



## FACULTAD DE INGENIERÍA ROBOTICA II

10mo. Semestre de la carrera  
Ingeniería en Mecatrónica



# ROBOTICA II

## UNIDAD 2

### Modelo Dinámico del Robot

**Ing. Roberto HAARTH**

**Ingeniería en Mecatrónica**

**Facultad de Ingeniería. UNCuyo**

**Mendoza. ARGENTINA**

## **UNIDAD 2 - ROBOTICA II**

### ***Modelo Dinámico de Robots***

- ***Caracterización de los modelos dinámicos.***
- ***Modelo Dinámico directo e inverso.***
- ***Modelos dinámicos de robots.***
  
- ***Modelo dinámico.***
- ***Formulación de Newton-Euler.***
- ***Formulación de Lagrange.***





**ABB IRB2400 – (RAPID)  
RobotStudio**



**KUKA – (KRL)  
Kuka Sim Pro**



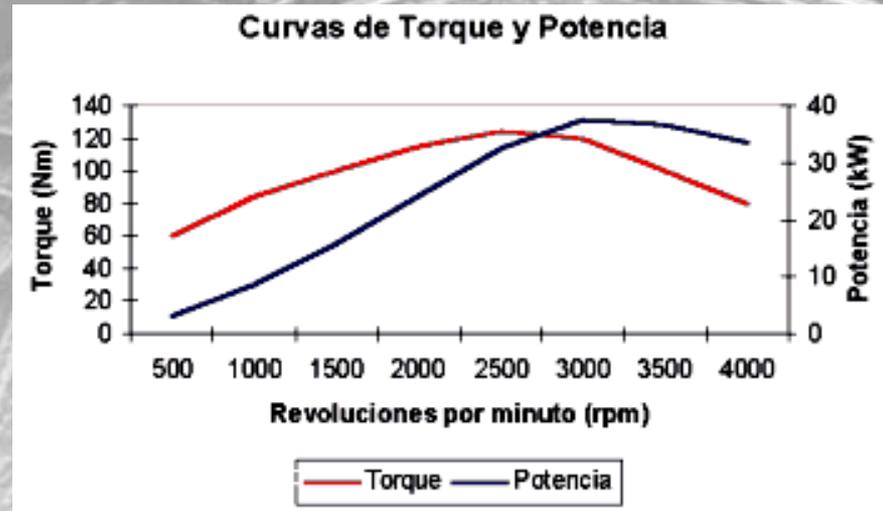
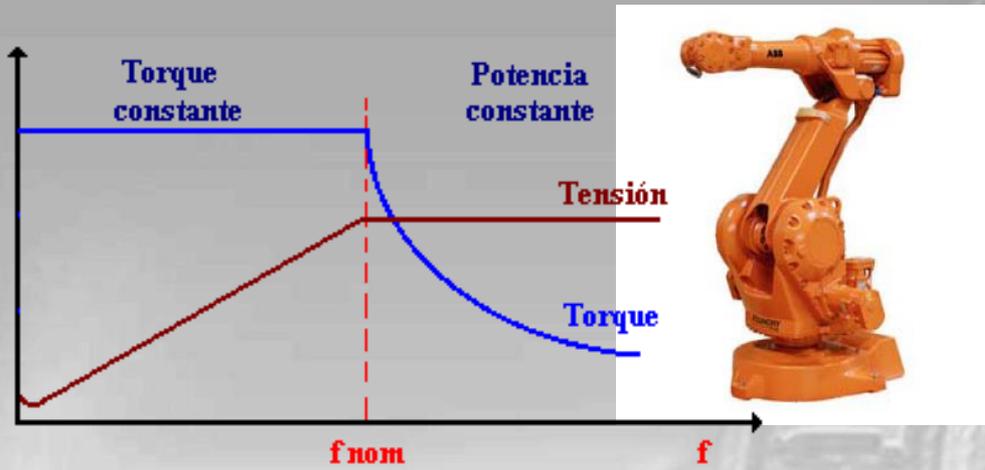
**STAUBLI – (V+)  
Staubli Robotics  
Suite**



**FANUC  
M900iB –(KAREL)  
Roboguide**



# Modelo Dinámico del Robot



**Torque en la Articulación**

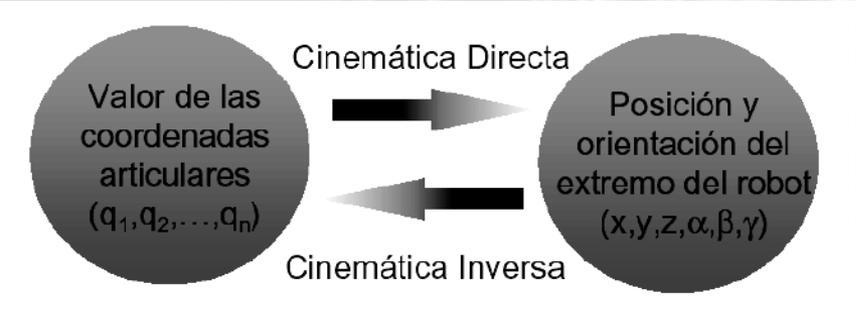
**$\zeta = ?$**

**Torque en el Actuador**

# Modelo Dinámico del Robot

**OBJETIVO de la CINEMATICA**

**CINEMATICA DIRECTA:** Proporciona la posición y orientación del extremo operativo del robot en función de las coordenadas articulares.



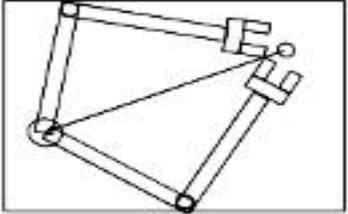
**CINEMATICA INVERSA:** Permite obtener la configuración del robot para posturas en el espacio de la tarea.



Generación de referencias en el espacio del robot.

No siempre tiene solución única

Se resuelve por optimización



integrar

$$\dot{x} = J^+ \dot{q}$$
$$\dot{q} \rightarrow q$$

## Modelo Dinámico del Robot

### CINEMATICA

Solo se consideran las posiciones estáticas y de movimiento sin considerar las fuerzas que actúan.

### DINAMICA

Considera la aplicación de Momentos de torsión y fuerzas en las articulaciones de los eslabones. Los movimientos se deben a Fuerzas Externas aplicadas por los actuadores en las articulaciones.

### PROBLEMA QUE PLANTEA LA DINAMICA

Conocido un punto de trayectoria (posición, velocidad y aceleración)

➔ **Se necesita encontrar el momento de torsión de la articulación a aplicar (*Dinámica Inversa*)**

➔ **Se necesita calcular como se moverá el mecanismo al aplicar el Momento de Torsión.** Es decir, calcular el movimiento resultante del robot (posición, velocidad y aceleración) (*Dinámica Directa*)



Servomotores eléctricos de las articulaciones 4, 5, 6

Muñeca

Estructura de acero fundida

Balancín neumático

Contrapesos para balanceo estático

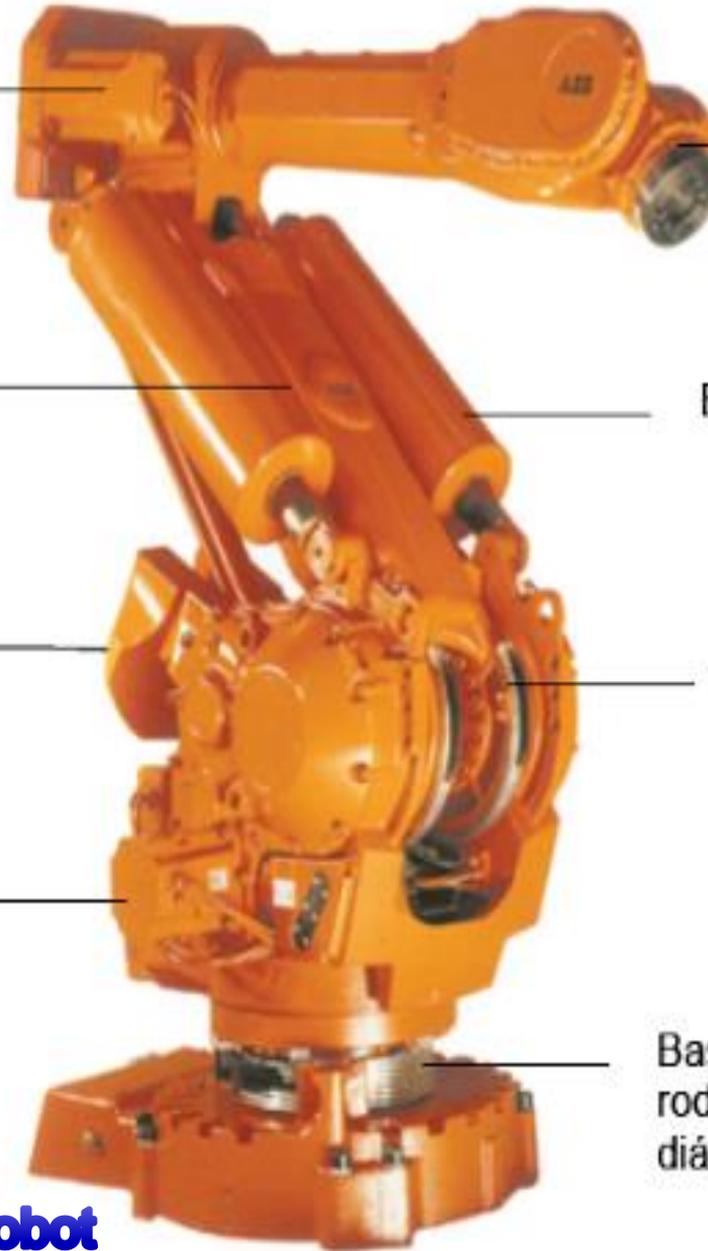
Articulación con sistema de transmisión de potencia

Servomotor eléctrico

Base rotatoria con rodamiento de gran diámetro

**INTRODUCCION**

**Modelo Dinámico del Robot**





### *Relaciona matemáticamente*

- La localización del robot definida por sus variables articulares o localización de su extremo y sus derivadas: velocidad y aceleración.
- Las fuerzas y pares aplicados en las articulaciones o extremo del Robot
- Los parámetros dimensionales del robot: longitud, dimensiones, masa e inercias de sus elementos.





### **Utilidad del modelo dinámico de un robot**

- Permite realizar simulaciones del movimiento real del robot.
- Permite diseñar y evaluar la estructura mecánica del robot.
- Permite dimensionar los motores y actuadores que utilizará el robot.
- Permite diseñar y evaluar el control dinámico del robot.

**A medida que el número de grados de libertad aumenta, el planteo y obtención del modelo se complica :**

- *Por este motivo no siempre es posible obtener un modelo dinámico expresado de una forma cerrada.*
- *El modelo dinámico debe ser resuelto de manera iterativa mediante la utilización de un procedimiento numérico.*

## Modelo Dinámico del Robot

**Modelo dinámico directo:** expresa la evolución temporal de las coordenadas articulares y sus derivadas, en función de las fuerzas y torques que intervienen.

**Modelo dinámico inverso:** expresa las fuerzas y torques que intervienen, en función de la evolución temporal de las coordenadas articulares y sus derivadas.

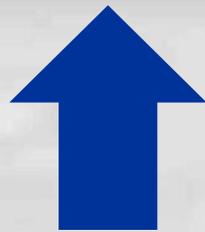
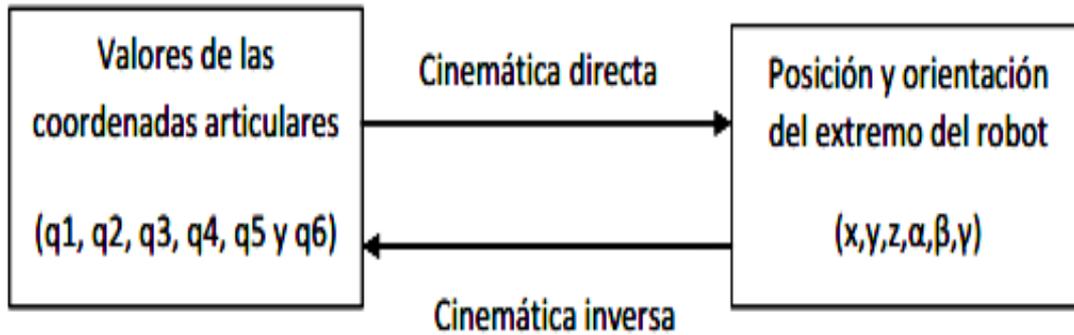


➔ *¿Qué relación tiene el Modelo Dinámico con el Modelo Cinemático ?*

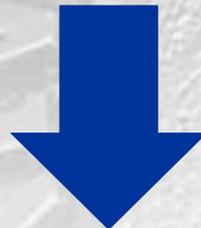
➔ *¿Existe un único resultado de aplicar la Dinámica Directa?*

➔ *¿ Lo mismo ocurre para la Dinámica Indirecta?*

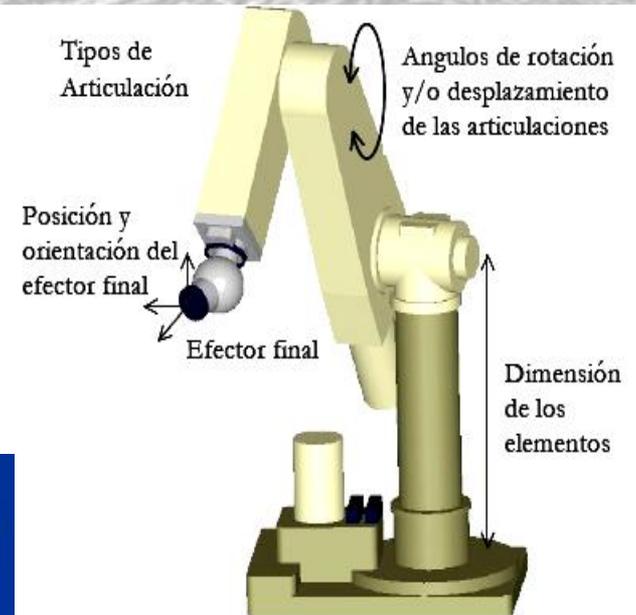
# Modelo Dinámico del Robot



**RELACION**  
?



Tipos de Articulación

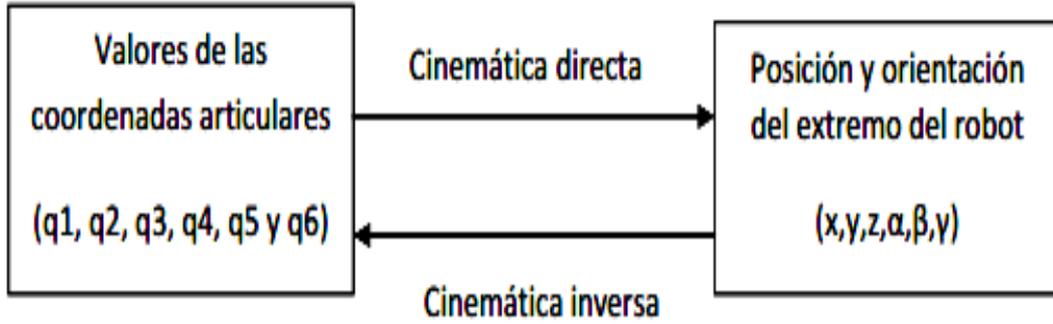


Dinámica Inversa

Evolución de las coordenadas articulares y sus derivadas ( $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ )

Fuerzas y torques que intervienen en el movimiento ( $F_i, \tau_i$ )

Dinámica Directa



**PROGRAMA**

Punto Origen-Destino ( $x, y, z$ , ángulos)  
Tipo / Trayectoria  
Tiempo

**GENERADOR DE TRAYECTORIA**

Velocidad y Aceleración Max En Articulaciones

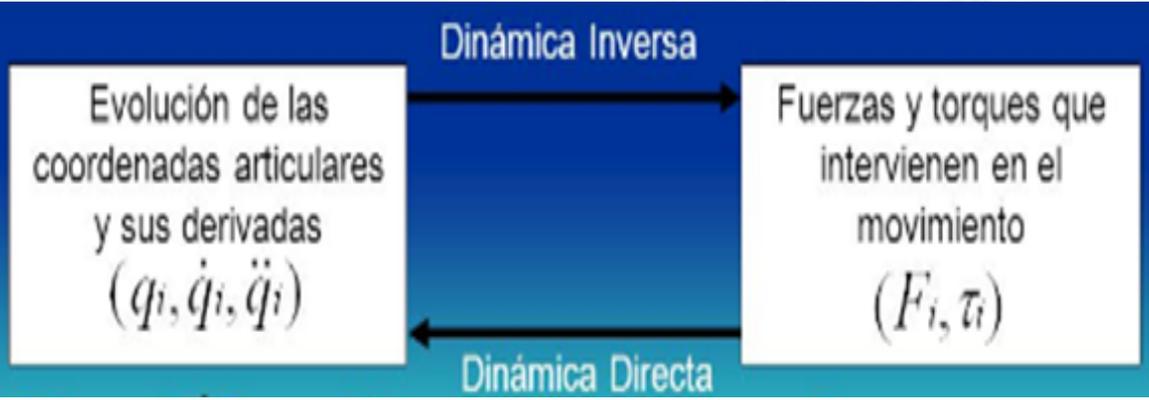
**MODELO CINEMATICO**

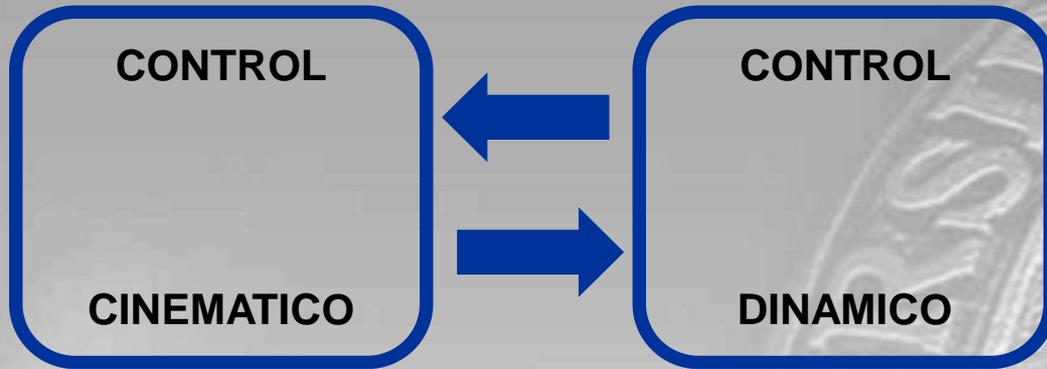
**RELACION ?**

Trayectoria Articular (tiempo)  
Singularidades

**MUESTREO**

**CONTROL DINAMICO**





## Control Cinemático:

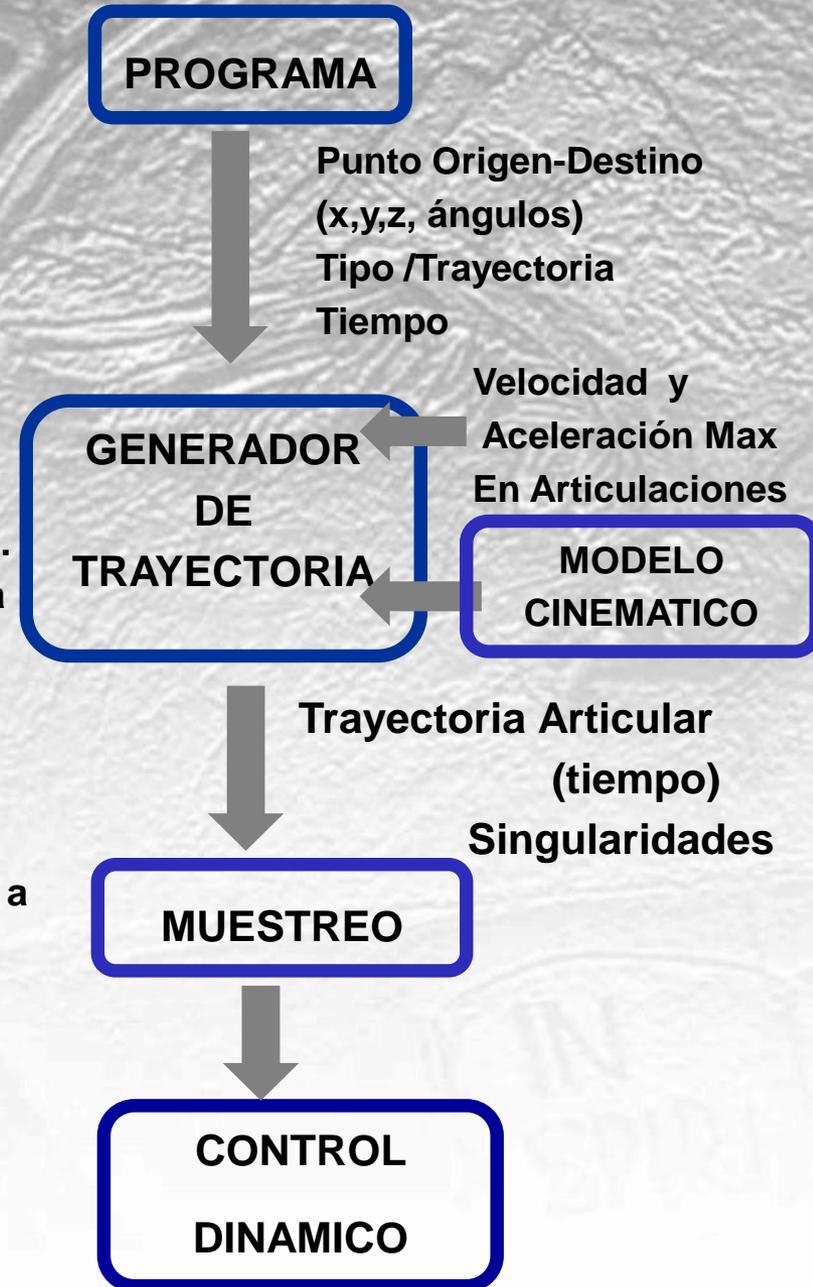
Da las Trayectorias que podrían ajustarse mejor al modelo. En la Práctica No es posible por la Dinámica Desconocida (inercias, rozamientos, huelgos....)

No se puede Relacionar la  $Q$  deseada (t) vs. la  $Q$  real (t)

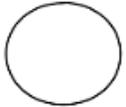
## Control Dinámico:

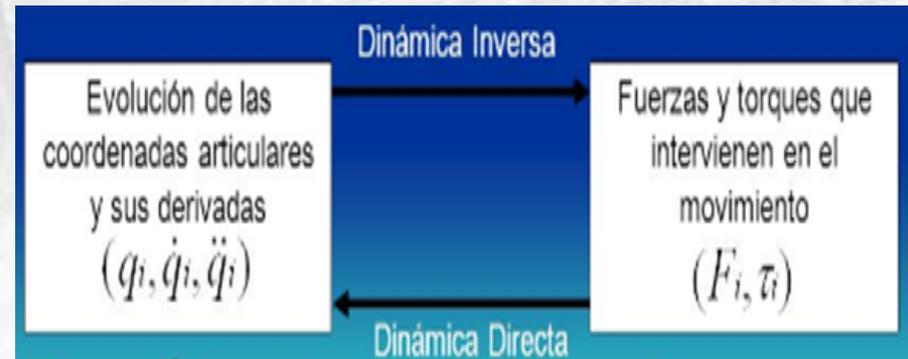
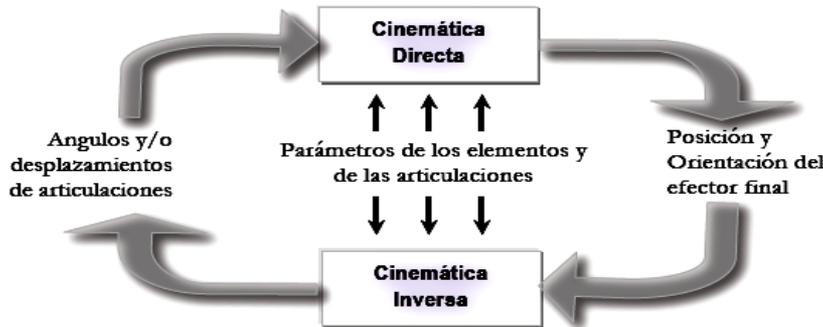
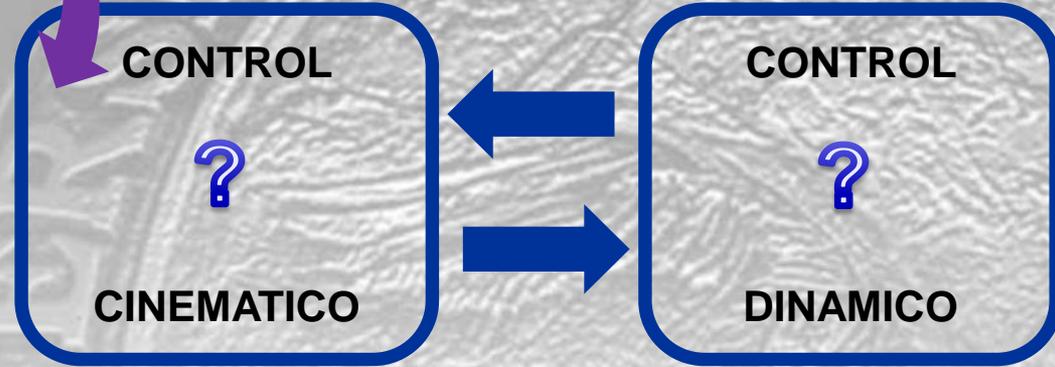
Permite que la Trayectoria que realiza el Robot sea similar a la deseada ( $Q$  real (t) =  $Q$  deseada (t) )  
Se Necesita Conocer

**EL MODELO DINÁMICO Y EL CONTROL**



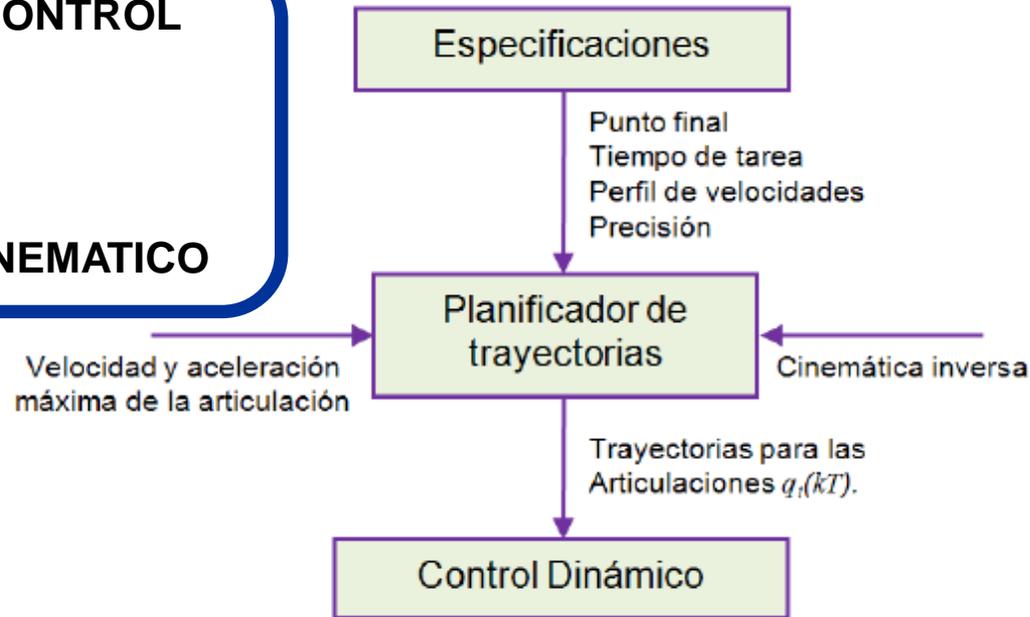
## Tipos De Trayectoria

- Trayectoria Parabólica 
- Trayectoria Circular 
- Trayectoria Elíptica 
- Trayectoria Rectilínea 
- Trayectoria Irregular 



CONTROL

CINEMATICO



**Trayectorias punto a punto:** Cada articulación evoluciona desde su posición inicial a la final sin considerar la evolución de las demás articulaciones. Los Actuadores trabajan independientemente.

**Trayectorias coordinadas o isócronas:** Evitar que los Actuadores trabajen forzando sus velocidades y aceleraciones, teniendo que esperar a la articulación más lenta, Objetivo: Invertir el mismo tiempo en el movimiento. Los Actuadores finalizan simultáneamente

**Trayectorias continuas:** La trayectoria que sigue el extremo del robot es conocida por el usuario. Es preciso calcular de manera continua las trayectorias articulares.

CONTROL

DINAMICO

### Control Dinámico

**Justificación:** El control cinemático selecciona trayectorias que idealmente deberá seguir el robot, Se ajusta lo mejor posible a las especificaciones del movimiento dadas por el usuario.

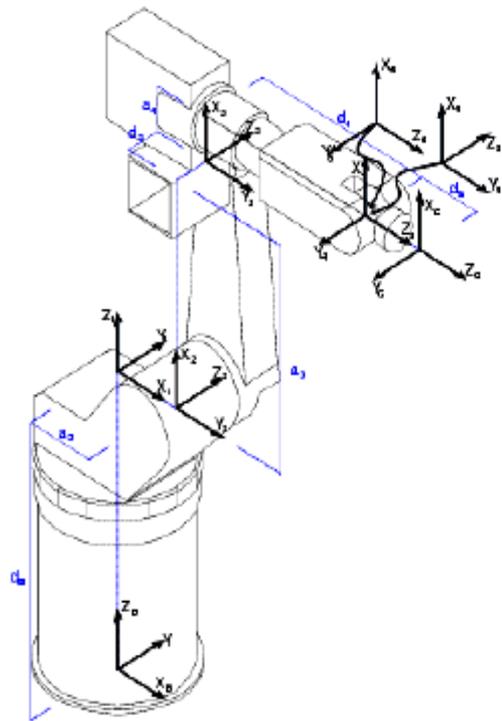
En la práctica este ajuste del movimiento del robot a las especificaciones del usuario no será del todo posible, pues las *características dinámicas del robot* (*inercias, rozamiento, holguras, etc.*) impiden que las trayectorias real y deseada coincidan

### Objetivo del Control Dinámico

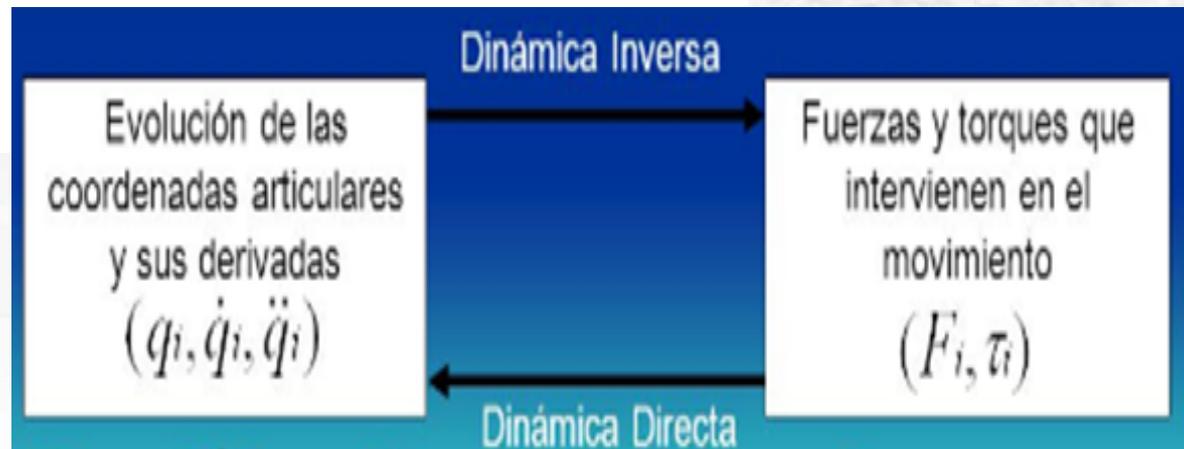
Procurar que las trayectorias realmente seguidas por el robot  $q(t)$  sean lo más parecidas posible a las propuestas por el control cinemático como trayectorias deseadas  $q_d(t)$ . Para llevar a cabo esa tarea se hace uso del conocimiento del modelo dinámico del

robot y de las herramientas de análisis y diseño aportadas por la teoría del Control.

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$



Para un robot "Real" las ecuaciones dinámicas pueden ser considerablemente complejas



## MODELO DINAMICO

Para un número mayor de grados de libertad en un robot, deben considerarse otros aspectos de valoración, fuerzas de inercia y gravedad, fuerzas de Coriolis debido a la interacción, movimiento relativo existente entre los elementos, además de las fuerzas centrípetas que dependen de la posición del robot.

Este planteo requiere de mayor formulación y variables que hacen muy compleja la solución por este método. Solo es útil para uno o dos grados de libertad de un robot.

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

 ***El modelo dinámico completo de un robot debe incluir no solo la dinámica de sus elementos (barras o eslabones), sino la dinámica de sus sistemas de transmisión, de los actuadores y sus equipos electrónicos de mando.***

 ***Estos elementos incorporan al modelo dinámico nuevas inercias, rozamientos, saturaciones de los circuitos electrónicos, etc. aumentando aun más su complejidad.***

## EFECTOS DE FRICCIÓN EN LOS ROBOTS



En Mecanismos reales es común la interacción de elementos móviles con una fuerte presencia de fuerzas de fricción que es considerable.

Influencia equivalente al 25% del momento de torsión

**Fricción Viscosa**, donde el momento de torsión es proporcional a la velocidad del movimiento de la articulación

**Fricción Viscosa**

$$\tau_{fricción} = v\dot{\theta}$$

**Fricción de Coulomb**, que es constante solo que se debe considerar el signo en la velocidad de la articulación

**Fricción de Coulomb**

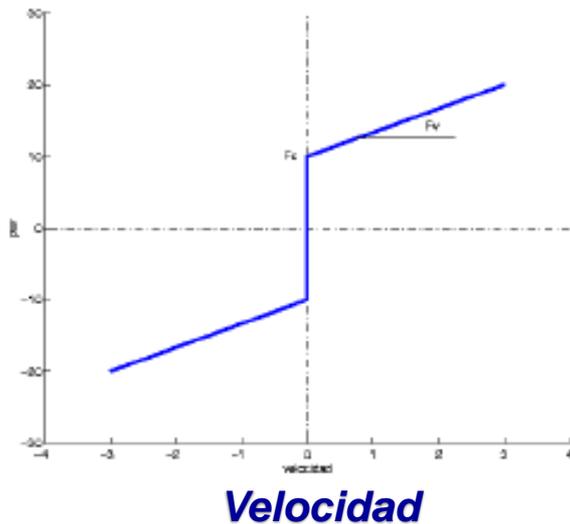
$$\tau_{fricción} = c \operatorname{sgn}(\dot{\theta})$$

SE SUMAN

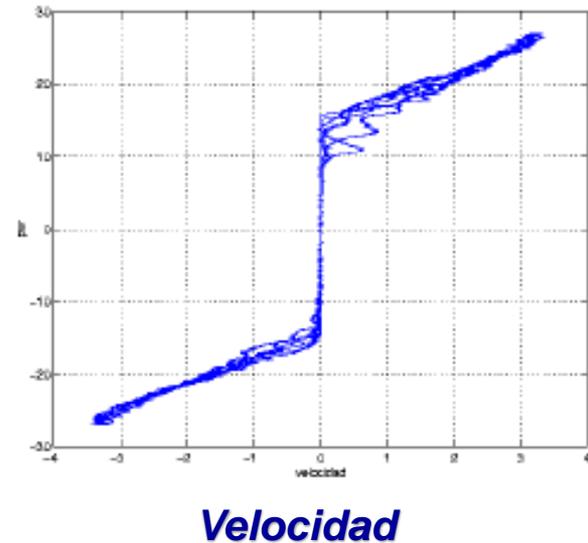


- Característica de fricción, modelo estático.  $\tau_f = F_c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + F_v \dot{\theta}$
- La Fricción es un fenómeno fuertemente no lineal difícil de modelar que degrada el comportamiento de los robots manipuladores

## Torque



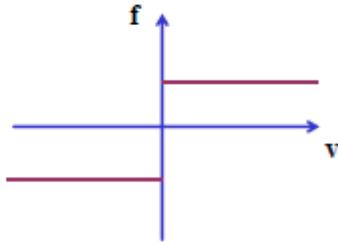
## Torque



## MODELOS DE ROZAMIENTO

**ROZAMIENTO ESTÁTICO O ROZAMIENTO SECO:** Esfuerzo que se opone a que empiece a moverse

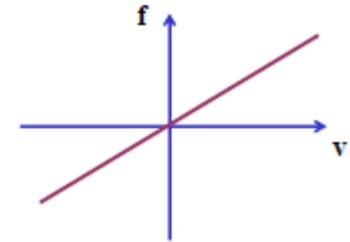
$$f_r = k_e \operatorname{signo}(v)$$



## MODELOS DE ROZAMIENTO

**ROZAMIENTO VISCOSO O DINÁMICO:** esfuerzo proporcional a la velocidad.

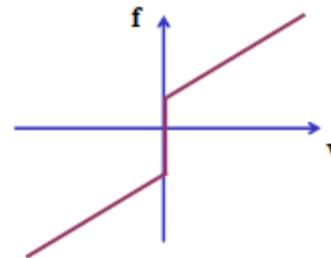
$$f_r = k_d \cdot v$$



## MODELOS DE ROZAMIENTO

Composición de los dos anteriores

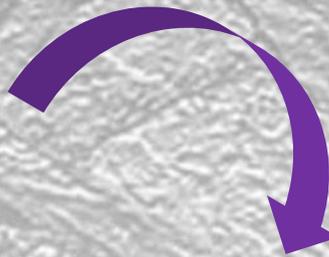
$$f_r = k_e \operatorname{signo}(v) + k_d \cdot v$$



## MODELO DINAMICOS INVERSOS

1. *Newton-Euler*
2. *Lagrange o Lagrange-Euler*
3. *Formulación de d'Alembert.*
4. *Gibbs-Appel*
5. *Walker-Orin*

$$\vec{\tau}(t) = D(\vec{q}(t)) \cdot \ddot{\vec{q}}(t) + H(\vec{q}(t), (\dot{\vec{q}}(t))) + C(\vec{q}(t)) + F_v \cdot \dot{\vec{q}}(t) + F_s \cdot \text{sign}(\dot{\vec{q}}(t)) + \vec{\tau}_p(t)$$



Representa las fuerzas generalizadas aplicadas como entradas a las articulaciones del sistema.

## MODELO DINAMICOS DIRECTOS

1. *Método de Resolución por Sistemas Lineales,*
2. *Método de Walker & Orin.*
3. *Formulación de Gibbs-Appell.*

$$\ddot{\vec{q}} = f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \Gamma, f_e)$$

### MODELO NEWTON - EULER

El estudio dinámico de un sistema robótico es el **estudio del movimiento** de dicho mecanismo y la dinámica de un mecanismo cualquiera que representa el cálculo de las **fuerzas y pares** de todas las articulaciones del sistema mecánico para todo instante de tiempo. A diferencia de la cinemática, la dinámica analiza los movimientos del robot **teniendo en consideración pesos e inercias** y, por ende, toma en cuenta los valores de fuerzas y pares que aparecen durante el movimiento.

$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \sum \vec{F}(t)$$
$$\mathbf{I} \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} + \vec{\omega}(t) \times (\mathbf{I}\vec{\omega}(t)) = \vec{T}(t)$$

La dinámica se basa fundamentalmente en el planteamiento del equilibrio de fuerzas establecido en la 2ª Ley de Newton y la Ley de Euler (su equivalente para movimientos de rotación):

#### **IMPORTANTE**

Este método encuentra su aplicación generalmente en el análisis de robots seriales, ya que para el caso de robots paralelos genera un gran número de ecuaciones y por ello representa un método muy poco eficiente (Cisneros Limón, 2006).

## MODELO DE LAGRANGE

La Formulación de Lagrange-Euler es un método comprendido dentro de la llamada **dinámica analítica**, la cual consiste en una serie de técnicas basadas en el tratamiento puramente abstracto y analítico de los sistemas mecánicos. Este método fue formulado por Joseph Louis Lagrange y tiene la ventaja de dejar fuera del análisis las fuerzas de contacto mediante la definición de coordenadas y fuerzas generalizadas.

### PLANTEO DEL METODO.

Puesto que este método se basa en el **Principio de Conservación de la Energía**, la Función Lagrangiana  $L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$  se define como la diferencia entre la energía cinética  $K(\dot{q}_i(t), t)$  y potencial  $V(q_i(t), t)$  de un sistema

$$L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = K(\dot{q}_i(t), t) - V(q_i(t), t)$$

$$K(\dot{q}_i(t), t) = \frac{1}{2} \sum \left( \vec{v}_{Gi}^T(t) m_i \vec{v}_{Gi}(t) + \omega_{\omega i}^T(t) U I_i \omega_{\omega i}(t) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau$$
$$\mathcal{L} = k - u$$

### MODELO DINAMICO INVERSO

### FORMULACION DE D'ALAMBERT

El Principio del Trabajo Virtual representa un método de análisis que engloba el concepto del **trabajo virtual** y el **Principio de d'Alembert**, mediante los cuales se formulan directamente las ecuaciones dinámicas de manera conjunta para todo un sistema y no partícula a partícula.

Si bien esta característica también se presenta con la Formulación de Lagrange, el principio del trabajo virtual no involucra los inconvenientes presentes cuando las coordenadas generalizadas no son libres, representando así **el método más eficiente en el análisis de robots paralelos**.

#### Desplazamientos Virtuales

Donde

$\delta W$  Trabajo Virtual

$\vec{Q}_i$  representa el vector de fuerzas generalizadas I-ésimo y la variable

$\delta \vec{r}_i$  hace referencia al de desplazamientos virtuales.

$$\delta W = \sum \vec{Q}_i \delta \vec{r}_i = 0$$

## MODELO DINAMICO DIRECTO

Aunque no es la parte más desarrollada dentro de la dinámica de un sistema robótico, la obtención de una solución es fundamental si se desean realizar tareas de simulación en pos de definir el movimiento del sistema robótico a partir de unos pares predefinidos. Esta solución implica una integración de las aceleraciones para dar lugar a las coordenadas articulares para cada instante y, además, precisa conocer la dinámica inversa previamente.

## Método de Resolución por Sistemas de Ecuaciones

A partir de un modelo dinámico ( caso de 6 articulaciones) se puede modificar la representación con ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}\tau_1(t) &= k_1\ddot{q}_1(t) + k_2\ddot{q}_2(t) + k_3\ddot{q}_3(t) + \dots \\ &\vdots \\ \tau_6(t) &= k_{19}\ddot{q}_1(t) + k_{20}\ddot{q}_2(t) + k_{21}\ddot{q}_3(t) + \dots\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}k_1 &= -I_{zz6} \\ k_2 &= m_5y_5a_1 + m_6z_6a_1 \\ k_3 &= m_6a_2z_6 + m_5y_5a_2 \\ k_4 &= m_5y_5a_3 + m_6z_6a_3 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Se obtienen un total de 6 ecuaciones con 26 constantes ( por simplificación).

Estas expresiones se resuelven empleando procedimientos de resolución de sistemas de ecuaciones.

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \Gamma, f_e)$$

## MODELO DINAMICO DIRECTO

### Método de Walker & Orin

Para poder simular la formulación de la dinámica hacia delante, directa o integral, dando así el movimiento de las articulaciones en términos de los pares realizados en los actuadores, se necesita hacer uso del modelo dinámico del sistema robótico.

Walker y Orin (Walker, et al., 1982) han descrito varios métodos para calcular la dinámica directa, y todos hacen uso de una solución dinámica inversa existente (o lo que es lo mismo, del modelo dinámico).

El método comienza resolviendo la ecuación general del robot. De ésta, se puede observar que las fuerzas y pares resultantes de las articulaciones son funciones lineales de las aceleraciones articulares:

$$\vec{\tau}(t) = D(\vec{q}(t)) \cdot \ddot{\vec{q}}(t) + H(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) + C(\vec{q}(t)) + F_v \cdot \dot{\vec{q}}(t) + F_s \cdot \text{sign}(\dot{\vec{q}}(t)) + \vec{\tau}_p(t)$$

Si se define un vector

$$B(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) = H(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) + C(\vec{q}(t)) + F_v \cdot \dot{\vec{q}}(t) + F_s \cdot \text{sign}(\dot{\vec{q}}(t)) + \vec{\tau}_p(t)$$

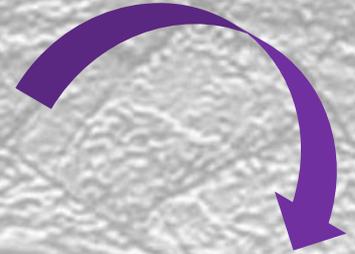
Combinando las expresiones se obtienen las variables

$$\ddot{\vec{q}}(t) = D^{-1}(\vec{q}(t)) [\vec{\tau}(t) - B(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)]$$

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \Gamma, f_e)$$

## MODELO DINAMICO DIRECTO

### Método de Gibbs-Appell



Las ecuaciones de la dinámica de Gibbs-Appell parten de la definición de la función de Gibbs

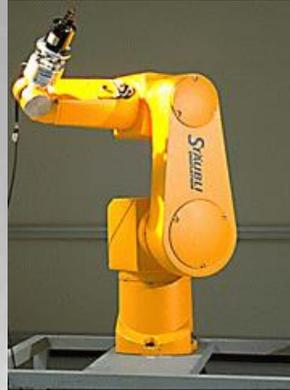
$$G(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), \ddot{\vec{q}}(t), t) = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T(t) D(\vec{q}(t)) \cdot \dot{\vec{q}}(t) + \vec{\Xi}^T \ddot{\vec{q}}(t) + f(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$$

Las ecuaciones de Gibbs-Appell se obtienen derivando parcialmente la función de Gibbs con respecto a las aceleraciones generalizadas:

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_i(t)} G(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), \ddot{\vec{q}}(t), t) = Q_i \rightarrow D(\vec{q}(t)) \cdot \dot{\vec{q}}(t) + \vec{\Xi} = Q_i$$

$$\ddot{\vec{q}} = f(q, \dot{q}, \Gamma, f_e)$$

## PLANTEOS DE MODELOS DINAMICOS



# Modelo Dinámico del Robot

# MODELO DINAMICO

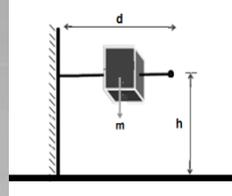
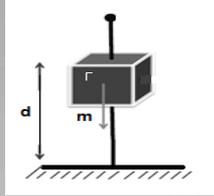
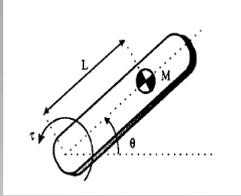


## MODELO MONOARTICULAR

1GDL R

1GDL T

1GDL T



EFECTO GRAVEDAD (G)



EFECTO SIN GRAVEDAD



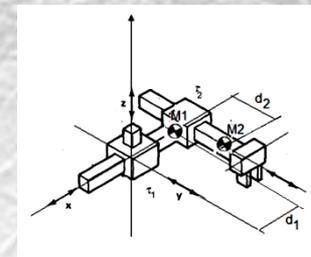
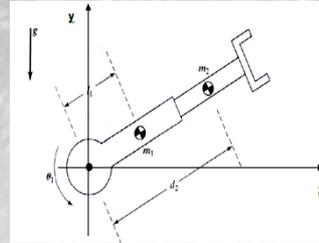
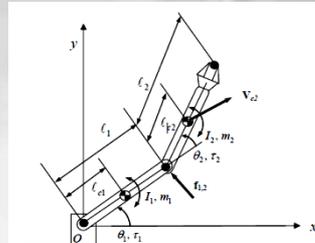
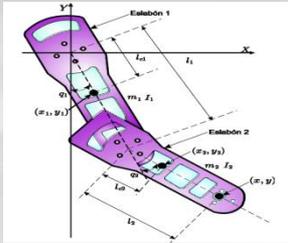
## MODELO MULTIARTICULAR

2GDL R+R

2GDL R+R

2GDL R+T

2GDL T+T

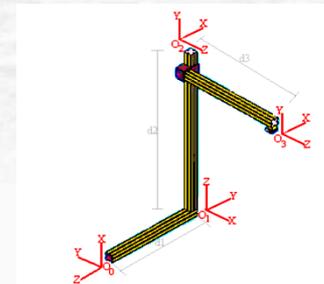
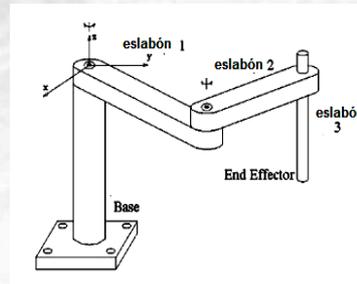
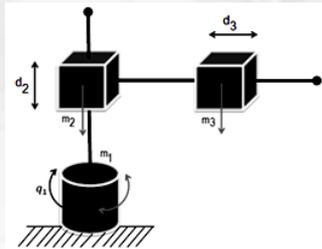
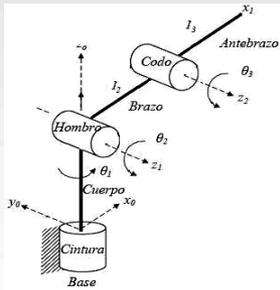


3GDL R+R+R

3GDL R+T+T

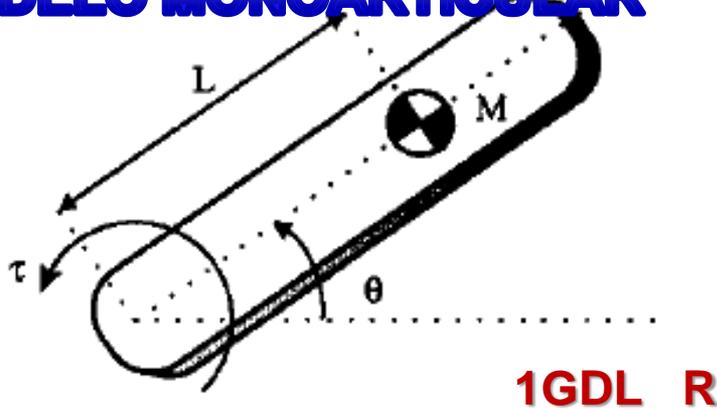
3GDL R+R+T

3GDL T+T+T



## MODELO DINAMICO NEWTON – EULER

### MODELO MONOARTICULAR



$$\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2} + MgL\cos\theta = \boxed{ML^2\ddot{\theta} + MgL\cos\theta}$$

Momento dinámico por la aceleración articular mas el momento estático del sistema .

La obtención del modelo dinámico se basa fundamentalmente en el planteamiento del equilibrio de fuerzas establecido en la segunda ley de Newton, o su equivalente para movimientos de rotación, la denominada ley de Euler

### MODELO DINAMICO NEWTON – EULER



se basa en el planteo del Equilibrio de Fuerzas

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

$$\tau = \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial k}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \tau = M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\dot{\theta})$$

$\tau$  = Fuerzas/Pares generalizados en las articulaciones

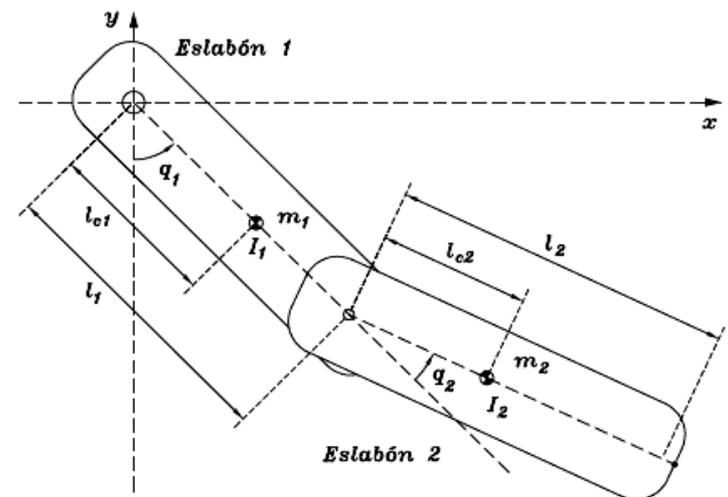
$\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$  = Coordenadas generalizadas y derivadas

$M(\theta)$  = Matriz de Inercia (Simétrica)

$V(\theta, \dot{\theta})$  = Vector de términos de Coriolis - Centrifugos

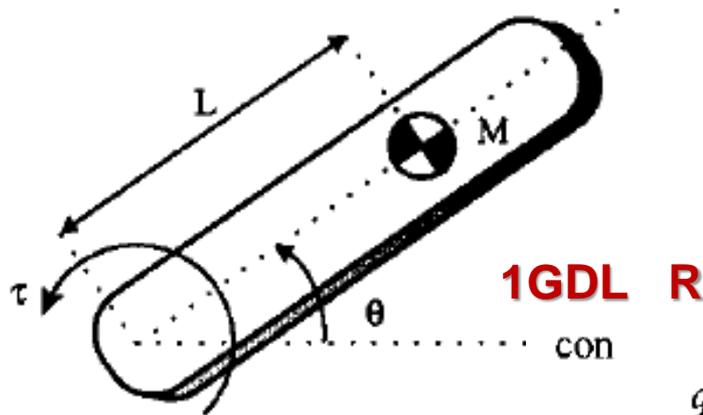
$G(\theta)$  = Vector de términos gravitatorios

$F(\dot{\theta})$  = Vector de fuerzas de rozamiento



MODELO DINAMICO LAGRANGE

MODELO MONOARTICULAR



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau$$

$$\mathcal{L} = k - u$$

$$\mathcal{L}(\Theta, \dot{\Theta}) = k(\Theta, \dot{\Theta}) - u(\Theta)$$

$q_i$ : coordenadas generalizadas (en este caso las articulares).

$\tau$ : vector de fuerzas y pares aplicados en las  $q_i$ .

$\mathcal{L}$ : Función Lagrangiana.

$k$ : energía cinética.

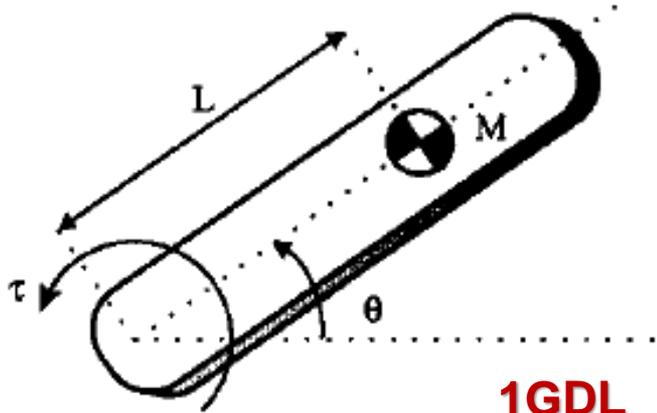
$u$ : energía potencial.

$$u_i = -m_i^0 g^{T0} P_{C_i} + u_{ref} \quad \text{Total } u = \sum_{i=1}^n u_i$$

La formulación Lagrangiana es un método de balance de energías entre la cinética y la potencial sobre los elementos del robot. Es comparable al análisis dinámico de Newton-Euler, donde se podría decir que es un balance de fuerzas dinámicas.

MODELO DINAMICO LAGRANGE

MODELO MONOARTICULAR



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau$$

$$\mathcal{L} = k - u$$

$$\mathcal{L}(\Theta, \dot{\Theta}) = k(\Theta, \dot{\Theta}) - u(\Theta)$$

$$u_i = -m_i^0 g^{T0} P_{C_i} + u_{ref}$$

Total  $u = \sum_{i=1}^n u_i$

$$\mathcal{L} = k - u = \frac{1}{2} ML^2 \dot{\theta}^2 - MgL \text{sen} \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -MgL \text{cos} \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ML^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ML^2 \ddot{\theta}$$

$$k = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

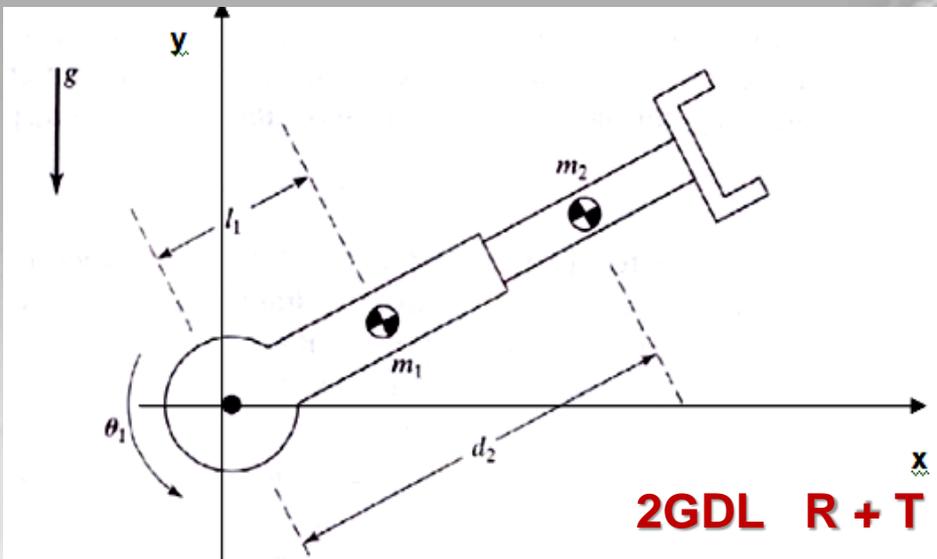
$$u = Mgh = MgL \text{sen} \theta$$



$$ML^2 \ddot{\theta} + MgL \text{cos} \theta = \tau$$

MODELO DINAMICO LAGRANGE

MODELO MULTIARTICULAR



$K_1$ . Energía cinética, suma del aporte de movimiento debido a la velocidad lineal y el aporte de la velocidad de rotación.

$$k_1 = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_{zz1}\dot{\theta}_1^2$$

$$k_2 = \frac{1}{2}m_2(d_2^2\dot{\theta}_1^2 + \dot{d}_2^2) + \frac{1}{2}I_{zz2}\dot{\theta}_1^2$$

Fuente. John J.Craig. "Robótica". Capítulo 6. Dinámica de manipuladores. Pag 184.3era. Edición. Ed. Pearson.Pretince Hall 2003.

$$k(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2d_2^2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{d}_2^2$$

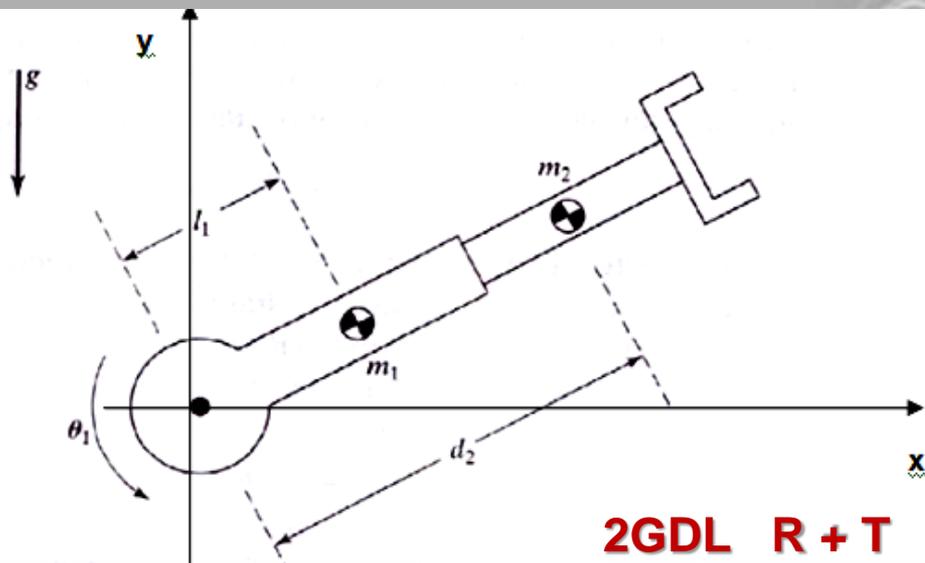
$$u_1 = m_1l_1g \text{ sen}(\theta_1) + m_1l_1g$$

$$u_2 = m_2gd_2 \text{ sen}(\theta_1) + m_2gd_{2m\acute{a}x}$$

$$u(\Theta) = g(m_1l_1 + m_2d_2) \text{ sen}(\theta_1) + m_1l_1g + m_2gd_{2m\acute{a}x}$$

**MODELO DINAMICO LAGRANGE**  
**MODELO MULTIARTICULAR**

Eslabón doble con movimientos lineales y angulares.



$$\frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} = \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \dot{\theta}_1 \\ m_2 \dot{d}_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} g(m_1 l_1 + m_2 d_2) \cos(\theta_1) \\ gm_2 \text{sen}(\theta_1) \end{bmatrix}.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial k}{\partial \Theta} + \frac{\partial u}{\partial \Theta} = \tau$$

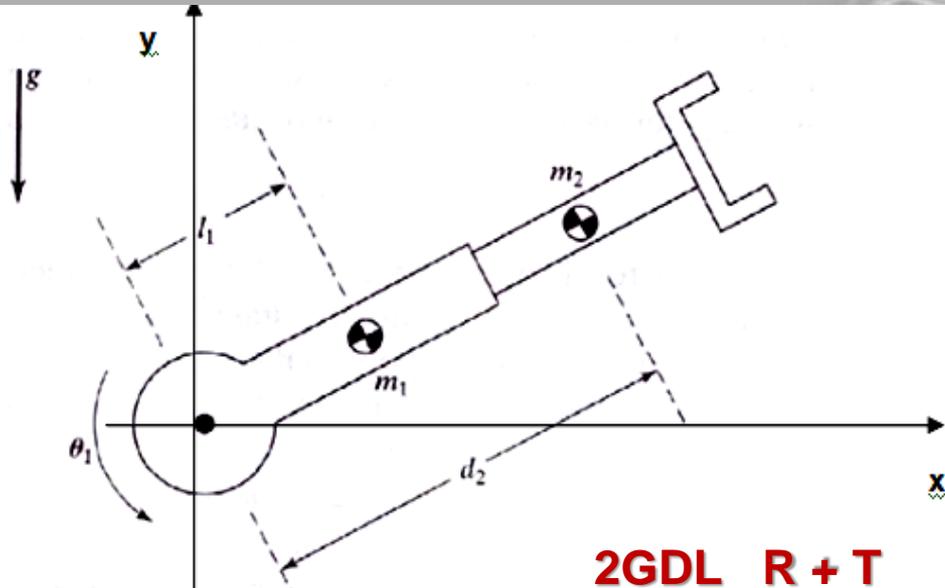
Fuente. John J.Craig. "Robótica". Capitulo6. Dinámica de manipuladores. Pag 184.3era. Edición. Ed. Pearson.Pretince Hall 2003.

$$\tau_1 = (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos(\theta_1),$$

$$F_2 = m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \text{sen}(\theta_1).$$

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

## MODELO MULTIARTICULAR



$$\tau_1 = (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos(\theta_1),$$

$$F_2 = m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \sin(\theta_1).$$

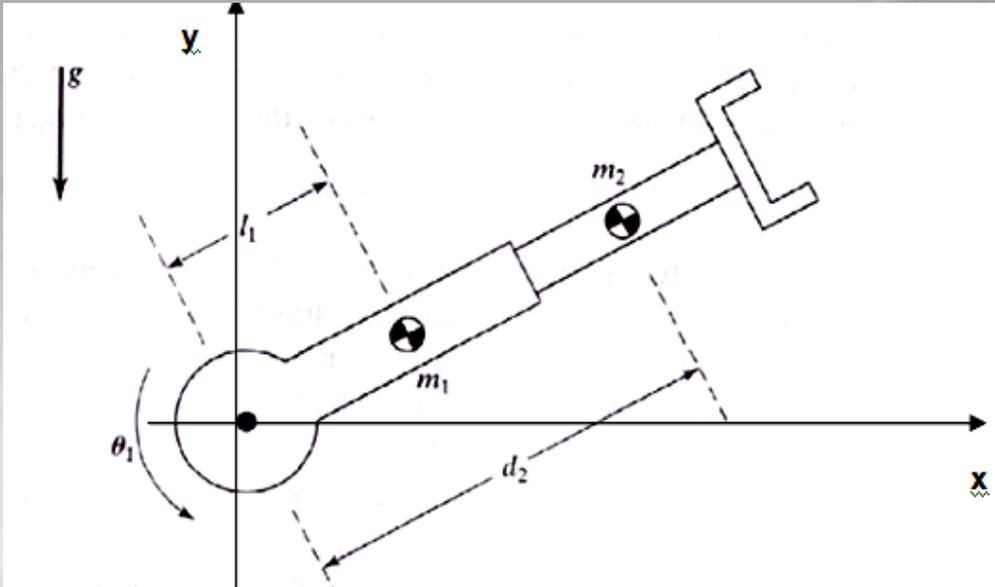
Fuente. John J. Craig. "Robótica". Capítulo 6. Dinámica de manipuladores. Pag 184. 3era. Edición. Ed. Pearson. Prentice Hall 2003.

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 2m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix},$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos(\theta_1) \\ m_2 g \sin(\theta_1) \end{bmatrix}.$$

**MODELO DINAMICO NEWTON – EULER**  
**MODELO MULTIARTICULAR**



La dinámica se basa en el planteamiento del equilibrio de fuerzas establecido en la 2ª Ley de Newton y la Ley de Euler (su equivalente para movimientos de rotación)

$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \sum \vec{F}(t)$$

$$\mathbf{I} \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} + \vec{\omega}(t) \times (\mathbf{I}\vec{\omega}(t)) = \vec{T}(t)$$

Fuerzas y Pares de Fuerzas que Intervienen:

- 1-Inercia
- 2-Fuerza de Coriolis
- 3-Fuerza Centrifuga
- 4-Gravedad

**MODELO DINAMICO NEWTON – EULER**

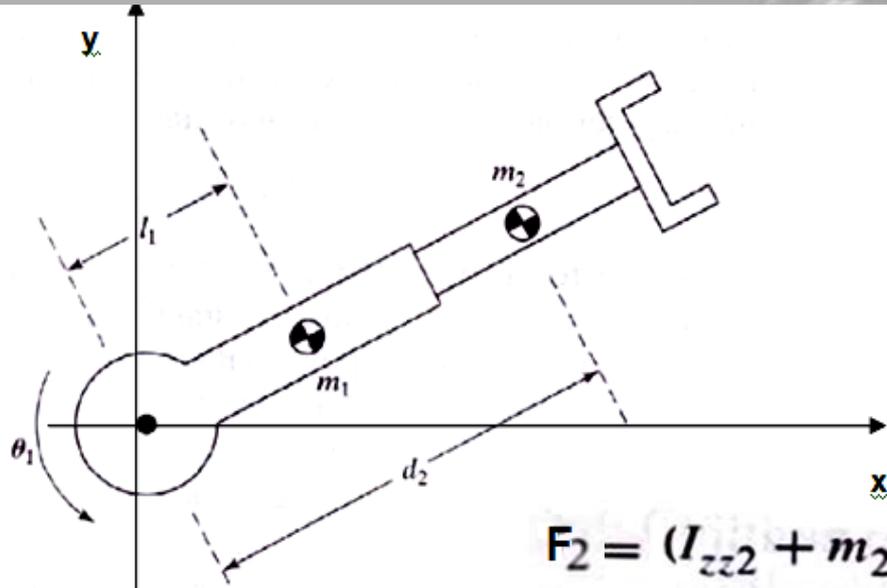


Se basa en el planteo del Equilibrio de Fuerzas y Momentos

**MODELO DINAMICO NEWTON – EULER**  
**MODELO MULTIARTICULAR**

**Fuerzas y Pares de Fuerzas que Intervienen:**

- 1-Inercia
- 2-Fuerza de Coriolis
- 3-Fuerza Centrifuga
- 4-Gravedad



$$\tau_1 = (m_1 l_1^2 + I_{zz1}) \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g \cos(\theta_1)$$

$$F_2 = (I_{zz2} + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 \ddot{d}_2 - 2m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 d_2 g \cos(\theta_1) + m_2 g \sin(\theta_1)$$

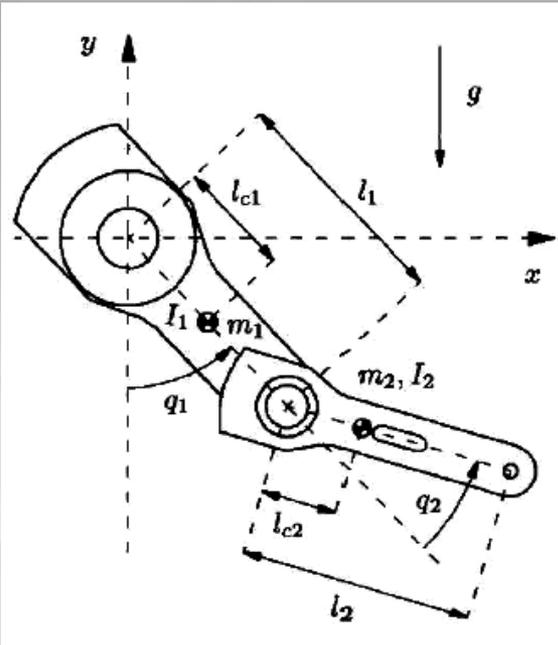
↓

$$= (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos(\theta_1) + m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \sin(\theta_1)$$

La expresión muestra los efectos combinados y su influencia en la composición de las fuerzas y pares de fuerzas que intervienen en el sistema. Lo marcado en los recuadros muestra los efectos sobre la articulación 1 (Torque 1).

MODELO DINAMICO LAGRANGE

MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



Robot de 2 grados de Libertad

• Energía Cinética k1:

$$v_1^2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2$$

$$k_1 = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 l_{c1}^2 + I_1) \dot{q}_1^2$$

• Energía Cinética y potencial del 2º eslabón

$$v_2 = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} =$$

$$\begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}$$

• Energía Potencial u1

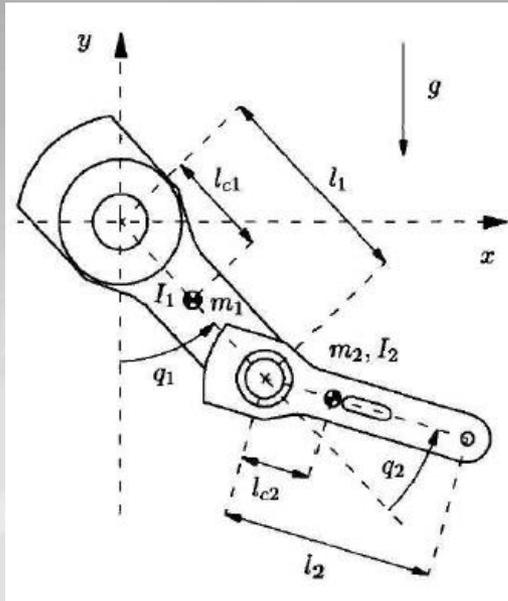
$$v_2^2 =$$

$$l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 + 2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2)$$

$$u_1 = -m_1 l_{c1} g \cos(q_1)$$

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

### MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



$$K(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}),$$

$$U(q) = U_1(q) + U_2(q).$$

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t)).$$

$$K(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}),$$

$$= \left[ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right].$$

$$x_1 = l_{c1} \sin(q_1),$$

$$y_1 = -l_{c1} \cos(q_1),$$

$$x_2 = l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2),$$

$$y_2 = -l_1 \cos(q_1) - l_{c2} \cos(q_1 + q_2),$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}.$$

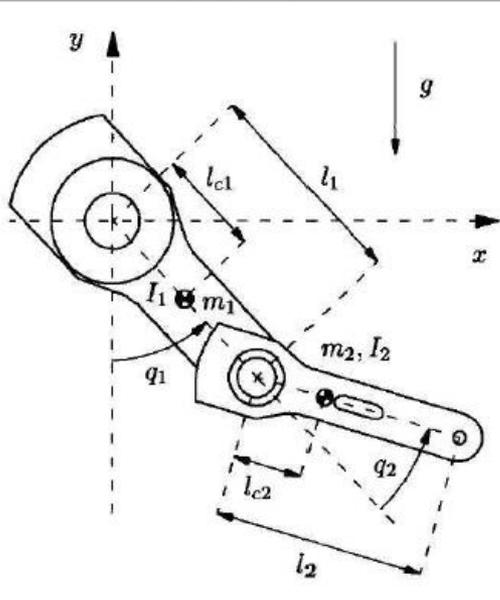
Las velocidades al cuadrado

$$v_1^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2,$$

$$v_2^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c1}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + 2l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2).$$

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}.$$

Las velocidades al cuadrado

$$v_1^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2,$$

$$v_2^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + 2l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2).$$

$$v_2^T v_2 = [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + 2[l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2.$$

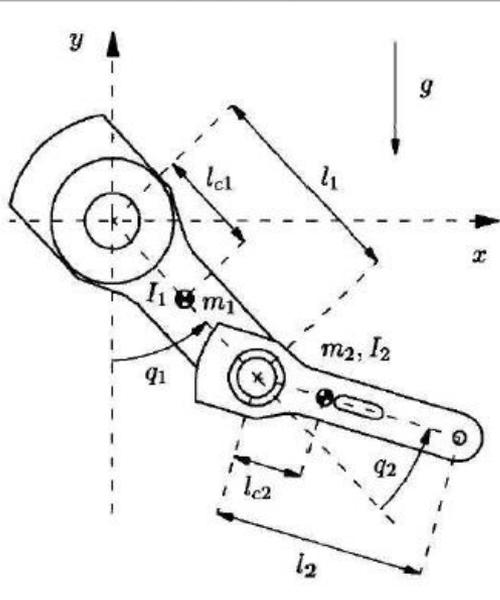
$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$$

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \dot{q}_1^2$$

$$+ m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2.$$

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

### MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



Las velocidades al cuadrado

$$v_1^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2,$$

$$v_2^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + 2l_1l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2] \cos(q_2).$$

$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$$

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \dot{q}_1^2 + m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2] \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2.$$

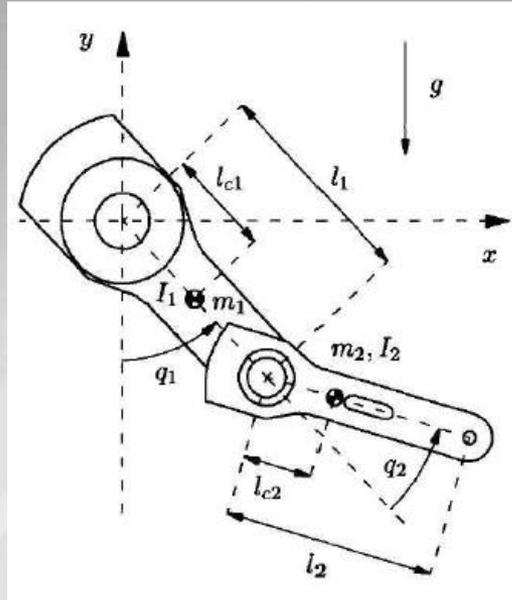
Otra Forma de Ver

$$v_2^T v_2 = [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + 2[l_{c2}^2 + l_1l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1\dot{q}_2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2.$$

$$\begin{aligned} K_2(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2, \\ &= \frac{1}{2} [m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} [m_2 l_{c2}^2 + I_2] \dot{q}_2^2 \\ &\quad + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \dot{q}_1 \dot{q}_2. \end{aligned}$$

MODELO DINAMICO LAGRANGE

MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



Lagrange

$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$$

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \dot{q}_1^2$$

$$+ m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2$$

$$U(q) = U_1(q) + U_2(q) = [-m_1 l_{c1} g \cos(q_1)]$$

$$+ [-m_2 l_1 g \cos(q_1)$$

$$- m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)].$$

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1^2$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \dot{q}_1^2$$

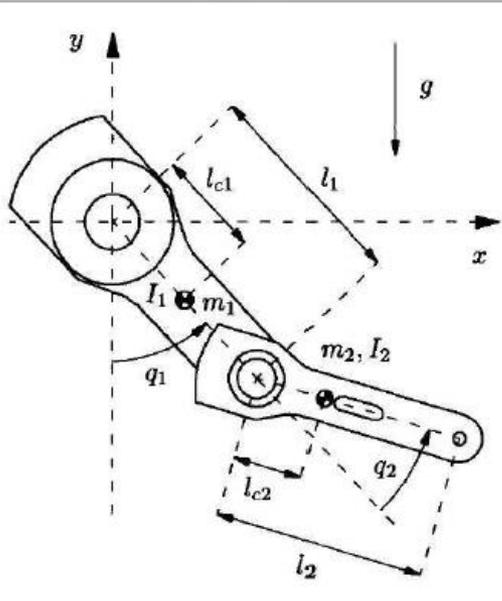
$$+ m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2)$$

$$+ \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 + m_1 l_{c1} g \cos(q_1) + m_2 l_1 g \cos(q_1)$$

$$+ m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2).$$

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



### Planteo de Lagrange

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \dot{q}_1^2 + m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 + m_1 l_{c1} g \cos(q_1) + m_2 l_1 g \cos(q_1) + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2).$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_1} = \tau_1,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_2} = \tau_2,$$

Para el Eslabón 1

$$\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} = [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2] \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) [2\dot{q}_1 + \dot{q}_2] + I_1 \dot{q}_1 + I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2],$$

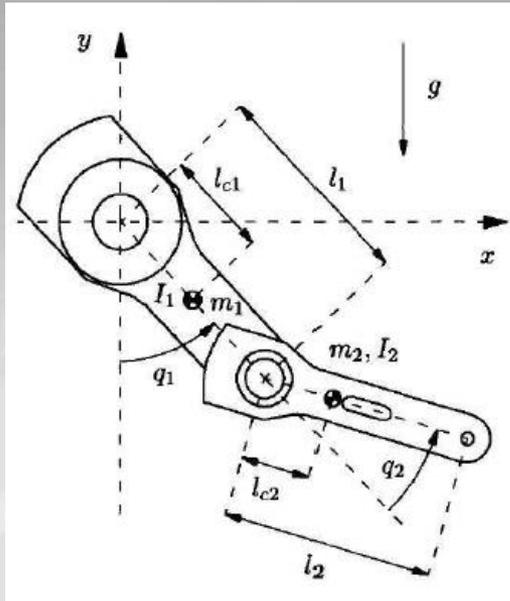
$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right] = [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1 + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + I_1 \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2],$$



$$\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_1} = -[m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) - m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2).$$

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

### MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



### Planteo de Lagrange

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \dot{q}_1^2 + m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 + m_1 l_{c1} g \cos(q_1) + m_2 l_1 g \cos(q_1) + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2).$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_1} = \tau_1,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_2} = \tau_2,$$

Para el Eslabón 2

$$\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_1 + I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2],$$



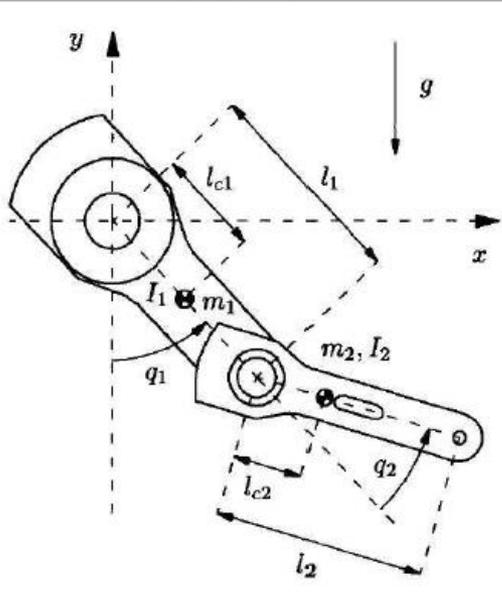
$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right] = m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2],$$



$$\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] - m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2).$$

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_1} = \tau_1,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_2} = \tau_2,$$

Planteo de Lagrange  
TORQUE

Torque Eslabón 1

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \left[ m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right] \ddot{q}_1 \\ & + \left[ m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right] \ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + I_1 \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] \\ & + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2), \end{aligned}$$



Torque Eslabón 2

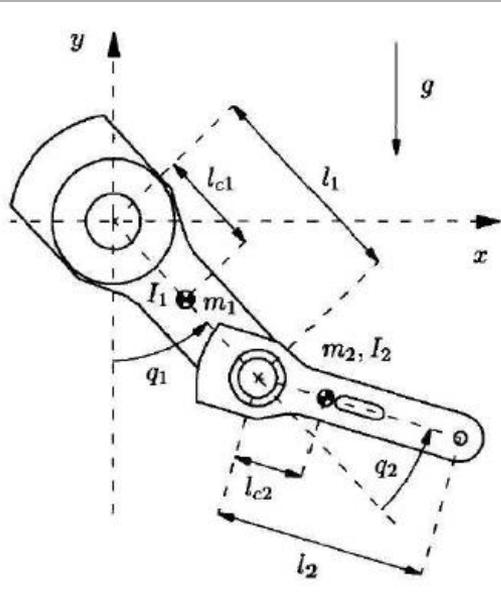
$$\begin{aligned} \tau_2 = & m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] \\ & + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2). \end{aligned}$$



## MODELO DINAMICO LAGRANGE

### MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R

### Planteo de Lagrange



$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q).$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}$$



Torque Eslabón 1

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \left[ m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right] \ddot{q}_1 \\ & + \left[ m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right] \ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + I_1 \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] \\ & + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2), \end{aligned}$$

Torque Eslabón 2

$$\begin{aligned} \tau_2 = & m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] \\ & + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

$$M_{11}(q) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2,$$

$$M_{12}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2,$$

$$M_{21}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2,$$

$$M_{22}(q) = m_2 l_{c2}^2 + I_2,$$

$$C_{11}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2,$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2],$$

$$C_{21}(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1,$$

$$C_{22}(q, \dot{q}) = 0,$$

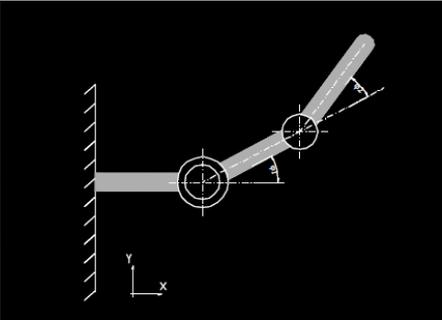
$$g_1(q) = [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2),$$

$$g_2(q) = m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2).$$

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R

Planteo de Lagrange



$$T = \frac{1}{2} m_i \cdot v^2 \quad \text{ENERGIA CINETICA}$$

$$T = \frac{m_1 L_1^2 \dot{\phi}_1^2}{2} + \frac{m_2}{2} \left[ (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos \phi_2) \dot{\phi}_1^2 + L_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2(L_1 L_2 \sin \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \right]$$

$$U = [m_1 g L_1 \sin \phi_1 + m_2 g (L_1 \sin \phi_1 + L_2 \sin(\phi_1 + \phi_2))] \quad \text{ENERGIA POTENCIAL}$$

En base a esta ecuación se podrán calcular las fuerzas de rotación en las articulaciones 1 y 2 a partir de la siguiente expresión:

$$\tau_n = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_n} - \frac{\partial L}{\partial \phi_n}$$

Obteniéndose las siguientes ecuaciones del modelo

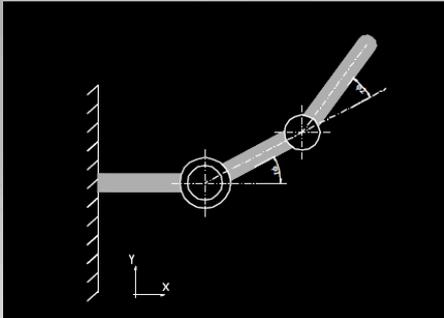
$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \phi_1}$$

$$\tau_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \phi_2}$$

MODELO DINAMICO LAGRANGE

MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R

Planteo de Lagrange



Donde:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = m_1 L_1 \dot{\phi}_1^2 + m_2 (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos \phi_2) \dot{\phi}_1 + m_2 (L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos \phi_2) \dot{\phi}_1^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = m_2 L_2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 (L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos \phi_2) \dot{\phi}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_1} = -m_1 g L_1 \cos \phi_1 - m_2 g [L_1 \cos \phi_1 + L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_2} = -m_2 g L_2 \text{sen} \phi_2 \left( \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \right) - m_2 g L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)$$

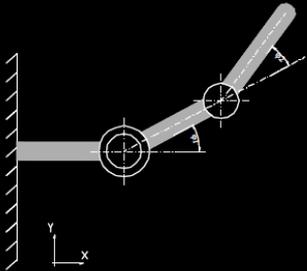
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = m_1 L_1 \ddot{\phi}_1^2 + m_2 (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos \phi_2) \ddot{\phi}_1 - (2m_2 L_1 L_2 \text{sen} \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + m_2 (L_2^2 + L_1 L_2 \cos \phi_2) \ddot{\phi}_2 - (m_2 L_1 L_2 \text{sen} \phi_2) \dot{\phi}_2^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = m_2 \left( L_2^2 + L_1 L_2 \cos \phi_2 \right) \ddot{\phi}_1 + m_2 L_2^2 \ddot{\phi}_2 - (m_2 L_1 L_2 \text{sen} \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2$$

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R

Planteo de Lagrange



Operando y ordenando se obtiene el modelo del brazo

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} \dot{\phi}_2 & C_{12} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \\ C_{21} \dot{\phi}_1 & C_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

 $\tau_1$  y  $\tau_2$  son los torques aplicados directamente en las articulaciones

$$M_{11} = (m_1 + m_2)L_1^2 + m_2L_2^2 + 2m_2L_1L_2 \cos\phi_2$$

$$M_{12} = M_{21} = m_2L_2^2 + m_2L_1L_2 \cos\phi_2$$

$$M_{22} = m_2L_2^2$$

$$C = m_2L_1L_2 \text{sen}\phi_2 \Rightarrow C_{11} = -C$$

$$C_{12} = -C$$

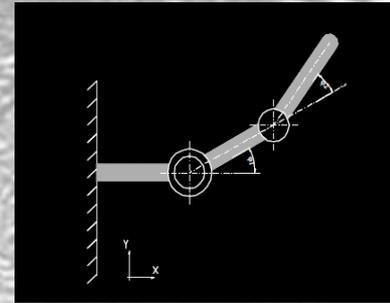
$$C_{21} = C$$

$$C_{22} = 0$$

$$N_1 = (m_1 + m_2)gL_1 \cos\phi_1 + m_2gL_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)$$

$$N_2 = m_2gL_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)$$

## CENTRO DE MASA (Modelo Multiarticular)



$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}$$

$$M_{11}(q) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2,$$

$$M_{12}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2,$$

$$M_{21}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2,$$

$$M_{22}(q) = m_2 l_{c2}^2 + I_2,$$

$$C_{11}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2,$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2],$$

$$C_{21}(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1,$$

$$C_{22}(q, \dot{q}) = 0,$$

$$g_1(q) = [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2),$$

$$g_2(q) = m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2),$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} \dot{\phi}_2 & C_{12} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \\ C_{21} \dot{\phi}_1 & C_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = (m_1 + m_2) L_1^2 + m_2 L_2^2 + 2m_2 L_1 L_2 \cos \phi_2$$

$$M_{12} = M_{21} = m_2 L_2^2 + m_2 L_1 L_2 \cos \phi_2$$

$$M_{22} = m_2 L_2^2$$

$$C = m_2 L_1 L_2 \sin \phi_2 \Rightarrow C_{11} = -C$$

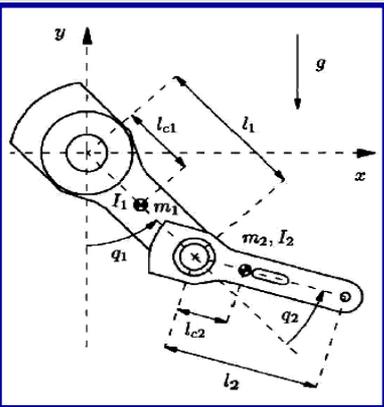
$$C_{12} = -C$$

$$C_{21} = C$$

$$C_{22} = 0$$

$$N_1 = (m_1 + m_2) g L_1 \cos \phi_1 + m_2 g L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)$$

$$N_2 = m_2 g L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)$$



2 Casos a considerar  
Para el Centro de Masa

## ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

### ▲ Robots Paralelos

- ▲ **Definición:** Robot en el cual el efector final esta unido a la base directamente por los accionamientos o por barras.
- ▲ Al haber mas de una cadena cinemática “cerrada”, la cinemática de un robot paralelo es muy diferente a la de un robot serie.
- ▲ La cinemática inversa de un robot paralelo se resuelve fácilmente por métodos geométricos, mientras que la cinemática directa es compleja y se resuelve por métodos numéricos.

### Análisis Dinámico en Robots Paralelos

Dada la presencia de múltiples cadenas cinemáticas cerradas en la estructura mecánica de un robot paralelo, el análisis dinámico no es tan evidente como en el caso de los robots seriales.



## ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

### Formulación de Newton-Euler en Robots Paralelos

Las ecuaciones de movimiento se escriben para cada cuerpo del robot y, aunque sea posible obtener todas las fuerzas internas y externas actuando sobre el mecanismo, el resultado conduce a gran cantidad de ecuaciones difíciles de resolver.

#### Estrategia:

Dado que la mayoría de los robots paralelos están compuestos por una plataforma móvil y varias cadenas seriales que cierran el lazo cinemático uniendo la plataforma móvil a la base, una estrategia es dividir el mecanismo en dos subsistemas, el móvil y la base (subsistema serie más la base móvil).

### Formulación de Lagrange-Euler en Robots Paralelos

Es una aproximación energética que permite evitar el cálculo de las fuerzas de reacción internas del mecanismo. De igual forma, presenta muchas ecuaciones a resolver.

#### Estrategia:

Para simplificar se introduce un conjunto de coordenadas adicionales al sistema de multiplicadores de Lagrange. Es posible así separar el mecanismo en dos subsistemas que combinados, usando la matriz Jacobiana del robot, permiten simplificar el cálculo y obtener así dos sistemas de ecuaciones y resolver.



## ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

### Formulación de D'Alembert en Robots Paralelos

Actualmente, una de las aproximaciones más populares para obtener el modelo dinámico de los robots paralelos es el uso del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV).

Al igual que en los métodos anteriores, se aplica de forma directa el principio para obtener el modelo de robots seriales que cierran el lazo cinemático uniendo la plataforma móvil a la base. Es la misma **Estrategia** de dividir el mecanismo en dos subsistemas, el móvil y la base (subsistema serie mas la base móvil)

### Combinación de métodos.

Este enfoque considera a los robots paralelos como un conjunto de elementos libres y un conjunto de restricciones.

Los trabajos en este campo se centran en la obtención de la relación entre el modelo dinámico del sistema libre o reducido y el sistema sometido a restricciones

## ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

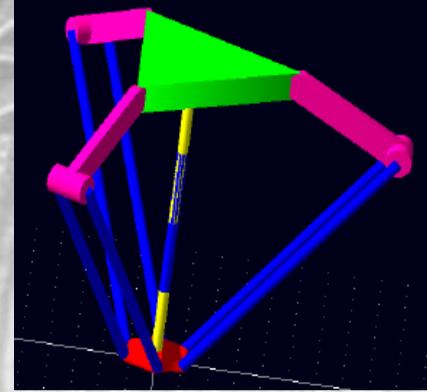
Plataforma Stewart (6 GDL)



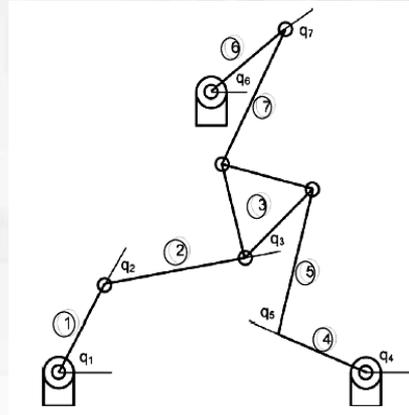
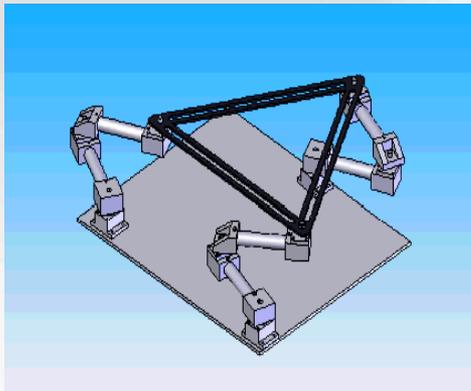
Plataforma Delta (3GDL)



Plataforma Quattro (4GDL)



Plataforma 3RRR (3GDL)



## Configuraciones de los Robot Paralelos)

Es difícil realizar una clasificación sistemática de las estructuras posibles en robótica paralela, dada la gran cantidad de términos que intervienen (número y tipo de cadenas cinemáticas, restricciones, etc).

Sin embargo, según los movimientos que pueden hacer, se pueden clasificar en **Robots planares y espaciales**

## ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

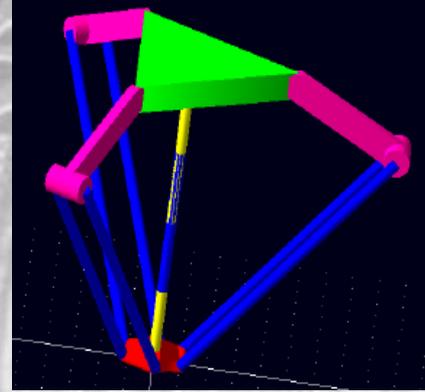
Plataforma Stewart (6 GDL)



Plataforma Delta (3GDL)

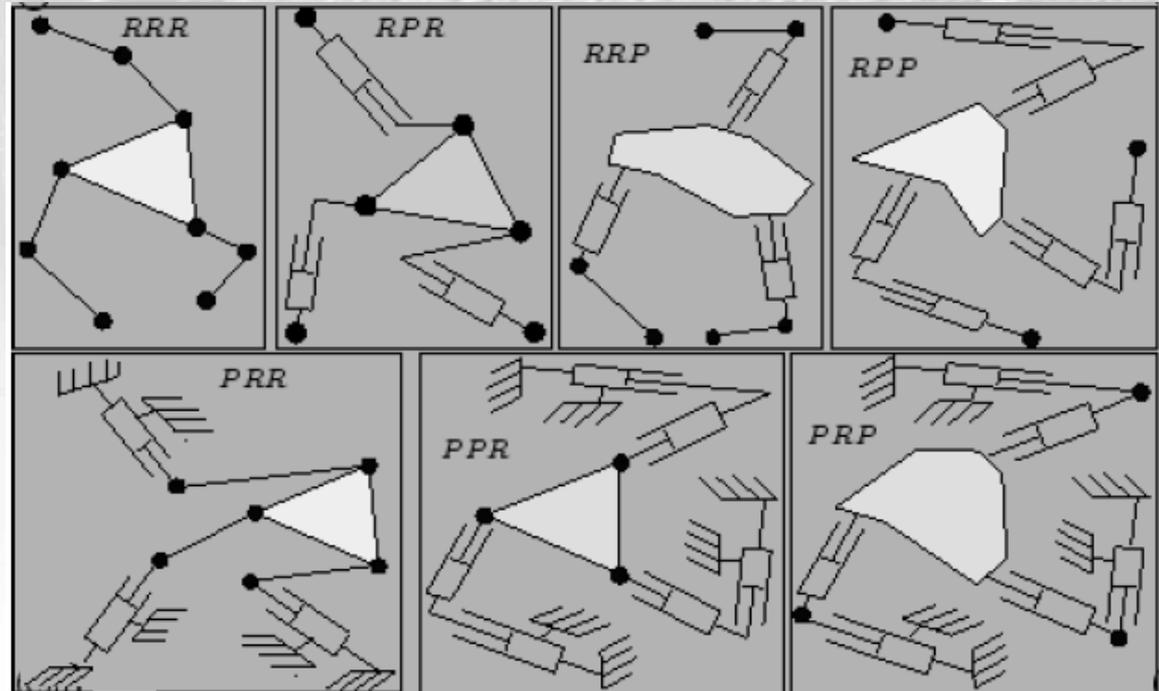
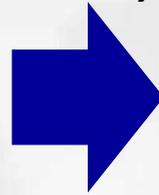
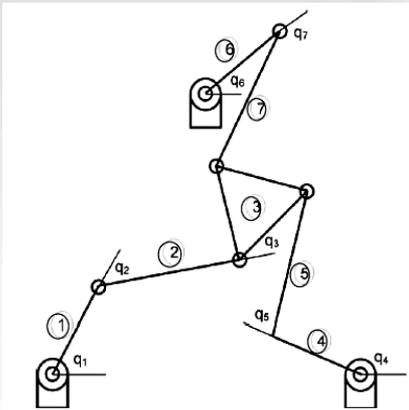


Plataforma Quattro (4GDL)

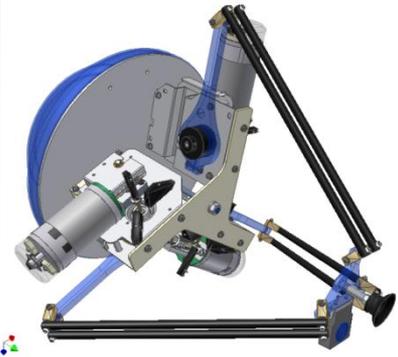


Plataforma 3RRR (3GDL)

Configuraciones Posibles)



**ROBOT DELTA (3GDL)**

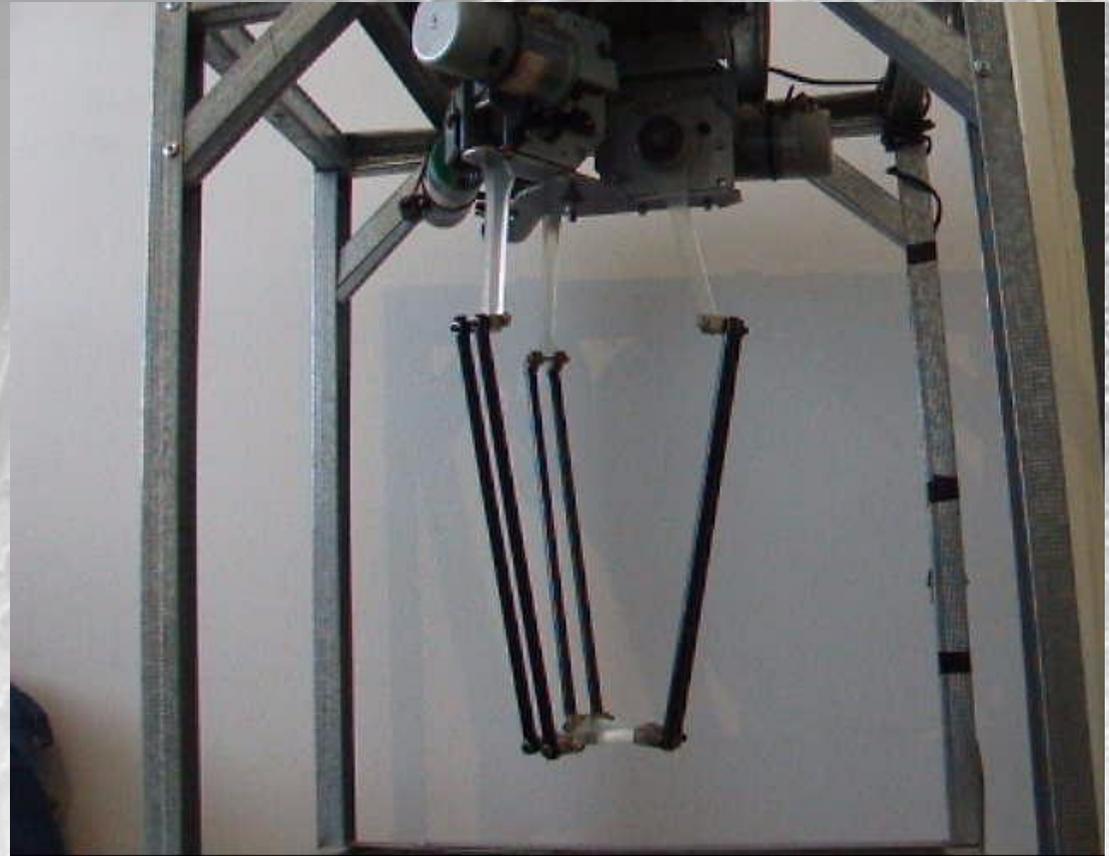


**ROBOT PARALELO TIPO DELTA (3GDL) . 2007-2009**

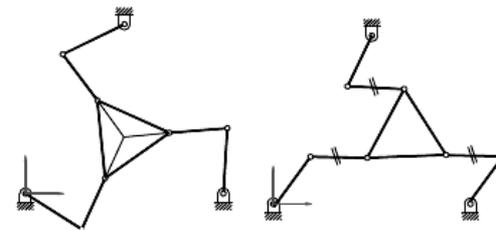
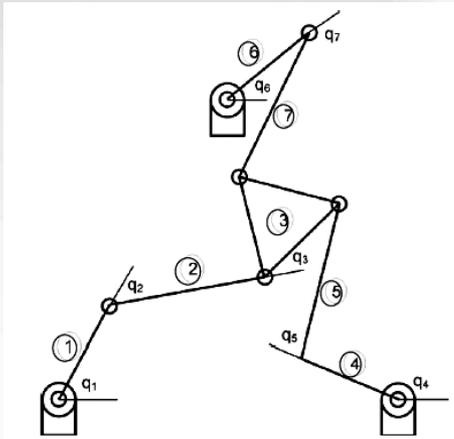
# Modelo Dinámico del Robot

# MODELO DINAMICO ROBOT PARALELO

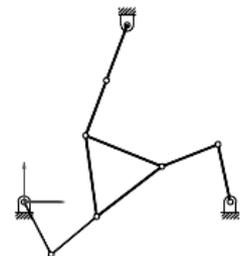
 ROBOT DELTA (3GDL)



Plataforma 3RRR (3GDL)



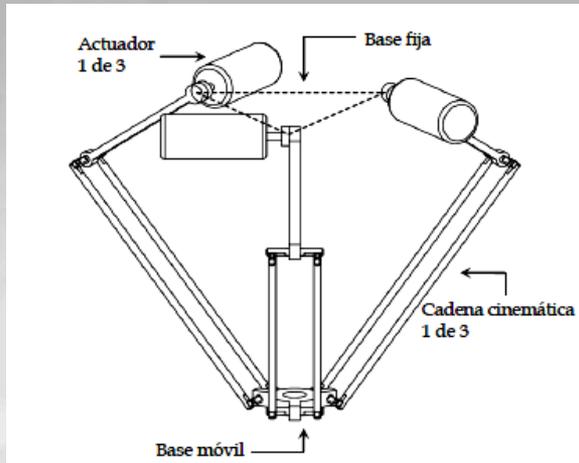
Configuraciones Singulares Paralelas



Configuración Singular Serial

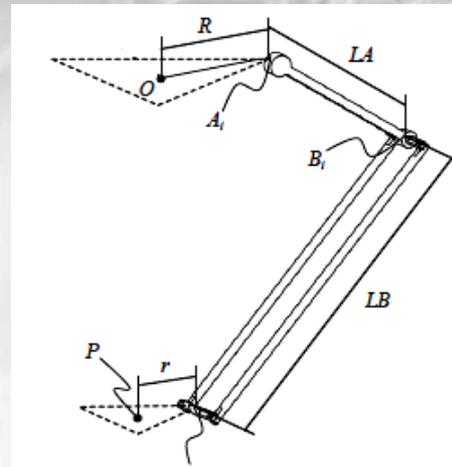
## DINÁMICA ROBOT PARALELOS

El modelado dinámico de robots paralelos es una tarea compleja debido a los múltiples lazos cinemáticos de estas estructuras. Las estrategias propuestas por diversos autores no obtienen, en general, el modelo de forma estructurada



$$\tau = D(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + G(q)$$

### Subsistema Serie (modelo reducido)



La obtención de un modelo con características similares en robótica paralela no es una tarea fácil, debido a las **articulaciones pasivas o no actuadas**. La aparición de éstas en la estructura incrementa la complejidad de los problemas cinemático y dinámico.

### Estrategia

La mayoría de los mecanismos paralelos está compuesto por una plataforma móvil y un grupo de cadenas serie uniendo ésta a la base. Una estrategia es dividir el mecanismo en dos subsistemas. De este modo, se calcula el modelo dinámico de cada uno de los subsistemas, considerando las fuerzas de reacción entre ambos, y en un paso posterior, se unen ambos sistemas utilizando diversas técnicas

## MODELO DINAMICO LAGRANGIANO ROBOT PARALELO

Mecanismo con  $n = n_a$  grados de libertad, cuya plataforma móvil está unida a la base por  $n$  cadenas serie.

### Ecuaciones de Cierre

La relación entre las coordenadas cartesianas  $x$  y las coordenadas articulares activas independientes  $q_a$ :

$$\phi_i(x, q_a) = 0, i = 1, \dots, n$$

La relación entre  $x$  y  $q_r$ :

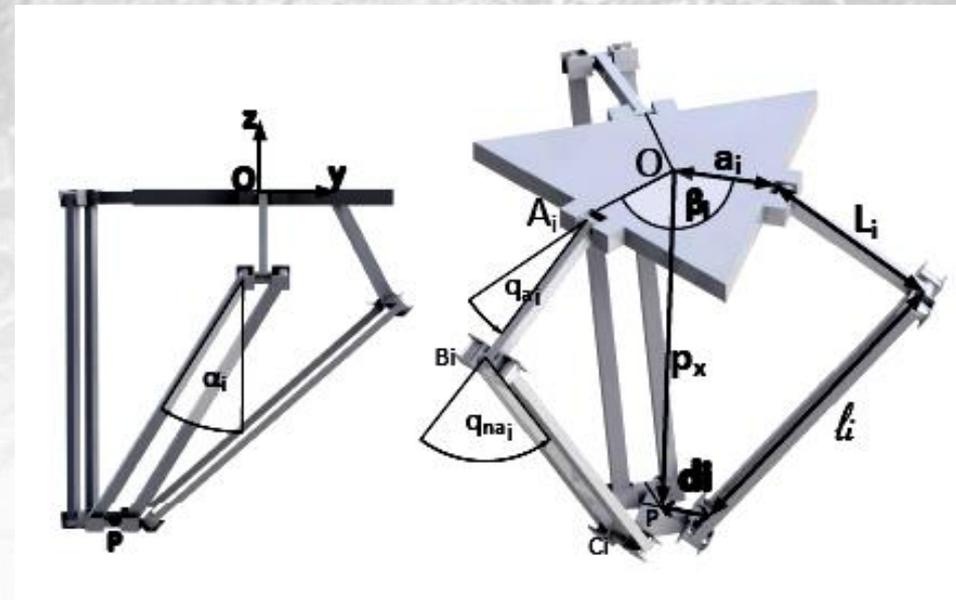
$$\Gamma_i(x, q_r) = 0 \rightarrow x = f_i(q_r), i = 1, \dots, n$$

La relación entre las coordenadas articulares activas  $q_a$  y las coordenadas articulares pasivas no sensorizadas  $q_p$  y sensorizadas  $q_s$ :

$$f_s(q_a, x, q_s) = 0$$

$$f_p(q_a, x, q_s) = 0$$

Sea  $q_a$  el conjunto de *articulaciones activas* del mecanismo, de dimensión  $n_a = n$ ,  $q_p$  el conjunto de  $n_p$  articulaciones *pasivas no sensorizadas* y  $q_s$  el conjunto de  $n_s$  articulaciones *pasivas sensorizadas*. El conjunto de *coordenadas de control* se definirá tal que  $q = [q_a \ q_s]^T$  y el conjunto de  $n_r = n_a + n_p + n_s$  *coordenadas generalizadas* como  $q_r = [q \ q_p]^T$ . Sea  $x$  el vector de coordenadas cartesianas del elemento terminal



## MODELO DINAMICO LAGRANGIANO ROBOT PARALELO

**Ecuación Lagrangiana** Se considera el mecanismo como la suma de los dos subsistemas: plataforma móvil y subsistemas serie.

Se calcula la ecuación Lagrangiana de cada subsistema en función de las coordenadas de cada uno. La función Lagrangiana de la **Plataforma móvil  $L_p$**  está definida en función de las coordenadas cartesianas  $\mathbf{X}(x,y,z)$ . La función Lagrangiana asociada al **subsistema serie  $L_s$**  está definida en función de las coordenadas articulares generalizadas  $\mathbf{q}_r$ .

$$L = L_s(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r) + L_p(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$$

Ecuaciones diferenciales asociada con el subsistema serie  $j = 1, \dots, n_r$

Se aplican multiplicadores de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_s}{\partial \dot{q}_{r_j}} \right) - \frac{\partial L_s}{\partial q_{r_j}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{\partial \Gamma_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r)}{\partial q_{r_j}} + \tau_{r_j}$$

donde  $\tau_{r_j}$  representa la fuerza/par virtual asociado a  $\mathbf{q}_r$ .

**Subsistema serie + Plataforma móvil**

Ecuaciones diferenciales asociadas a la plataforma móvil  $k = 1, \dots, n$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L_p}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{\partial \Gamma_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r)}{\partial x_k} + Q_{x_k}$$

donde  $Q_{x_k}$  son las fuerzas/pares externos aplicados en el elemento terminal.

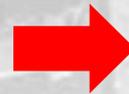
## MODELO DINAMICO LAGRANGIANO ROBOT PARALELO

### Ecuación Lagrangiana

Agrupando los términos de las ecuaciones diferenciales en matrices y considerando que los multiplicadores de Lagrange, en relacionados con las fuerzas internas que unen ambos subsistemas

$$\tau = D(x, q_r) \ddot{q} + C(x, q_r, \dot{x}, \dot{q}_r) \dot{q} + G(x, q_r) + F_e$$

$$\begin{cases} D(x, q_r) = T^T \cdot D' \cdot T_q \\ C(x, q_r) = T^T \cdot (C' \cdot T_q + D' \cdot \dot{T}_q) \\ G(x, q_r) = T^T \cdot G' \\ F_e = T^T \cdot F_{ext} \end{cases}$$



### Subsistema serie

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_s}{\partial \dot{q}_{r_j}} \right) - \frac{\partial L_s}{\partial q_{r_j}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{\partial \Gamma_i(x, q_r)}{\partial q_{r_j}} + \tau_{r_j}$$

### Plataforma móvil

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L_p}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{\partial \Gamma_i(x, q_r)}{\partial x_k} + Q_{x_k}$$

$$\begin{aligned} D'(x, q_r) &= [D_r - J_C^T D_x A_x] \\ C'(x, q_r, \dot{x}, \dot{q}_r) &= [C_r - J_C^T (D_x B_x + C_x J_C)] \\ G'(x, q_r) &= [G_r - J_C^T G_x] \\ F_{ext} &= J_{P_r}^T \cdot Q_x \end{aligned}$$

### Subsistema Serie

$D_r$  matriz de inercia.  $C_r$  términos de coriolis.

$G_r$  vector de gravedad

### Plataforma móvil

$D_x$  matriz de inercia plataforma móvil

$C_x$  términos de coriolis

$G_x$  vector de gravedad

$J_C$  Matriz Jacobiana de Restricción

$Q_x$  es el vector de fuerzas/pares externos aplicados en la plataforma móvil.

## MODELO DINAMICO LAGRANGIANO ROBOT PARALELO

### Matriz Jacobiana de Restricción $J_C$

Relaciona la velocidad de las coordenadas cartesianas de la plataforma móvil  $v$  y las velocidades de las coordenadas articulares generalizadas de los subsistemas serie  $\dot{q}_r$

**Se obtiene de la relación entre  $x$  y  $q_r$**

$$v = J_C(x, q_r) \dot{q}_r$$

$v$  Velocidad cartesiana del elemento terminal, que consta de una velocidad de traslación lineal  $p^c$  y una velocidad angular  $\omega$ .

### Matriz Jacobiana del robot $J_R$

$$v = J_R(x, q_a) \cdot \dot{q}_a$$

**Se obtiene** de la relación entre las coordenadas cartesianas  $x$  y las coordenadas articulares activas independientes  $q_a$ :

$$\phi_i(x, q_a) = 0, i = 1, \dots, n$$

### Matriz de transformación $T$

Matriz que relaciona las articulaciones activas  $q^a$  y las coordenadas articulares generalizadas del subsistema serie  $q^r$ :

$$\dot{q}_r = T \dot{q}_a$$

### Aceleraciones

$$a = J_R \cdot \ddot{q}_a + \dot{J}_R \cdot \dot{q}_a$$

$$\ddot{q}_r = \frac{d}{dt} (T \cdot \dot{q}_a) = T \ddot{q}_a + \dot{T} \dot{q}_a$$

$$\ddot{q}_r = \frac{d}{dt} (T_q \cdot \dot{q}) = T_q \ddot{q} + \dot{T}_q \dot{q}$$

donde,  $a = \dot{v}$  es la aceleración cartesiana del elemento terminal.

## UNIDAD 2. Modelo Dinámico del Robot

## Bibliografía de Referencia

Autor	Título	Editorial	Año	Ejemplares Biblioteca	Unid. Prog
B. Ollero	Robótica	Alfaomega	2007	1	2-3-5
J. Craig	Robótica.	Pearson	2006	1	2-3
A. Barrientos et all	Fundamentos de Robótica.	McGraw Hill	2007	1	1-2-3-5
Ollero Baturone	Robótica. Manipuladores y robot móviles	Alfaomega	2007	1	2-3-4
Angulo, Yesa, Martínez	Microrobótica.	Editorial Thomson.	2002	no	
W. Bolton	Sistemas de control electrónico en la ingeniería mecánica y eléctrica. (3°ed.	Alfaomega	2006	1	2-3
J. Angulo	Robótica Práctica. Tecnologías y Aplicaciones.	Paraninfo	1986	1	1-2
M. Groover, Weiss Nagel & N. Odrey	Robótica Industrial. Tecnología, Programación y Aplicaciones.	McGraw Hill	1989	1	3-4
F. Cembranos Nistal	Sistemas de Control Secuencial.	Thomson	2002	1	2-3
<a href="#">Fernando Reyes Cortés</a>	Robótica: Control de Robots Manipuladores	Alfaomega	2011	---	
Tomás de J. Mateo Sanguino	Robótica Móvil. Principios, Tendencias y Aplicaciones: Cinemática, Filtro de Partículas, Inteligencia Artificial	Createspace	2014	---	
Hibbeller	Mecánica vectorial para ingenieros: dinámica	Pearson	2004	---	

Autor	Título	Editorial	Año	Ejemplares Biblioteca	Unid. Prog
F. Torres Medina	Robot y Sistemas sensoriales. Ed.	Pearson	2002		1-2-3
R. Kelly & V. Santibañez	Control de Movimientos de Robot Manipuladores.	Pearson	2003		2-3
J. Angulo Usategui et all	Introducción a la Robótica.	Paraninfo.	2005		1-2
M. Gomez et all	Teleoperación y Telerrobótica.	Prentice Hall	2006		1-2
R. Mott	Diseño de elementos de máquinas. 4°ed.	Pearson	2006	1	1
<a href="#">Etxebarria Víctor</a>	Sistemas de Control no lineal y Robótica	Euskal Herriko Unibertsitatea	1999		
W. Bolton	Instrumentación y control Industrial.	Paraninfo	1996	1	
Maloney Timothy	Electrónica Industrial Moderna. 5°ed.	Pearson	2006	1	2-3