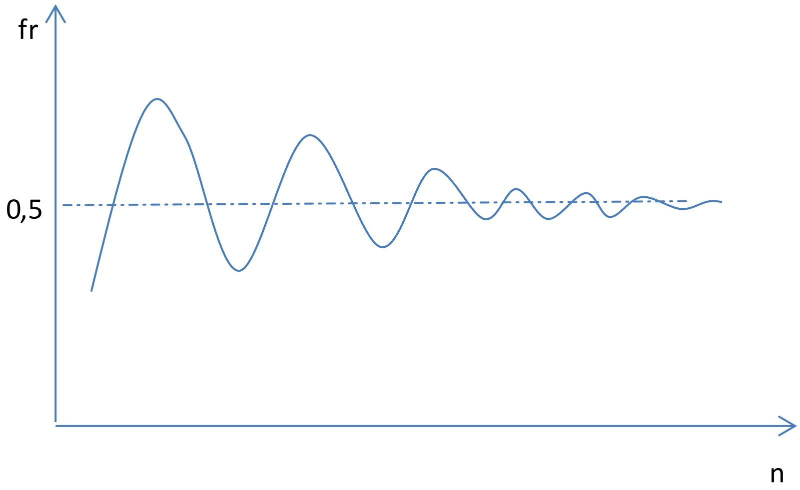
$$\mathrm{P(A)} = \frac{k}{\mathrm{n}} = \frac{9}{15} = 0{,}6$$

El apostador debe esperar que alrededor del 60 por ciento de las veces gane "su" caballo la carrera, siempre que lo jinetee el mismo jockey y corra en la pista bajo las mismas condiciones.

¿Podríamos haber utilizado esta definición para calcular, por ejemplo, la probabilidad de observar una cara cuando tiramos una moneda? Si así lo hubiésemos hecho, tendríamos que haber tenido mucho cuidado con el número n de veces que realizamos el experimento pues en el caso de tirar sólo dos veces la moneda (y que hubiésemos observado dos cruces, por ejemplo) habríamos llegado a la apresurada conclusión de que la probabilidad de observar una cara es cero; o si hubiésemos tirado cuatro veces la moneda, observando tres caras y una cruz, habríamos concluido, también apresuradamente, que la probabilidad es 3/4. Sabemos que estos sucesos descriptos son posibles pero algo nos dice que sus probabilidades así calculadas no están bien.
En concreto, no podemos esperar que la probabilidad de observar una cara se ajuste a lo que entendemos como lógico, esto es una de cada dos veces, sólo por lanzar dos o cuatro veces la moneda, ni diez ni veinte. ¿Pero si hacemos n tan grande como podamos? Es decir, 100, 1.000 veces, o más. Entonces sí veremos (y las experiencias lo confirman) que alrededor del 50 por ciento de las veces, en una gran cantidad de lanzamientos, se observa que la moneda cae "cara".
Podemos entonces formular la siguiente relación:
Si la cantidad de ensayos n se repite un gran número de veces y se calcula la probabilidad frecuencial p_f*, veremos que esta tiende a coincidir con la probabilidad teórica* p_t*, calculada a priori*.
Simbólicamente:

$$\begin{gathered} p_f \to p_t \\ n \to \infty \end{gathered}$$

Gráficamente, para el experimento de lanzar *n* veces una moneda:



Como ya se anticipó en la introducción, estas definiciones, si bien son operativas y utilizadas en la práctica para calcular probabilidades sobre sucesos en experimentos a priori o posteriori, no están formalmente formuladas. La siguiente definición encuadra formalmente a la Probabilidad dentro de la Matemática.

<u>Axiomas de probabilidad</u>:

$$P(A) \geq 0$$
$$P(A) \leq 1$$
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$P(\Omega) = 1$$
$$P(\emptyset) = 0$$

III. <u>Reglas para el cálculo de probabilidades</u>

En forma práctica, se utilizan dos reglas muy útiles para el cálculo de probabilidades para eventos, las cuales tienen que ver con si la relación entre ellos es la unión ∪ o la intersección ∩.

1) <u>Regla de la suma</u>

Para la unión de dos eventos. Sean $A \in \Omega \wedge B \in \Omega$ para calcular la probabilidad de la unión de ambos, se deberá contestar a la pregunta de si son ambos disjuntos (mutuamente excluyentes)

a) $A \cap B = \emptyset$ (es decir, *A* y *B* son mutuamente excluyentes). Entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

b) $A \cap B \neq \emptyset$ (es decir, *A* y *B* no son mutuamente excluyentes). Entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Como se ve, estas son propiedades de la Probabilidad como medida de aditividad finita ya vistas.
Así, cuando $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$

2. <u>Regla de la multiplicación</u>

Esta regla se aplica en el caso de probabilidades para la intersección de eventos de un espacio muestral. Previamente se darán algunas definiciones necesarias.

Eventos condicionados. Sean A y B eventos de un espacio muestral Ω. Un evento especial surge de considerar la ocurrencia de uno cualquiera de ellos condicionada a la ocurrencia del otro.
Este evento especial se denota:

A/B

y se lee: "se observa el evento A habiendo ocurrido previamente el evento B" o "se observa el evento A **si** ocurrió previamente B" o simplemente "A dado B"
Al evento B se le llama *condicionante* y el orden puede ser el inverso, con lo que el condicionante sería A.

Probabilidad de eventos condicionados. Para $A \cap B \neq \emptyset$ por definición tenemos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Análogamente,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Donde $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$ respectivamente.

Independencia entre eventos. Sean A y B dos eventos que pertenecen a Ω,

$$P(A/B) = P(A) \Leftrightarrow A \text{ y } B \text{ son independientes}$$

Análogamente,

$$P(B/A) = P(B) \Leftrightarrow A \text{ y } B \text{ son independientes}$$

Esto es, si la observación del evento A no se ve alterada por la ocurrencia previa del evento B (ni viceversa) entonces la probabilidad de observar A habiendo ocurrido B es la misma que la probabilidad de A solo (la ocurrencia de B no altera las probabilidades de A)

Regla de la multiplicación para dos eventos: Sean $A \in \Omega \wedge B \in \Omega$, para calcular la probabilidad de la intersección de ambos, se deberá contestar a la pregunta de si son ambos independientes.

a) A y B son independientes. Entonces

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A/B) \cdot P(B) \\ &= P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

b) A y B no son independientes. Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

o también

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

Nótese que en cada caso la probabilidad de “A intersección B” se ha obtenido despejando de la definición de probabilidad para eventos condicionados y en el caso de independencia de eventos se ha hecho uso de la implicación a izquierda

Ejemplos.

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres caras en tres lanzamientos seguidos de una moneda?

Sea el evento C_i: “obtener una cara en el i-ésimo lanzamiento”, con i=1,2,3; entonces deseamos calcular $P(C_1 \cap C_2 \cap C_3)$
Es razonable suponer la independencia de los resultados en cada lanzamiento y además, por definición clásica de probabilidad (a priori) la probabilidad de obtener una cara en cada lanzamiento es P(C)=1/2. Entonces:

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1) \cdot P(C_2) \cdot P(C_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres cartas seguidas que sean entre un dos y un seis, de una baraja inglesa, cuando se reparten tres del pozo sin reposición?

Sea el evento A_i: “obtener una carta de la baraja inglesa entre 2 y 6 en la i-ésima extracción” con i=1,2,3. En la baraja inglesa hay cuatro colores (corazón, diamante, trébol y pique) con trece cartas cada uno y nos interesan aquellos resultados que van del dos al seis en cada grupo. Además las sucesivas extracciones se harán sin reemplazo (pero siempre aleatoriamente) con lo que quedará una carta menos en el mazo después de cada una, condicionando así las siguientes.
Entonces
#A=20; #Ω=52

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{20}{52} \cdot \frac{20}{52} \cdot \frac{20}{52} = 0{,}05689$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/(A_1 \cap A_2))$$

$$= \frac{20}{52} \cdot \frac{19}{51} \cdot \frac{18}{50} \cong 0{,}0516$$

Notar que si las extracciones se hubiesen realizado con reemplazo (devolviendo cada carta al mazo) las mismas habrían sido independientes y el cálculo se reduciría a multiplicar 20/52 por sí mismo tres veces. El resultado final no es muy distinto (0,0569 aprox.) pero pone de manifiesto, aunque sea por muy poco, la influencia en las siguientes extracciones del hecho de no devolver la carta al mazo. Esto es así porque la ausencia de una carta en las primeras extracciones es menor al principio, pero si hubiésemos seguido extrayendo sin reposición en más intentos esta influencia empezaría a ser notable.

3. Se realizó una encuesta a doscientas cincuenta personas las cuales respondieron si tenían empleo formal en ese momento y si votarían cierta propuesta para combatir el desempleo de cierto candidato en las próximas elecciones. Los resultados son los que se muestran a continuación (se identifica el evento correspondiente con letra mayúscula)

	A favor (F)	En contra (C)	
Empleado (E)	70	40	110
Desempleado (D)	50	90	140
	120	130	250

¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar en la muestra esté desempleada **y** en contra de la propuesta? ¿Son estos eventos estadísticamente independientes?

$$P(D \cap C) = \frac{90}{250} = 0{,}36$$

Esto es así porque solamente hay 90 personas entre las 250 de la muestra que reúnen simultáneamente las características D (desempleo) y C (está en contra de la propuesta).
Sin embargo, tratándose de la probabilidad para la intersección de dos eventos, podemos utilizar la regla de la multiplicación. Mientras no estemos seguros de que son independientes (y podamos probarlo rigurosamente) deberemos usar la regla en su versión 2.1.b. Entonces:

$$P(D \cap C) = P(D/C) \cdot P(C) = \frac{90}{130} \cdot \frac{130}{250} = \frac{90}{250} = 0{,}36$$

$$P(D/C) = \frac{90}{130}$$

$$P(D) = \frac{140}{250}$$

$$P(C) = \frac{130}{250}$$

$$P(D \cap C) = P(C/D) \cdot P(D) = 0{,}36$$

[También se puede utilizar la relación $P(C/D) \cdot P(D)$]

Este resultado es correcto y llegamos a él evitando asumir la independencia entre los eventos. De haberlo hecho, la probabilidad obtenida sería:

$$P(D \cap C) = P(D) \cdot P(C) = \frac{140}{250} \cdot \frac{130}{250} = \frac{182}{625} = 0{,}2912 \neq 0{,}36$$

Puede verse entonces que hubiese sido incorrecto asumir la independencia estadística entre ambos eventos y de hecho no lo son.

$$P(D \cup C) = P(D) + P(C) - P(D \cap C) = \frac{140}{250} + \frac{130}{250} - \frac{90}{250} = \frac{180}{250}$$

Existe otra definición de probabilidad, la **definición axiomática**. Esta no contradice ni corrige a las anteriores, es solamente una formalización matemática rigurosa de la probabilidad como una función definida en un conjunto algebraico, llamado álgebra de sucesos, que cumple propiedades especiales y que está conformado por Ω y las partes del mismo, es decir los eventos o sucesos. En este conjunto se cumplen axiomas sobre los sucesos y axiomas sobre la probabilidad de los mismos.
Estos últimos son

$$P(A) \geq 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

De estos dos se deduce que $0 \leq P(A) \leq 1$

$$P(\emptyset) = 0$$

Sin importar con qué definición de probabilidad estamos trabajando (si clásica o frecuencial) estos axiomas nunca deben incumplirse (por ejemplo ¡¡¡nunca una probabilidad puede dar más de uno!!!)

Probabilidades bayesianas

Un famoso y muy utilizado teorema, el Teorema de Bayes, emplea probabilidades llamadas subjetivas y, como ya se mencionó antes, da pie a toda una rama de la estadística llamada bayesiana. Esto no está libre de controversia entre los seguidores de la estadística tradicional quienes sólo admiten probabilidades basadas en experimentos repetibles y que tengan una confirmación empírica. Sin embargo es ampliamente aceptado y aplicado en diversas áreas como Medicina (la detección de falsos positivos en los test, por ejemplo), en la informática (los clasificadores bayesianos son frecuentemente usados en implementaciones de filtros de correo basura o spam), etc.
Alrededor de 1700 el reverendo Thomas Bayes, un ministro presbiteriano y matemático inglés, desarrolló un procedimiento formal con el fin de utilizar información adicional para revisar probabilidades. En esencia el teorema nos indica **cómo debemos modificar nuestras probabilidades previas sobre los sucesos de un espacio muestral cuando recibimos información adicional de un experimento**.

Empezaremos con una situación ficticia para explicarlo, la resolveremos en forma particular y luego haremos la generalización para enunciar y demostrar el teorema.

Un ingeniero jefe de la línea de producción de una fábrica debe poner a punto todos lunes la máquina para producir durante la semana (los fines de semana se la detiene para mantenimiento preventivo). Esta puesta a punto es compleja e insume mucho tiempo e incluye dos tareas críticas: la preparación propiamente dicha y la revisión de dicha reparación antes de comenzar.

DATOS:

Revisando los datos de la máquina recogidos durante un tiempo determinado ha podido determinar lo siguiente:

1. La máquina se pone a punto correctamente el 70% de las veces.
2. La máquina, **si** se ha puesto a punto correctamente, produce partes buenas el 95% de las veces. En caso contrario, produce partes buenas sólo el 40% de las veces.

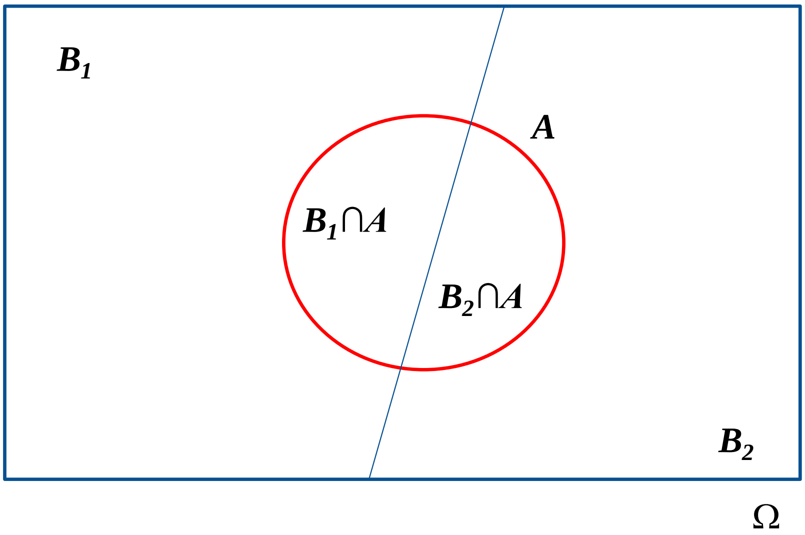
Problema que esta situación plantea

El ingeniero jefe de línea desearía no perder tanto tiempo al inicio del ciclo por lo que se pregunta si hay una manera de saltear el paso de la revisión. Para ello decide, luego de la puesta a punto, hacer una corrida de producción y tomar al azar una pieza terminada, resultando que dicha pieza está bien fabricada. **¿Qué probabilidad habrá de que la máquina haya sido puesta a punto correctamente?** Si esta probabilidad fuera suficientemente alta el jefe de línea podría fundamentar una decisión arriesgada de no tener que cumplir con la segunda etapa del proceso, la de revisión, y así no perder tanto tiempo.

Definamos los eventos que surgen de esta situación

1. Ω: Todas las piezas fabricadas por la máquina.
2. B_1: La máquina se pone a punto correctamente el 70% de las veces.
3. B_2: La máquina se pone a punto incorrectamente el 30% de las veces.
4. A: La máquina fabrica piezas correctamente.
5. D: La máquina produce piezas defectuosas.

Hagamos una representación gráfica



Planteemos el problema simbólicamente

El ingeniero desea saber cuál es la probabilidad de que la máquina haya sido puesta a punto correctamente *si*, habiendo seleccionado aleatoriamente una pieza ésta resultó bien fabricada. Esta es una probabilidad condicionada que expresaremos

$$P(B_1/A) \; [1]$$

Por definición

$$= \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} \; [2]$$

Encontraremos P(A) a partir de cómo hemos definido los eventos, ayudándonos con su representación gráfica.

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \qquad [3]$$
$$P(A) = P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A)] \qquad [4]$$
$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) \qquad [5]$$
$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) \; [6]$$

[3] A es la unión de los dos conjuntos formados por las intersecciones entre el mismo A y B_1 y B_2
[4] Escribimos “probabilidad” en el miembro de la izquierda y en el de la derecha para mantener la igualdad
[5] Por Regla de la Suma para eventos mutuamente excluyentes
[6] Por Regla de la Multiplicación, en su forma general.

En [6] por definición también puede escribirse $P(A) = P(A) \cdot P(B_1/A) + P(A) \cdot P(B_2/A)$ pero no es útil porque P(A) es justamente nuestra incógnita.
Por otro lado, si recordamos lo descripto en la situación original “La máquina, **si** se ha puesto a punto correctamente, produce partes buenas el 95% de las veces. En caso contrario, produce partes buenas sólo el 40% de las veces” estos datos no son otros que:

$P(A/B_1) = 0{,}95 \rightarrow P(D/B_1) = 0{,}05$
$P(A/B_2) = 0{,}40 \rightarrow P(D/B_2) = 0{,}60$

Además, como el 70% de las veces la máquina se pone a punto correctamente y, por lo tanto, el 30% de las veces no, entonces:

$P(B_1) = 0{,}70$
$P(B_2) = 0{,}30$

Así, en [6] obtenemos

P(A) = 0,70·0,95+0,30·0,40 = 0,785

Este número, como bien lo indica su planteo simbólico, expresa la probabilidad de encontrar una pieza bien fabricada, sin importar en qué condiciones de puesta a punto se encuentra la máquina (si bien o mal). A este resultado se lo conoce como **Probabilidad Total** y su formalización matemática se dará dentro del desarrollo del Teorema de Bayes.

Entonces, $P(B_1 \cap A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) = 0{,}70 \cdot 0{,}95 = 0{,}665$, por [6]

Finalmente, en [1] y [2]:

$$P(B_1/A) = \frac{0{,}665}{0{,}785} \cong 0{,}847$$

¿Qué le dice este resultado al ingeniero? Recordemos que el 70% de las veces la máquina se pone a punto correctamente; por lo que él puede decir que hay una probabilidad de 0,70 de que la máquina esté puesta a punto correctamente (probabilidad frecuencial). Pero a la luz de una evidencia posterior, que es una pieza correctamente fabricada elegida aleatoriamente, esta probabilidad se ha modificado; en este caso ha aumentado a 0,85 aproximadamente, por lo que el ingeniero puede argumentar que es razonable suponer que la operación de puesta a punto fue exitosa y que es razonable no efectuar el paso de la revisión.

TEOREMA DE BAYES.

Hipótesis: sea $\{B_1, B_2, B_3 \cdots B_n\}$ un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos, tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero. Sea *A* un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(A/B_i)$, $i = 1,2, \cdots n$; y no mutuamente excluyente con B_i. Simbólicamente:

1. $B_i \cap B_j = \emptyset \; \forall i \neq j$
2. $B_i \cap A \neq \emptyset; i = 1,2 \cdots n$

Tesis:

$$P(B_r/A) = \frac{P(B_r)P(A/B_r)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)};\; r: r \leq n$$

donde $P(A) > 0$

Demostración:

Para *n* particiones del espacio muestral que cumplen con H_1 y H_2, el evento *A* puede escribirse como:

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \cdots \cup (B_n \cap A) \; [1]$$

La probabilidad de ocurrencia de A viene dada por

$$P(A) = P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \cdots \cup (B_n \cap A)] \text{ [2]}$$

Por la Regla de la Suma para eventos mutuamente excluyentes, el miembro de la derecha de [2] es

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \cdots + P(B_n \cap A) \text{ [3]}$$

Cada término individual del miembro de la derecha en [3] es la probabilidad de la intersección de dos eventos no mutuamente excluyentes (por H_2) y por Regla de la Multiplicación para eventos dependientes

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \cdots + P(B_n)P(A/B_n) \text{ [4]}$$

Luego, utilizando notación de sumatoria

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i) \text{ [5]}$$

A [5] se lo conoce como Probabilidad Total, y es la probabilidad de ocurrencia del evento A independientemente de cuál de las B_i particiones de Ω ocurrió.

Escribimos ahora la probabilidad de que ocurra cualquier r–ésimo evento *B* de los *n* que conforman las particiones de Ω, habiendo ocurrido previamente *A*

$$P(B_r/A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)} \text{ [6]}$$

por definición de probabilidad para eventos condicionados, con $P(A) > 0$

El término del denominador en [6] es la Probabilidad Total y el del numerador es el r – ésimo término de la suma de los *n* que conforman *P*(*A*) en [4]. Por lo tanto

$$P(B_r/A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \cdots + P(B_n)P(A/B_n)}$$

$$P(B_r/A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)} \blacksquare$$

<u>Otro ejemplo</u>

En cierta fábrica, el total de la producción de cierta pieza está a cargo de tres máquinas, las cuales se reparten el 60%, 25% y 15% cada una. Cada una de ellas tiene un porcentaje de piezas falladas del 5%, 3% y 1% respectivamente.
Si el inspector de calidad va al depósito de las piezas terminadas y escoge una al azar:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que ésta sea defectuosa?
b) Si esta resultó defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de la máquina 3 sea responsable? ¿Y de la máquina 1 y 2?

Planteo de eventos y asignación de probabilidades

M_1: "Una pieza es fabricada por la máquina 1" → $P(M_1) = 0{,}60$
M_2: "Una pieza es fabricada por la máquina 2" → $P(M_2) = 0{,}25$
M_3: "Una pieza es fabricada por la máquina 3" → $P(M_3) = 0{,}15$

D: "Una pieza tiene defectos"

D/M_1: "La pieza es defectuosa dado que la fabricó la máquina 1" → $P(D/M_1) = 0{,}05$
D/M_2: "La pieza es defectuosa dado que la fabricó la máquina 2" → $P(D/M_2) = 0{,}03$
D/M_3: "La pieza es defectuosa dado que la fabricó la máquina 3" → $P(D/M_3) = 0{,}01$

Planteo simbólico de las preguntas del problema y resolución

a) P(D) $= P(M1) \cdot P(D/M1) + P(M2) \cdot P(D/M2) + P(M3) \cdot P(D/M3)$

P(D) = 0,6*0,05+0,25*0,03+0,15*0,01=0,039=3.9%

b) $P(M_3/D) = 0{,}038$

$$P(M3/D) = \frac{P(M_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}01}{0{,}039} = 0{,}0385$$

(Se ha empleado las fórmulas reemplazado directamente por sus valores. Queda para el estudiante expresarlas simbólicamente)

$P(M_1/D) = 0{,}7692$

$P(M_2/D) = 0{,}1923$

Queda para el estudiante resolver las últimas dos probabilidades. ¿Cuánto da la suma de las tres probabilidades del ítem b? ¿Es este resultado coherente con la teoría? ¿Por qué?

APÉNDICE

Conteo de puntos de muestra

A continuación se darán algunas técnicas para conocer la cantidad de resultados que pueden obtenerse a partir de experiencias aleatorias. Estas técnicas están basadas en el álgebra combinatoria

1. Muestreo con reposición

Si se tira una moneda, los resultados posibles son c (cara) y x (cruz), entonces el espacio muestral es

$\Omega_1 = \{c,x\}$; $\#\Omega_1=2^1$

Si se tiran dos monedas

$\Omega_2 = \{(cc),(cx),(xc),(xx)\}$; $\#\Omega_2=2^2 = 4$

Si se tiran tres monedas

$\Omega_3 = \{(ccc),(ccx),(cxc),(xcc),(cxx),(xcx),(xxc),(xxx)\}$; $\#\Omega_3=2^3 = 8$

Cada resultado, (cxc) por ejemplo, es una muestra ordenada con reposición, es decir que cada resultado posible c o x puede ocurrir nuevamente en cada lanzamiento. A esto se lo llama **variación simple**. En este último caso, se tienen dos resultados ordenados tres casillas en las que pueden repetirse en cada una de ellas cualquiera de los dos resultados.

En forma general, la cantidad de variaciones simples con repetición de una población de *m* resultados, de orden *n* se denota $V'_{m,n}$

$$V'_{m,n} = m^n \ (1)$$

"Cantidad de variaciones con reposición de m elementos de orden n"

2. Muestreo sin reposición

Si de un conjunto de *m* elementos se extraen *n* elementos sucesivamente (sin reposición), tal que $n \leq m$, entonces el producto de las *n* extracciones, sucesivas y decrecientes en una unidad a partir de *m*, se conoce como Variaciones simples sin reposición, de *m* elementos de orden *n* y que se denota $V_{m,n}$.

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdots\big(m-(n-1)\big)$$

Donde m es la primera extracción, (m – 1) es la segunda extracción, (m – 2) es la tercera extracción y [m – (n – 1)] es la n – ésima extracción.
Multiplicando y dividiendo por (m – n)!

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\frac{(m-n)!}{(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} \ (2)$$

"Cantidad de variaciones simples sin reposición"

Si en (2) se hace m = n, entonces se tiene el caso particular

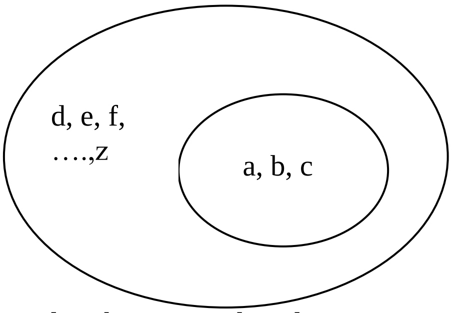
$$V_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$$\mathrm{P}_n = n! \ (3)$$

"Permutaciones simples de n elementos"

3. Combinaciones simples

Sea un conjunto de tamaño *m* y *r* un subconjunto de éste, tal que $r \leq m$



Por cada subconjunto de r elementos existen r! ordenamientos sin reposición. Por ejemplo:
Sea $\{a, b, c\}$; $\mathrm{r} = 3$
$V_{3,3} = \mathrm{P}_3 = 3! = 6$
Estos seis elementos son $\{(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a)\}$

Se define $c \cdot r! = V_{m,r}$ como la cantidad de ordenamientos sin reposición para formar todos los subconjuntos $V_{m,r}$
Así,

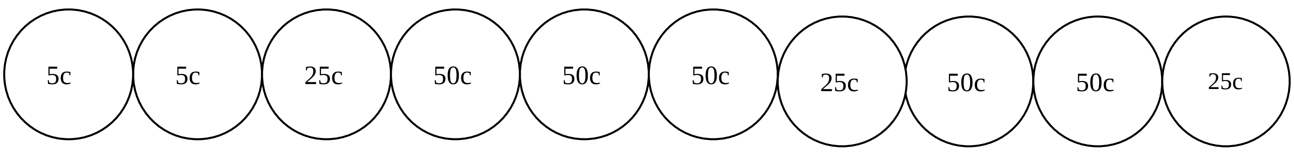
$$c = \frac{V_{m,r}}{r!} = \frac{m!}{(m-r)!\,r!}$$

$$\mathrm{C}_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!\,r!} = \binom{m}{r} \ (4)$$

"Cantidad de subconjuntos de tamaño *r* tomados de un conjunto de tamaño *m* llamados combinaciones simples de *m* elementos de orden *r*"

4. Permutaciones con repetición

Si se tienen diez monedas (2x\$0,05; 3x\$0,25 y 5x\$0,50), cada una indistinguible de la otra en cada categoría, y se las alinea, puede obtenerse la siguiente formación:



entre otras.
Intercambiar las dos primeras, por ejemplo, no implica diferencia alguna, dado que son indistinguibles. Entonces, las posibles formas de ordenar cada categoría son:

$\binom{10}{2}$ para las de \$0,05

$\binom{8}{3}$ para las de \$0,25 en las ocho posiciones que quedan, y

$\binom{5}{5}$ para las de \$0,50 en las cinco posiciones que quedan.

Entonces, por cada una de las $\binom{10}{2}$ existen $\binom{8}{3}$ y por cada $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3}$ existen $\binom{5}{5}$ permutaciones con repetición.
En total hay $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{5} = \frac{10!}{2!3!5!}$ maneras distintas de alinear las monedas

En general:

$$\mathrm{P}_m^{n_1, n_2 \cdots n_k} = \frac{m!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!} \quad (5)$$

"Cantidad de permutaciones con repetición de m elementos divididos en n_1, $n_2 \ldots n_k$ celdas"

Donde $n_1 + n_2 + \cdots n_k = m$
Ejemplos

1. ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con los números 1, 2, 3 y 4?
2. a) ¿Cuántos números de tres cifras **distintas** pueden formarse con los números 1, 2, 3, y 4? b) ¿Y cuántos de cuatro cifras?
3. a) ¿Cuántas formaciones de tres letras sin repetición pueden obtenerse con a, b, c, d? b) ¿Cuántos subgrupos de tres letras pueden obtenerse?
4. ¿De cuántas maneras pueden alinearse 10 personas, si tres cualesquiera deben estar juntas?
5. a) ¿Cuántas palabras de cuatro letras pueden armarse con JULIETA? (No deben repetirse letras, pero no es necesario que tengan sentido) b) ¿Cuántas empiezan con J?
6. ¿Ordenando los números 1 a 10 arbitrariamente, en cuántas alineaciones aparecen 1, 2, 3, en ese orden?
7. ¿Cuántas comisiones de tres miembros de un grupo de cinco personas pueden formarse?
8. Un circuito tiene tres compuertas de las cuales sólo dos están abiertas simultáneamente en cualquier momento. ¿De cuántas maneras distintas puede haber dos compuertas abiertas en cualquier instante?
9. a) ¿De cuántas maneras distintas se puede repartir una baraja inglesa (cuatro palos de 13 cartas cada uno) entre cinco jugadores?
   b) ¿De cuántas maneras distintas le puede tocar una mano de 5 cartas a un jugador?

<u>Solución</u>:

1. Se tiene 4 elementos, por lo que m = 4, y queremos ordenarlos en n= 3 casillas. Si en cada casilla pueden repetirse los números, entonces tendremos
   $V'_{4,3} = 4^3 = 64$ variaciones con repetición de cuatro números en tres posiciones. Al poder repetirse las cifras que lo conforman, los resultados 111, 333, 221, etc. están permitidos

2. a) Ahora está la restricción de no poder repetir cifras, por lo que se tendrá $V_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$ variaciones sin repetición de cuatro números en tres posiciones. Al no poder repetirse, resultados como los antes descriptos (111, 333, 221, etc.) no están permitidos. Se ve así que la cantidad es mucho menor
   b) $m = n = 4$, entonces $V_{4,4} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 4! = \mathrm{P}_4 = 24$ permutaciones simples de cuatro cifras
3. a) Se tiene a, b, c, d: $m = 4$ elementos, orden $n = 3$. Como las letras no pueden repetirse, $V_{4,3} = 4! = 24$ resultados.

abc	bcd	cda	dab
acb	bdc	cad	dba
bac	dbc	dac	bad
bca	dcb	dca	bda
cab	cbd	adc	abd
cba	cdb	acd	adb

   b) $\mathrm{C}_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$ grupos. Estos grupos son los siguientes

abc	bcd	cda	dab
acb	bdc	cad	dba
bac	dbc	dac	bad
bca	dcb	dca	bda
cab	cbd	adc	abd
cba	cdb	acd	adb

   El número $C_{4,3}$ nos dice cuántos subconjuntos de tres elementos tomados de un conjunto de cuatro pueden formarse. Es importante notar que los subgrupos son los formados por abc, bcd, cda, dab y son indistinguibles entre sí las distintas variaciones dentro de cada uno de ellos.
4. Por ejemplo, si a cada persona se la identifica con una letra, una formación cualquiera puede ser: a b c d e f g h i j
   Si no hubiera restricción alguna, entonces $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10! = \mathrm{P}_{10}$ (dado que una persona una vez que se ubicó en una posición no puede "repetirse" en ninguna otra) Esto es equivalente a $V_{10,10}$
   Sin embargo, tres cualesquiera de ellas deben permanecer siempre juntas
   $\mathrm{C}_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = 120$ formas diferentes en que se juntan 3 personas cualesquiera de entre 10. Si fueran, por ejemplo, (*a* b c), esta formación sería indistinta con respecto a (b c *a)*, (c *a* b), etc., pues lo que importa es que estén juntas. Ahora, estas tres personas, que están siempre juntas como una sola unidad, deben ocupar entonces ocho posiciones en todas las combinaciones posibles junto con las siete restantes.
   Así, $\mathrm{C}_{10,3} \cdot \mathrm{V}_{8,8} = 120 \cdot 8! = 4.838.400$ alineaciones distintas
5. a) $V_{7,4} = 840$
   b) Empezando con J quedan seis letras a usarse de a tres, pues la primera ahora está fija. Entonces: $V_{6,3} = 120$
6. Se considera 123 como un solo bloque que puede ir en cualquier posición, entonces habrá siete números más ese bloque ordenados sin repetición $P_8 = 8! = 40320$ resultados
7. $\mathrm{C}_{5,3} = \binom{5}{3} = 10$ comisiones
8. $\mathrm{C}_{3,2} = \binom{3}{2} = 3$ configuraciones distintas en las que hay dos compuertas abiertas de entre tres

Si se denota A_1, A_2, A_3 a las compuertas abiertas y C_1, C_2, C_3 a las mismas compuertas cerradas, entonces el conjunto respuesta es $\{(A_1A_2C_3), (A_1C_2A_3), (C_1A_2A_3)\}$ Estas son las tres configuraciones distintas que da el número $C_{3,2}$

9. a) $P_{52}^{13,13,13,13} = \frac{52!}{13!13!13!13!} \cong 8{,}61\text{x}10^{18}$ maneras distintas (¡un número impresionante!)

   b) $C_{52,5} = \binom{52}{5} = 2.598.960$ formas distintas de tener una mano de 5 cartas de una baraja inglesa

Bibliografía de referencia.

1. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA. Aplicaciones y Métodos. George C. Canavos. 1ra Ed. (1988). McGraw-Hill/Interamericana de México.

2. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA PARA INGENIEROS. Walpole-Myers-Myers. 6ta Ed. (1999). Prentice Hall.

3. CALCULUS II. Tom M. Apostol. (1984). Ed. Reverté

4. ESTADÍSTICA PARA NEGOCIOS. HANKE John, REITSCH Arthur. 2da. Ed. (1997)McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.

5. ÁLGEBRA I. Armando Rojo. Magister Eos/Estudio Sigma.(2006)