TEMA 1 – INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DEL CONTINUO

OBJETIVO: Estudio de deformaciones y/o flujos y las tensiones asociadas a ellas en medios continuos. Provee un marco teórico general para el desarrollo de las siguientes disciplinas de acuerdo a la naturaleza del material que conforma el continuo:

SÓLIDOS -> Elasticidad, Plasticidad, Viscoplasticidad, etc..
LIQUIDOS -> Mecánica de los fluidos, Hidráulica, etc…
GASEOSOS -> Aerodinámica …

EVOLUCIÓN HISTÓRICA

Física

Newton, Euler, Cauchy, etc…

AVANCES PRELIMINARES (1800 - 1940)

- MECÁNICA DE FLUIDOS
- ELASTICIDAD
- AERODINÁMICA
- TEORIAS DE FALLA DE MATERIALES
- OTRAS TEORÍAS

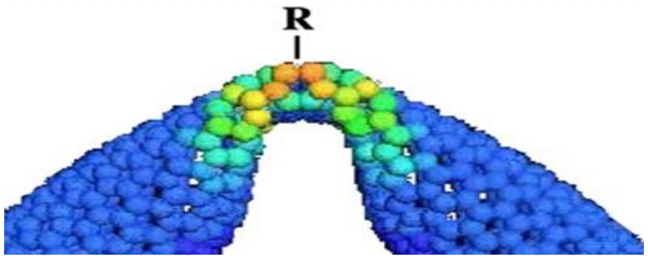
UNIFICACION (1940 – 1960)

- MECÁNICA DEL CONTINUO
- TRUESDELL Y TOUPIN
- TRUESDELL Y NOLL
- MALVERN

ACTUALIDAD (1960 -)

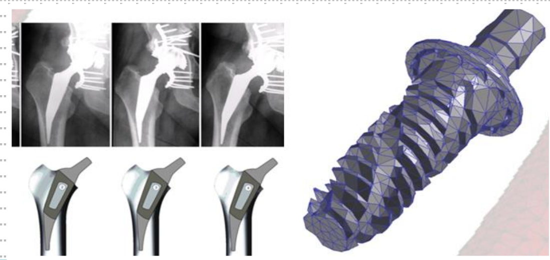
- MECÁNICA MULTIESCALA
- BIOMECÁNICA
- QUIMIOMECÁNICA
- OTROS…

CLASIFICACIÓN DE ACUERDO A LA ESCALA



Nano y Micromecánica

(Nanotubos de



Mesomecánica

(Biomecánica)

Macromecánica

(Puentes, Aviones, Barcos…)

TEMA 1 – INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DEL CONTINUO

HIPÓTESIS FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA DEL CONTINUO

Si bien la naturaleza de la materia es discontinua (formada por moléculas, átomos, partículas elementales; dependiendo de la escala observada), se admite la existencia de una región del espacio ocupada por materia de forma continua, denominada CONTINUO

CONTINUO: Concepto fundamental. Región del espacio designada como Ω (finita, semiinfinita o infinita) ocupada por materia (sólido/líquido/gas) donde se admiten las siguientes hipótesis:

A) Continuidad: para toda función $f(\mathbf{X}) \in \mathbf{\Omega}$ se cumple:

CONTINUIDAD

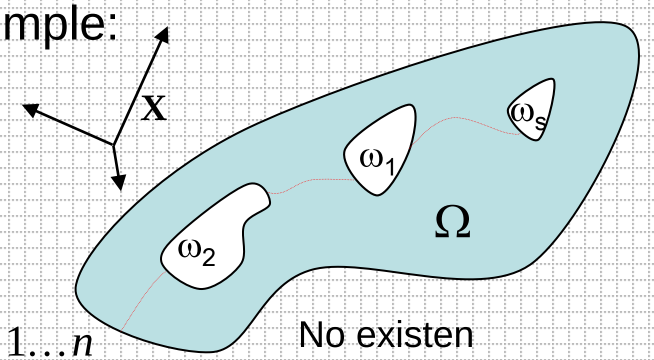
si $f(\mathbf{X}) \in \Omega \Rightarrow$

$$\lim_{\mathbf{X}\to +\mathbf{X}i} f(\mathbf{X}) = \lim_{\mathbf{X}\to -\mathbf{X}i} f(\mathbf{X}) \forall \mathbf{X}i \in \Omega$$

$$\exists \frac{\partial^k f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^k}; k = 1 \ldots n$$

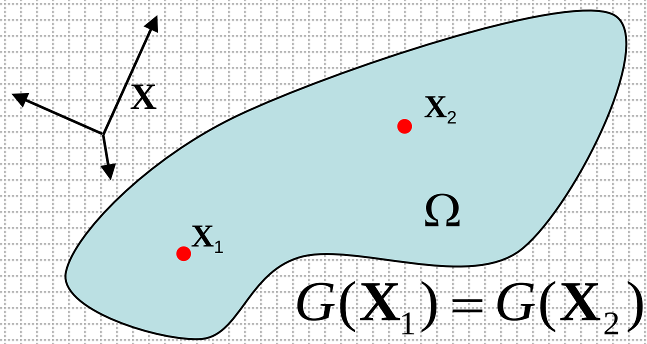
$$\lim_{\mathbf{X}\to +\mathbf{X}i} \frac{\partial^k f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^k} = \lim_{\mathbf{X}\to -\mathbf{X}i} \frac{\partial^k f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^k} \forall \mathbf{X}i \in \Omega; k = 1 \ldots n$$

ORDEN



No existen discontinuidades o bien el número de subregiones *s* es finito

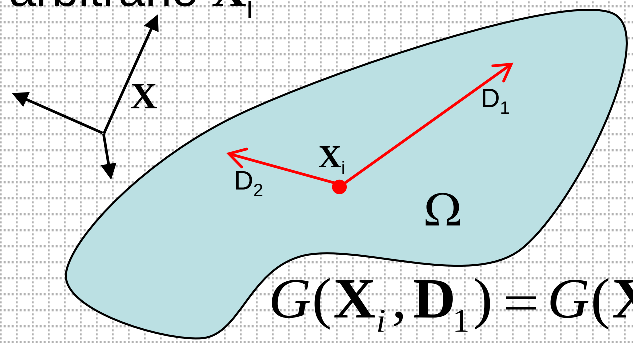
B) Homogeneidad: Dada una propiedad G en el dominio



$$G(\mathbf{X}_1) = G(\mathbf{X}_2) \forall \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \Omega$$

Esta condición se puede relajar a $G(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) \in \Omega$

C) Isotropia: Dada una propiedad G en el dominio y dos direcciones D1 y D2 en un punto arbitrario $\mathbf{X}_i$



$$G(\mathbf{X}_i, \mathbf{D}_1) = G(\mathbf{X}_i, \mathbf{D}_2) \forall \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$$

Esta condición se puede relajar a $G(\mathbf{X}, \mathbf{D}) = f(\mathbf{X}, \mathbf{D}) \in \Omega$

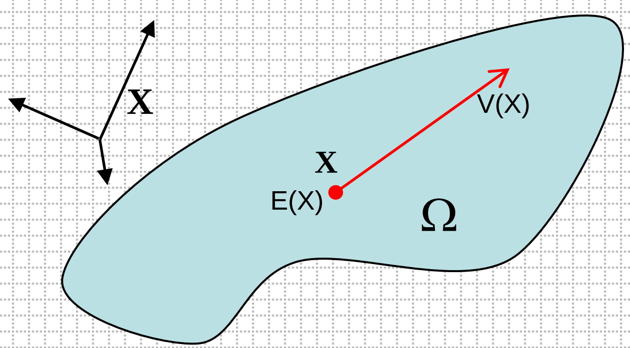
TEMA 2: VECTORES Y TENSORES - INTRODUCCION

INVARIANCIA: En la formulación de una teoría acerca de un fenómeno, significa independencia del sistema físico de referencia → Se asegura al utilizar ecuaciones invariantes para todo sistema de referencia.

MAGNITUDES FÍSICAS: Propiedades mensurables de un cuerpo ó sistema. Las teorías físicas relacionan magnitudes y permiten predecir la evolución de las mismas a partir de un conjunto determinado de condiciones conocidas.

MAGNITUDES DE PUNTO: Presentan un valor definido para cada punto del espacio ó dominio de análisis.

- ESCALARES: Quedan caracterizadas por un valor escalar.
  - Ej.: Temperatura, Humedad, Altura sobre un plano
- VECTORIALES: Con Magnitud, Dirección y Sentido.
  - Ej.: Fuerza, Velocidad, Aceleración, Flujo



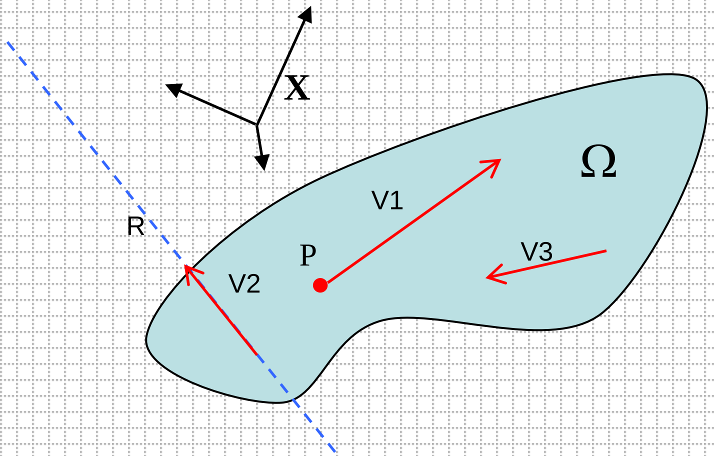
TEMA 2: VECTORES Y TENSORES - INTRODUCCION

TIPOS DE VECTORES:

A) FIJOS: Aplicados en un punto determinado del espacio, P

B) DESLIZANTES: Aplicados en cualquier punto del espacio que pertenezca a una recta R

C) LIBRES: Aplicados en cualquier punto del espacio



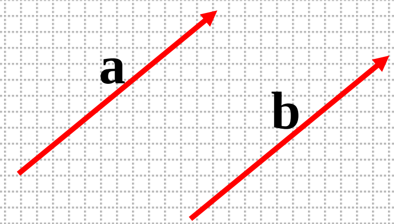
V1: FIJO
V2: DESLIZANTE
V3: LIBRE

TEMA 2: VECTORES Y TENSORES – PROPIEDADES

PROPIEDADES:

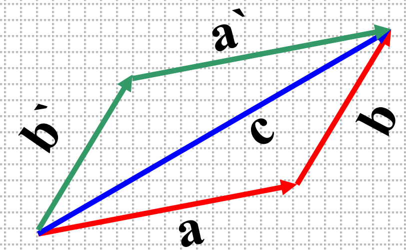
A) IGUALDAD

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \text{ si } \begin{cases} |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \\ \text{Tienen } = \text{Dirección} \\ \text{Tienen } = \text{Sentido} \end{cases}$$



B) SUMA: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vectores del mismo tipo (velocidades, fuerzas, etc.)

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{a}'$$



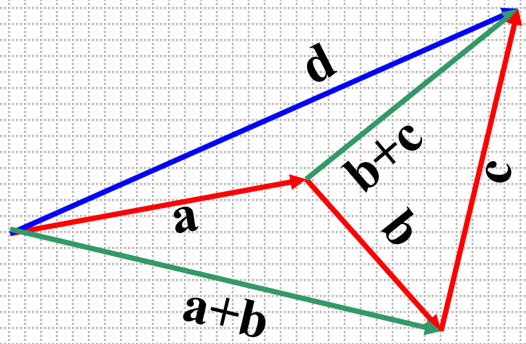
B.1) PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{a}' \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}' \\ \mathbf{b} = \mathbf{b}' \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

PROPIEDADES:

B.2) PROPIEDAD ASOCIATIVA: **a**, **b, c** vectores del mismo tipo

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

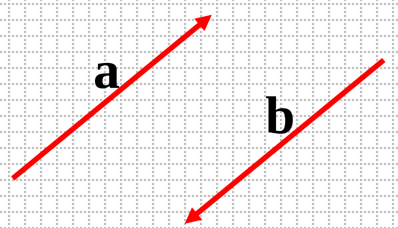


B.3) ELEMENTO NULO

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a} \begin{cases} |\mathbf{0}| = 0 \\ \text{Dirección y Sentido Indefinidos} \end{cases}$$

B.4) VECTOR OPUESTO

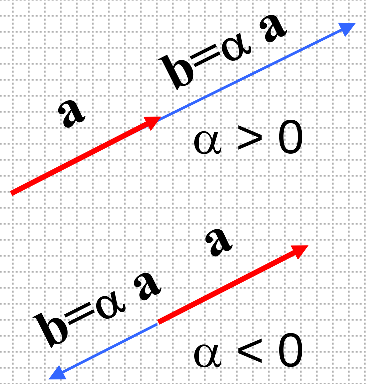
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{-a} \begin{cases} |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \\ \text{Igual Dirección y Sentido Opuesto} \end{cases}$$



TEMA 2: VECTORES Y TENSORES – PROPIEDADES

PROPIEDADES:

C) PRODUCTO POR UN ESCALAR: α un escalar real



$$\mathbf{b} = \alpha \cdot \mathbf{a} \begin{cases} |\mathbf{b}| = \alpha \cdot |\mathbf{a}| \\ \text{si } \alpha > 0 \Rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b} = \text{Sentido y Dirección} \\ \text{si } \alpha < 0 \Rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b} = \text{Dirección, Sentido opuesto} \end{cases}$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\alpha = -1 \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}$$

D) VECTOR UNITARIO: Tiene módulo unidad

$$\mathbf{1} = \mathbf{u}; |\mathbf{1}| = 1$$

$$\forall \mathbf{a}; \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{u} \rightarrow \exists \text{ un vector unitario } \mathbf{u} = \mathbf{a} / |\mathbf{a}|$$

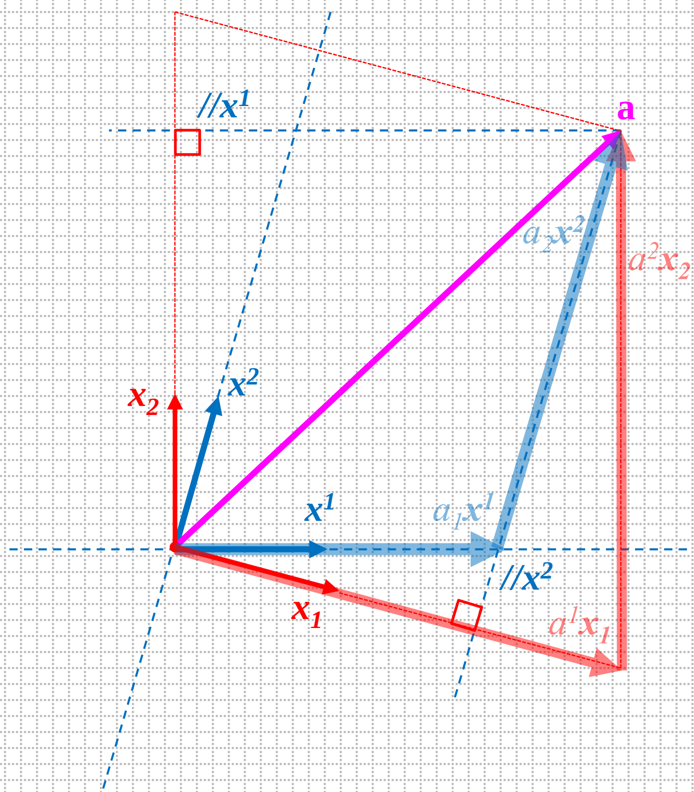
TEMA 2: VECTORES Y TENSORES – COMPONENTES

COMPONENTES VECTORIALES:

Dado un vector **a** en $\mathcal{E}^2$, y dos conjuntos de vectores $\{\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}\}$ y $\{\boldsymbol{x^1},\boldsymbol{x^2}\}$ que son bases de $\mathcal{E}^2$ si

$$\boldsymbol{x_1} \neq \alpha\, \boldsymbol{x_2} \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \therefore \boldsymbol{x_2} \neq \alpha\, \boldsymbol{x_1} \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\}\ son\ linealmente\ independientes$$

$$\boldsymbol{x^1} \neq \alpha\, \boldsymbol{x^2} \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \therefore \boldsymbol{x^2} \neq \alpha\, \boldsymbol{x^1} \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow \left\{\boldsymbol{x^1}, \boldsymbol{x^2}\right\}\ son\ linealmente\ independientes$$



El vector a puede expresarse como una combinación lineal de los vectores de cada una de estas bases como

$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{x_1} + a^2\boldsymbol{x_2}$ en las direcciones de $\{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\}$ [A]

$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{x^1} + a_2\boldsymbol{x^2}$ en las direcciones de $\left\{\boldsymbol{x^1}, \boldsymbol{x^2}\right\}$

Las direcciones de $\left\{\boldsymbol{x^1}, \boldsymbol{x^2}\right\}$ se definen tal que:

- La dirección de $\boldsymbol{x^1}$ coincide con la normal a $\boldsymbol{x_2}$ pasante por el extremo de **a**
- La dirección de $\boldsymbol{x^2}$ coincide con la normal a $\boldsymbol{x_1}$ pasante por el extremo de **a**

NOTA: si la magnitud de los vectores de la base $\{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\}$ varía (por ejemplo aumenta), los valores de los coeficientes de combinación lineal a^1 y a^2 deben variar en el sentido opuesto para mantener la igualdad [A], por esto se denominan *“Componentes contravariantes del vector* $\boldsymbol{a}$*”*

COMPONENTES VECTORIALES:

Generalizando: Dado un vector $\mathbf{a}$ y dos bases $\mathbf{B_i}$ y $\mathbf{B^i}$ en E^n

$\mathbf{B_i} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_i, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ y $\mathbf{B^i} = \{\boldsymbol{b}^1, \boldsymbol{b}^2, \cdots, \boldsymbol{b}^i, \cdots, \boldsymbol{b}^n\}$ $\mathbf{a}$ puede expresarse como

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{b}_1 + a^2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + a^i\boldsymbol{b}_i + \cdots + a^n\boldsymbol{b}_n = a_1\boldsymbol{b}^1 + a_2\boldsymbol{b}^2 + \cdots + a_i\boldsymbol{b}^i + \cdots + a_n\boldsymbol{b}^n$$

Los conjuntos de vectores $\mathbf{B_i}$ y $\mathbf{B^i}$ son bases de E^n si los elementos que los componen ($\boldsymbol{b}_i$ y $\boldsymbol{b}^i$, respectivamente) son linealmente independientes, es decir:

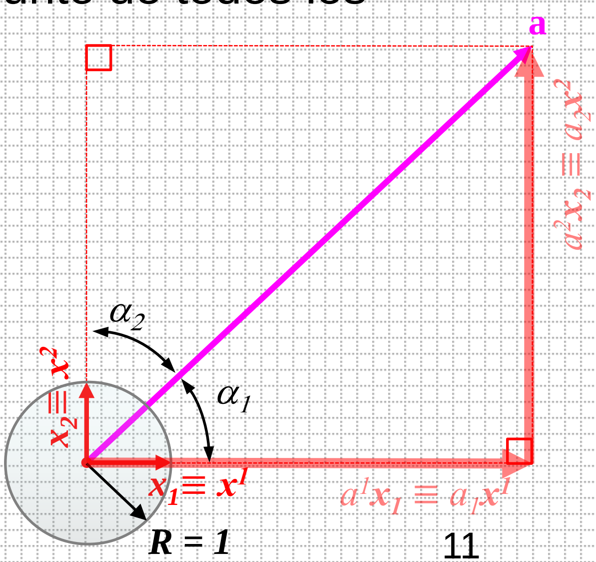
$$\boldsymbol{b}_i \neq \alpha^1\boldsymbol{b}_1 + \alpha^2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha^{i-1}\boldsymbol{b}_{i-1} + \alpha^{i+1}\boldsymbol{b}_{i+1} + \cdots + \alpha^j\boldsymbol{b}_j + \cdots + \alpha^n\boldsymbol{b}_n \; \forall\alpha_j \in \mathbb{R}, \mathrm{j} \neq i$$
$$\boldsymbol{b}^i \neq \alpha_1\boldsymbol{b}^1 + \alpha_2\boldsymbol{b}^2 + \cdots + \alpha_{i-1}\boldsymbol{b}^{i-1} + \alpha_{i+1}\boldsymbol{b}^{i+1} + \cdots + \alpha_j\boldsymbol{b}^j + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{b}^n \; \forall\alpha_j \in \mathbb{R}, \mathrm{j} \neq i$$

En otras palabras, $\boldsymbol{b}_i \notin E^{n-1}$ cuya base es $\mathbf{B_i} - \boldsymbol{b}_i$ (el conjunto de todos los vectores de la base menos $\boldsymbol{b}_i$)

Si $\boldsymbol{b}_i \perp \boldsymbol{b}_j \forall\, j \neq i$ →Base Ortogonal

Si $\boldsymbol{b}_i \perp \boldsymbol{b}_j \forall\, j \neq i \;\wedge\; |\boldsymbol{b}_i| = 1$ → Base Ortonormal

En E^2 y utilizando una base ortonormal $\mathbf{X}_1 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$, un vector $\boldsymbol{a}$ se descompone como muestra la figura, es decir, las bases $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}^1 = \{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2\}$ coinciden y la distinción entre componentes contravariantes y covariantes no es necesaria.



TEMA 2: VECTORES Y TENSORES – COMPONENTES

Considerando una base ortonormal en $\mathcal{E}^3$ $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\} = \{\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3\} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ (distintas designaciones de los vectores de la base)

$$\mathbf{a} = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k} = a_1 \cdot \mathbf{i}_1 + a_2 \cdot \mathbf{i}_2 + a_3 \cdot \mathbf{i}_3$$

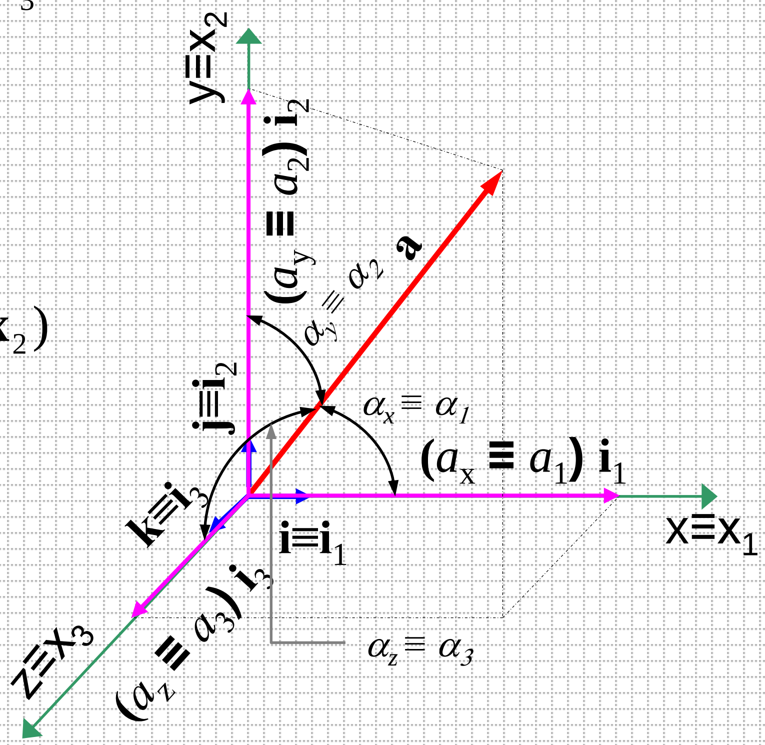
$$a_x = a_1 = |\mathbf{a}| \cos(\alpha_x) = |\mathbf{a}| \cos(\alpha_1) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_1$$

$$a_y = a_2 = |\mathbf{a}| \cos(\alpha_y) = |\mathbf{a}| \cos(\alpha_2) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_2$$

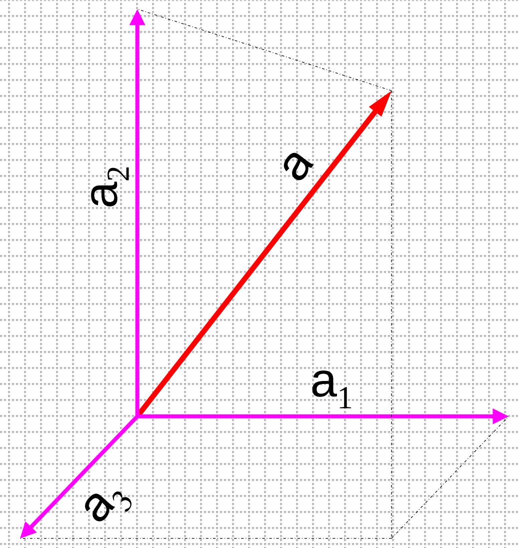
$$a_z = a_3 = |\mathbf{a}| \cos(\alpha_z) = |\mathbf{a}| \cos(\alpha_3) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_3$$

$$\alpha_x = \alpha_1 = \mathbf{a} \angle (\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_1); \alpha_y = \alpha_2 = \mathbf{a} \angle (\mathbf{y} \equiv \mathbf{x}_2)$$

$$\alpha_z = \alpha_3 = \mathbf{a} \angle (\mathbf{z} \equiv \mathbf{x}_3)$$



Aplicando el T. de Pitágoras 3D



$$|\mathbf{a}| = a$$

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$a^2 = a^2 \cdot \cos^2(\alpha_1) + a^2 \cdot \cos^2(\alpha_2) + a^2 \cdot \cos^2(\alpha_3)$$

$$\cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = 1$$

SUMA EN COMPONENTES

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow$$

$$c_1 \cdot \mathbf{i}_1 + c_2 \cdot \mathbf{i}_2 + c_3 \cdot \mathbf{i}_3 = a_1 \cdot \mathbf{i}_1 + a_2 \cdot \mathbf{i}_2 + a_3 \cdot \mathbf{i}_3 + b_1 \cdot \mathbf{i}_1 + b_2 \cdot \mathbf{i}_2 + b_3 \cdot \mathbf{i}_3$$

Agrupando en los versores

$$c_1 \cdot \mathbf{i}_1 + c_2 \cdot \mathbf{i}_2 + c_3 \cdot \mathbf{i}_3 = (a_1 + b_1) \cdot \mathbf{i}_1 + (a_2 + b_2) \cdot \mathbf{i}_2 + (a_3 + b_3) \cdot \mathbf{i}_3$$

Es decir

$$c_1 = (a_1 + b_1);\ c_2 = (a_2 + b_2);\ c_3 = (a_3 + b_3)$$

NOTACION INDICIAL

$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{i}_1 + a_2 \cdot \mathbf{i}_2 + a_3 \cdot \mathbf{i}_3$$

$$a_1 = a \cdot \cos(\alpha_1);\ a_2 = a \cdot \cos(\alpha_2);\ a_3 = a \cdot \cos(\alpha_3)$$

$$\text{Si } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \Rightarrow n_1 = \cos(\alpha_1);\ n_2 = \cos(\alpha_2);\ n_3 = \cos(\alpha_3) \Rightarrow$$

$$a_1 = a \cdot n_1;\ a_2 = a \cdot n_2;\ a_3 = a \cdot n_3$$

Se logra más compacidad haciendo

$$\mathrm{i} = 1 \ldots 3$$

$$a_i = a \cdot n_i$$

Ejemplo:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow c_i = a_i + b_i$$

CONVENCION DE SUMA DE EINSTEIN: En algebra vectorial es frecuente realizar sumatorias, por ejemplo

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sum_{i=1}^{3} a_i^2$$

Convención de suma en coordenadas rectangulares: un subíndice repetido indica sumatoria en ese índice, por ejemplo

$$a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2$$

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$a_{2j} b_{j3} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33}$$

Convención de suma en coordenadas curvilíneas: un subíndice repetido como superíndice indica sumatoria en ese índice, por ejemplo

$$a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3$$

NOTA: El resultado de una expresión puede ser un escalar, un vector, un tensor ó un sistema de ecuaciones.

EJEMPLOS:

$t_i = T_{ij}\, n_j$

$$\begin{pmatrix} t1 \\ t2 \\ t3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n1\,T11 + n2\,T12 + n3\,T13 \\ n1\,T21 + n2\,T22 + n3\,T23 \\ n1\,T31 + n2\,T32 + n3\,T33 \end{pmatrix}$$

$ev = \epsilon_{kk}$

$$ev = \epsilon 11 + \epsilon 22 + \epsilon 33$$

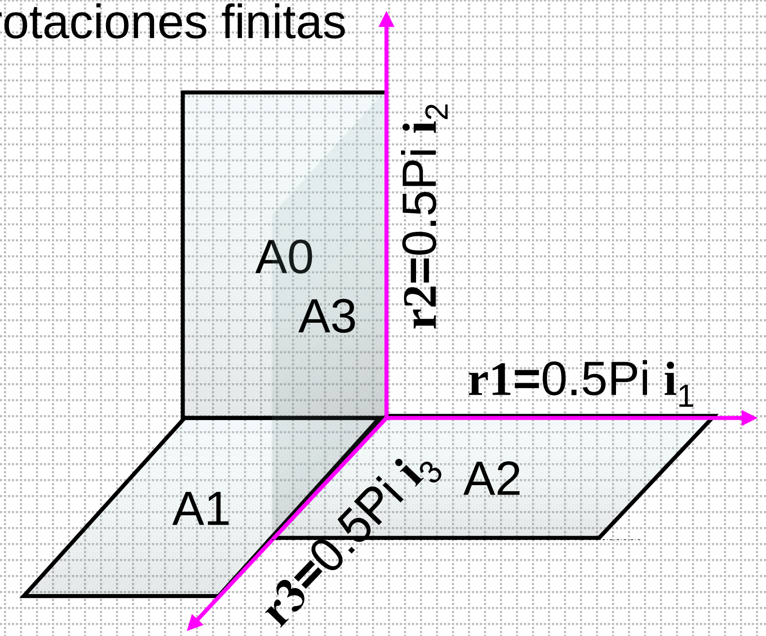
$2W = T_{ij}\, \epsilon_{ij}$

$$2W = T11\,\epsilon 11 + T12\,\epsilon 12 + T13\,\epsilon 13 + T21\,\epsilon 21 + T22\,\epsilon 22 + T23\,\epsilon 23 + T31\,\epsilon 31 + T32\,\epsilon 32 + T33\,\epsilon 33$$

ROTACIONES FINITAS: No toda magnitud física con magnitud, dirección y sentido es un vector, por ejemplo las rotaciones finitas

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \text{Imposible!}$$

$$\rightarrow \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \text{ No son vectores}$$

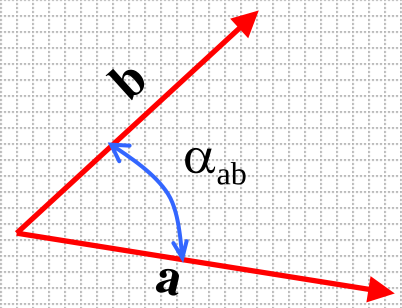


NOTA: Las rotaciones infinitesimales si son vectores.

PRODUCTO ESCALAR: Definido como

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a\cdot b\cdot\cos(\alpha_{ab})$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha_{ab}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{a\cdot b}$$



NOTA: El producto escalar de dos vectores da como resultado la proyección de uno de ellos en la dirección del otro dividido por la norma o módulo del vector sobre el cual se proyecta.

PRODUCTO POR UN ESCALAR: Si α, β son escalares

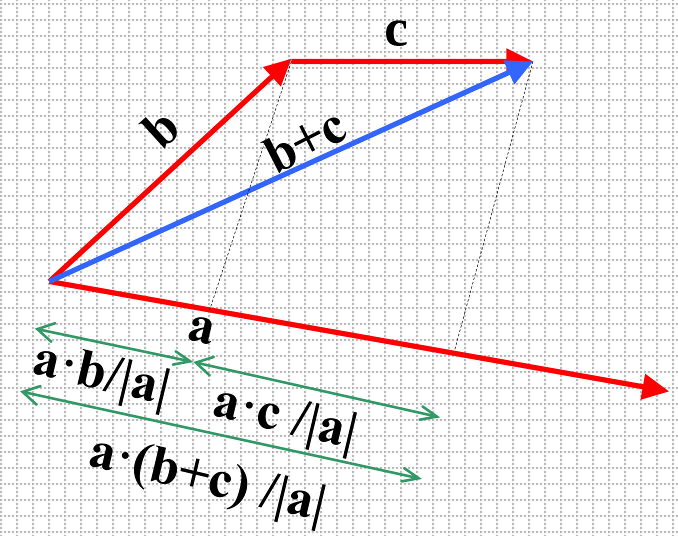
$$(\alpha\cdot\mathbf{a})\cdot(\beta\cdot\mathbf{b}) = \alpha\cdot\beta\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$

PROPIEDAD ASOCIATIVA

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$



PRODUCTO ESCALAR DE VERSORES:

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_3 = 1 \cdot 1 \cdot \cos(0) = 1$$

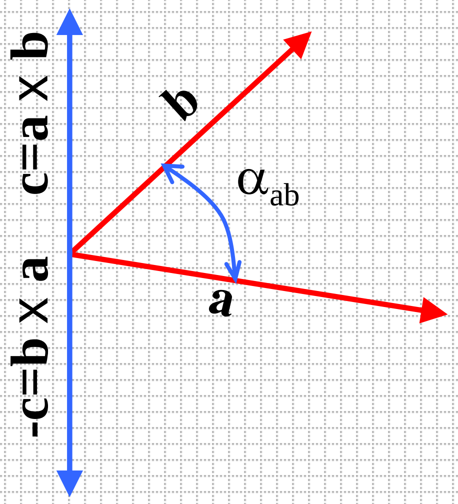
$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_1 = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

Resumiendo

$$\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = \begin{cases} 1 \ \forall \ i = j \\ 0 \ \forall \ i \neq j \end{cases}$$

PRODUCTO VECTORIAL O CRUZADO: Definido como

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{cases} c = a \cdot b \cdot \sin(\alpha_{ab}) \\ \text{Dirección y Sentido s/} \\ \text{Regla de la mano derecha} \end{cases}$$



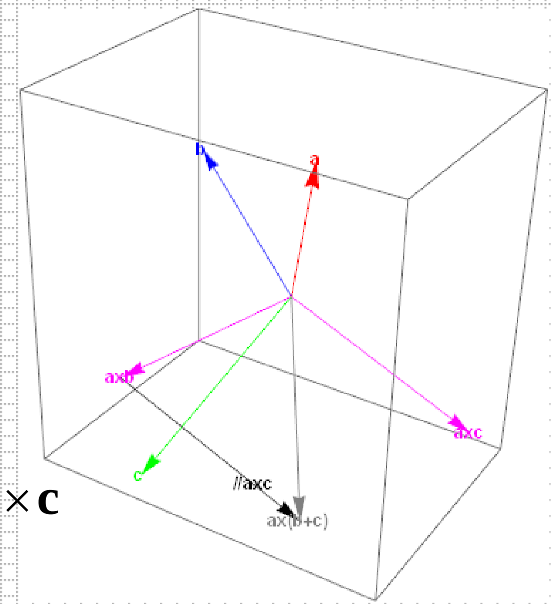
PROPIEDAD CONMUTATIVA:

No se verifica

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{c} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA: Verifica. Demostrar
Como ejercicio utilizando notación indicial

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$



Si a es igual **a** la suma de dos vectores **a1** y **a2**
(notar que 1 y 2 no son subíndices), luego

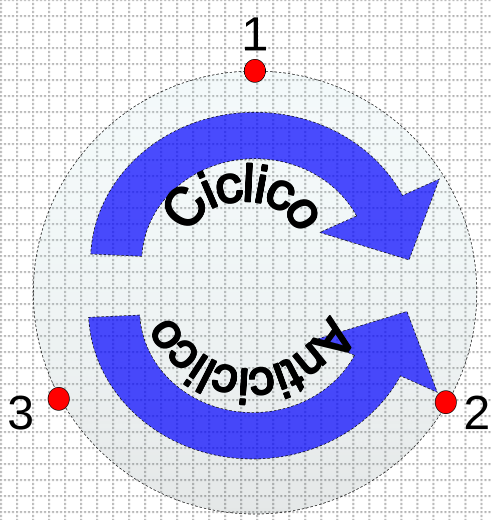
$$\mathbf{d} = (\mathbf{a1} + \mathbf{a2}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a1} \times \mathbf{b} + \mathbf{a1} \times \mathbf{c} + \mathbf{a2} \times \mathbf{b} + \mathbf{a2} \times \mathbf{c}$$

PRODUCTO VECTORIAL DE VERSORES

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_3 = 1 \cdot 1 \cdot \sin(0) = 0$$

$\mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_j = \mathbf{i}_k \ \forall i \neq j \neq k$ Cíclicos

$\mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_j = -\mathbf{i}_k \ \forall i \neq j \neq k$ Anticíclicos



EXPANSION DETERMINANTAL DEL PRODUCTO VECTORIAL

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_1\cdot\mathbf{i}_1+a_2\cdot\mathbf{i}_2+a_3\cdot\mathbf{i}_3)\times(b_1\cdot\mathbf{i}_1+b_2\cdot\mathbf{i}_2+b_3\cdot\mathbf{i}_3)=$$

$$a_1\cdot b_1\cdot\underbrace{\mathbf{i}_1\times\mathbf{i}_1}_{0}+a_1\cdot b_2\cdot\underbrace{\mathbf{i}_1\times\mathbf{i}_2}_{\mathbf{i}_3}+a_1\cdot b_3\cdot\underbrace{\mathbf{i}_1\times\mathbf{i}_3}_{-\mathbf{i}_2}+$$

$$a_2\cdot b_1\cdot\underbrace{\mathbf{i}_2\times\mathbf{i}_1}_{-\mathbf{i}_3}+a_2\cdot b_2\cdot\underbrace{\mathbf{i}_2\times\mathbf{i}_2}_{0}+a_2\cdot b_3\cdot\underbrace{\mathbf{i}_2\times\mathbf{i}_3}_{\mathbf{i}_1}+$$

$$a_3\cdot b_1\cdot\underbrace{\mathbf{i}_3\times\mathbf{i}_1}_{\mathbf{i}_2}+a_3\cdot b_2\cdot\underbrace{\mathbf{i}_3\times\mathbf{i}_2}_{-\mathbf{i}_1}+a_3\cdot b_3\cdot\underbrace{\mathbf{i}_3\times\mathbf{i}_3}_{0}=$$

$$(a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2)\cdot\mathbf{i}_1+(a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3)\cdot\mathbf{i}_2+(a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1)\cdot\mathbf{i}_3=\det\begin{vmatrix}\mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

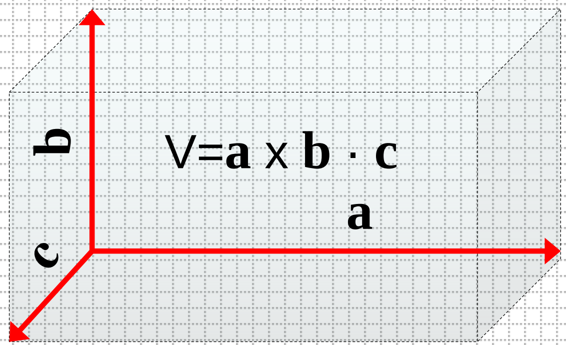
<u>NOTA</u>: Para un sistema levógiro vale la siguiente expresión

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\det\begin{vmatrix}\mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

TEMA 2: VECTORES Y TENSORES – PRODUCTO ESCALAR Y VECTORIAL

TRIPLE PRODUCTO VECTORIAL: Es un escalar definido como

$$t = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \det\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$$



<u>NOTA</u>: Para un sistema levógiro vale

$$V = -\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$$

OPERADOR DE PERMUTACIÓN: Definido como

$$e_{ijk} = 1 \; \forall \; i \neq j \neq k \text{ Cíclicos}$$

$$e_{ijk} = -1 \; \forall \; i \neq j \neq k \text{ Anticíclicos}$$

$$e_{ijk} = 0 \; \forall \; i = j \vee i = k \vee j = k$$

Luego

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = e_{ijk} \cdot a_j \cdot b_k \cdot \mathbf{i}_i \Rightarrow$$

$$c_i = e_{ijk} \cdot a_j \cdot b_k$$

OPERADOR DELTA DE KRONECKER: Definido como

$$\delta_{ij} = i_i \cdot i_j \Rightarrow \begin{cases} \delta_{ij} = 1 \; \forall \; i = j \\ \delta_{ij} = 0 \; \forall \; i \neq j \end{cases}$$

EJERCICIO: Calcular los siguientes valores

$$\delta_{mm} =$$

$$u_m \delta_{mn} =$$

$$\delta_{mn} \delta_{mn} =$$

$$T_{mn} \delta_{mn} =$$

IDENTIDAD e δ

$$A_{jkrs} = e_{ijk} e_{irs} = \delta_{jr} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kr}$$

EJERCICIO: Demostrar que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

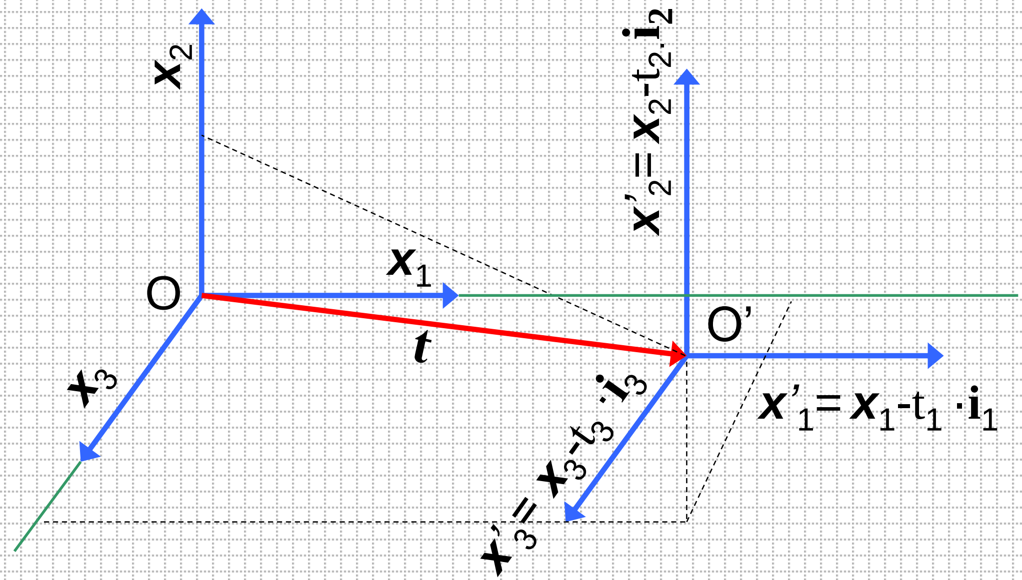
CAMBIO DE BASE ORTONORMAL:

Suponiendo 2 sistemas de referencia *x* y *x'* transformado respecto a *x* por:

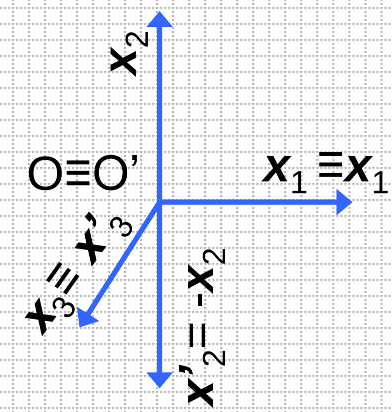
- TRASLACIÓN: Transformación escalar

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x'} + \mathbf{t}$

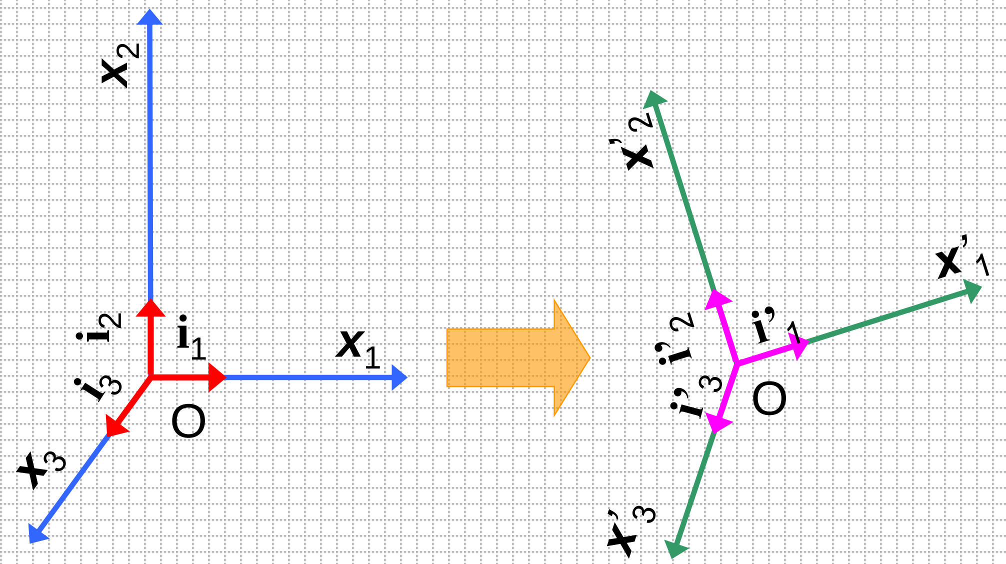
$\mathbf{t}$ = Vector Traslación



- REFLEXIÓN: Cambio de Orientación del Espacio



- ROTACIÓN: Alrededor del origen de coordenadas O



Por ser base ortonormal, el coseno del ángulo entre dos ejes $\boldsymbol{x'}_i$; $\boldsymbol{x}_j$ es

$$A_{ij} = A_i^j = \cos(\boldsymbol{x'}_i, \boldsymbol{x}_j) = \boldsymbol{x'}_i \cdot \boldsymbol{x}_j$$

NOTA: La designación de los coeficientes como A_i^j enfatiza los subíndices del sistema de referencia de partida $\mathbf{x}_i$ y transformado $\mathbf{x}_j$, no se refiere a las componentes contravariantes y covariantes de un vector

Luego

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i}'_1 &= A_1^1 \cdot \mathbf{i}_1 + A_1^2 \cdot \mathbf{i}_2 + A_1^3 \cdot \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{i}'_2 &= A_2^1 \cdot \mathbf{i}_1 + A_2^2 \cdot \mathbf{i}_2 + A_2^3 \cdot \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{i}'_3 &= A_3^1 \cdot \mathbf{i}_1 + A_3^2 \cdot \mathbf{i}_2 + A_3^3 \cdot \mathbf{i}_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{i}'_i = A_i^j \cdot \mathbf{i}_j ;\ A_i^j \text{ coef. de transf. directa}$$

Inversamente

$$\mathbf{i}_j = A_j^i \cdot \mathbf{i}'_i;\; A_j^i \text{ coef. de transformación inversa}$$

Como son sistemas ortogonales

$$\mathbf{i}'_p \cdot \mathbf{i}'_q = \begin{cases} 1 \;\forall\; p = q \\ 0 \;\forall\; p \neq q \end{cases} \Rightarrow \mathbf{i}'_p \cdot \mathbf{i}'_q = \delta_{pq} \Rightarrow \mathbf{i}'_p \cdot \mathbf{i}'_q = \delta_{pq};\; \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = \delta_{ij}$$

Reemplazando por sus componentes

$$\mathbf{i}'_p \cdot \mathbf{i}'_q = (A_p^s \cdot \mathbf{i}_s) \cdot (A_q^s \cdot \mathbf{i}_s) = A_p^s \cdot A_q^s \cdot \underbrace{(\mathbf{i}_s \cdot \mathbf{i}_s)}_{1} = \delta_{pq}$$

Como A_i^j son cosenos directores

$$\det(A_p^s) = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_3 = 1$$

Volumen Cubo Unitario

$$\det(A_p^s) = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_3 = -1 \Rightarrow \text{Rotación Impropia (Rotacion + Reflexión)}$$

$$\left(A_p^s\right)^{-1} = A_s^p;\; (\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{A}$$

Los vectores se comportan distinto frente a una transformación impropia

- VECTORES POLARES Ó VERDADEROS

$$\mathbf{v} = v'_r \cdot \mathbf{i}'_r = v_i \cdot \mathbf{i}_i ; \text{como}$$

$$\mathbf{i}_i = A_i^j \cdot \mathbf{i}'_j \Rightarrow v'_r \cdot \mathbf{i}'_r = v_i \cdot A_i^j \cdot \mathbf{i}'_j$$

$$(v'_r - v_i \cdot A_i^j) \cdot \mathbf{i}'_j = 0; \mathbf{i}'_j \neq 0 \Rightarrow \boxed{v'_r = v_i \cdot A_i^j}$$

EJEMPLOS: Vectores fuerza, velocidad, desplazamiento

En otras palabras, las componentes se transforman como los vectores

- VECTORES AXIALES: Cambian de signo, luego

$$\mathbf{v} = v'_r \cdot \mathbf{i}'_r = v_i \cdot \mathbf{i}_i ; \text{como}$$

$$\mathbf{i}_i = \det(A_i^j) \cdot A_i^j \cdot \mathbf{i}'_j \Rightarrow v'_r \cdot \mathbf{i}'_r = v_i \cdot \det(A_i^j) \cdot A_i^j \cdot \mathbf{i}'_j$$

$$(v'_r - v_i \cdot \det(A_i^j) \cdot A_i^j) \cdot \mathbf{i}'_j = 0; \mathbf{i}'_j \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v'_r = v_i \cdot \det(A_i^j) \cdot A_i^j}$$

EJEMPLOS: Vectores momento, velocidad angular

Las componentes se transforman como los vectores pero cambian de signo al producirse una transformación impropia

NOTAS Y COMENTARIOS:

1 – ECUACION DE TRANSFORMACION DE COORDENADAS

$$x'_r = A_r^s \cdot (x_s - b_s) \Rightarrow x_s = b_s + A_s^r \cdot x'_r$$

2a – DEFINICION DE VECTORES EN FUNCION DE SU TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS: Todo conjunto de n valores que pertenece a un espacio E^n es un vector si cumple la regla de aditividad vectorial y se transforma como un vector

2b – NO TODO CONJUNTO DE 3 VALORES QUE PERTENECEN A E^n ES UN VECTOR. Por ejemplo, si consideramos tres funciones escalares de punto, por ejemplo presión atmosférica, temperatura y humedad, y las agrupamos como vector, no se transforma como vector -> NO ES UN VECTOR.

COMPONENTES VECTORIALES EN DISTINTOS TIPOS DE BASES:

1 - BASE ORTONORMAL $\mathbf{i}_i$

$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{i}_1 + a_2 \cdot \mathbf{i}_2 + a_3 \cdot \mathbf{i}_3 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_1) \cdot \mathbf{i}_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_2) \cdot \mathbf{i}_2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_3) \cdot \mathbf{i}_3 \rightarrow a_i = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_i)$$

2 - BASE ORTOGONAL $\mathbf{e}_i$

$$\bar{\mathbf{i}}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|}; \bar{\mathbf{i}}_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_2|}; \bar{\mathbf{i}}_3 = \frac{\mathbf{e}_3}{|\mathbf{e}_3|}$$ $\Rightarrow$ Base ortonormal

$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \bar{a}_1 \cdot \bar{\mathbf{i}}_1 + \bar{a}_2 \cdot \bar{\mathbf{i}}_2 + \bar{a}_3 \cdot \bar{\mathbf{i}}_3 =$$

$$\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1)}{|\mathbf{e}_1|^2} \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2)}{|\mathbf{e}_2|^2} \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{e}_3|^2} \cdot \mathbf{e}_3 \rightarrow a_i = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i)}{|\mathbf{e}_i|^2}$$

3 - BASE GENERAL $\mathbf{e}_i$

$$\mathbf{a} = a^1 \cdot \mathbf{e}_1 + a^2 \cdot \mathbf{e}_2 + a^3 \cdot \mathbf{e}_3$$

La determinación de las componentes a^i se simplifica por medio de las bases recíprocas

BASES RECIPROCAS:

$$\mathbf{e}_i;\mathbf{e}^k \text{ reciprocas si } \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}^k=\begin{cases} 0\ \forall\ i\neq k \Rightarrow \mathbf{e}_i\perp\mathbf{e}^k\forall\ i\neq k \\ 1\ \forall\ i=k \Rightarrow |\mathbf{e}_i|\cdot|\mathbf{e}^k|\cdot\cos(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}^k)=1\rightarrow 0<\cos(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}^k)\leq 1\end{cases}$$

RELACION ENTRE $\mathbf{e}_i$ Y $\mathbf{e}^k$

Como $\mathbf{e}_i$ es normal a $\mathbf{e}^j$y $\mathbf{e}^k$ (considerando $i\neq j\neq k$), resulta normal al plano que contiene a $\mathbf{e}^j$y $\mathbf{e}^k$ y por lo tanto su dirección coincide con $\mathbf{e}^j\times\mathbf{e}^k$ y podemos decir que $\mathbf{e}_i=m\,(\mathbf{e}^j\times\mathbf{e}^k)$. Como además:

$\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}_i=1=\ m\mathbf{e}^i\cdot\left(\mathbf{e}^j\times\mathbf{e}^k\right)\rightarrow m=\frac{1}{\mathbf{e}^i\cdot\left(\mathbf{e}^j\times\mathbf{e}^k\right)}$, luego $\mathbf{e}_i=\frac{(\mathbf{e}^j\times\mathbf{e}^k)}{\mathbf{e}^i\cdot\left(\mathbf{e}^j\times\mathbf{e}^k\right)}$; en resumen

$$\mathbf{e}_i=\frac{(\mathbf{e}^j\times\mathbf{e}^k)}{\mathbf{e}^i\cdot(\mathbf{e}^j\times\mathbf{e}^k)};\mathbf{e}^i\ =\frac{(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k)}{\mathbf{e}_i\cdot\left(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k\right)}$$

NOTAS:

a) La base reciproca de una base ortonormal es ella misma (demostrar como ejercicio)

b) Dos bases reciprocas son o dextrógiras o levógiras ambas a la vez

DETERMINACIÓN DE LOS COMPONENTES a^i

$$\mathbf{a} = a^1 \cdot \mathbf{e}_1 + a^2 \cdot \mathbf{e}_2 + a^3 \cdot \mathbf{e}_3 = a^i \cdot \mathbf{e}_i$$

$$\text{Si } \mathbf{e}^k \text{ reciproca de } \mathbf{e}_i \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^k = a^k \cdot \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^k = a^k \rightarrow \boxed{a^k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^k}$$

NOTAS:

a) La k-esima componente *CONTRAVARIANTE* de **a** en la base $\mathbf{e}_i$, a^k, es el producto escalar de **a** por el k-esimo vector de la base recíproca $\mathbf{e}^k$

b) La k-esima componente *COVARIANTE* de **a** en la base $\mathbf{e}^i$, a_k, es igual al producto escalar de **a** por el k-esimo vector de la base recíproca $\mathbf{e}_k$

PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO

Evaluación de los productos
$(\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)$

→

Determinación de la base recíproca
$$\mathbf{e}^i = \frac{(\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)}{\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)}$$

→

Cálculo de las componentes
$a^k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^k$

EJEMPLO

ROTACIÓN DE BASES GENERALES

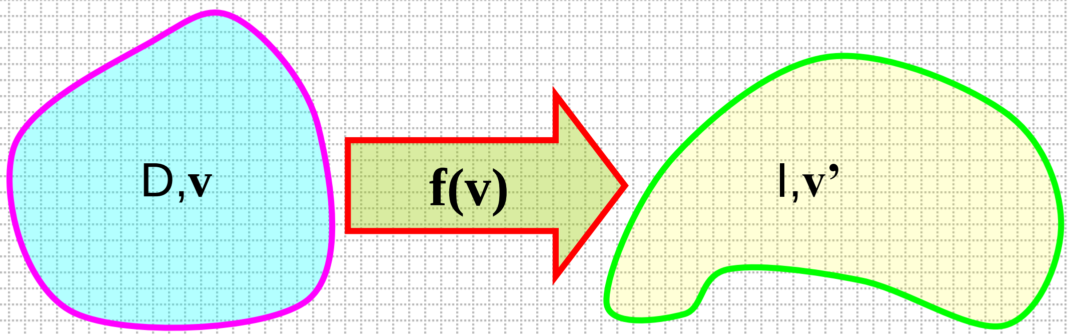
La transformación directa de los componentes COVARIANTES de un vector **a** desde una base de partida $\mathbf{e}^k$ a una base rotada $\mathbf{e}'^k$ involucra los coeficientes de transformación directa, es decir

$$a'_j = A_j^k \cdot a_k$$

La transformación directa de los componentes CONTRAVARIANTES de un vector **a** desde una base de partida $\mathbf{e}_i$ a una base rotada $\mathbf{e}'_i$ involucra los coeficientes de transformación indirecta, es decir

$$a'^j = A_i^j \cdot a^i$$

INTRODUCCIÓN: Consideremos dos espacios E^n Dominio e Imagen (D e I) en los que estan definidos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v'}$, relacionados por la funcion vectorial lineal $\mathbf{v'} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$.



$\mathbf{f}(\mathbf{v})$ es lineal si:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v})\ \text{lineal si}: \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{f}(\alpha\cdot\mathbf{v}) = \alpha\cdot\mathbf{f}(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{cases} = \mathbf{f}(\alpha\cdot\mathbf{u}+\beta\cdot\mathbf{v}) = \alpha\cdot\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \beta\cdot\mathbf{f}(\mathbf{v})$$

Luego, $\mathbf{f}(\mathbf{v})$ es

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} \Rightarrow u_i = T_{ij}\cdot v_j$$

Si el tensor $\mathbf{T}$ con componentes T_{ij} posee inversa $\mathbf{S}$, luego

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u} \Rightarrow v_i = S_{ij} \cdot u_j$$

TENSORES SIMÉTRICOS Y ANTISIMÉTRICOS

$\mathbf{T}$ simétrico si $T_{ij} = T_{ji} \; \forall \, i, j$

$\mathbf{T}$ antisimétrico si $T_{ij} = -T_{ji} \; \forall \, i, j$

NOTA: Si $\mathbf{T}$ es simétrico ó antisimétrico en un sistema de referencia, lo es en todo sistema de referencia. La simetría es una propiedad invariante

CAMBIO DE BASE - ROTACIÓN DE EJES. Considerando una base $\mathbf{i}$ que rota hacia la base $\mathbf{i}'$, vector $\mathbf{v}$ con componentes v_i en $\mathbf{i}$ y $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$

$$\left.\begin{array}{l} u'_i = A_i^j \cdot u_j = A_i^j \cdot T_{jq} \cdot v_q = A_i^j \cdot T_{jq} \cdot A_r^q \cdot v'_r \\ u'_i = T'_{ir} \cdot v'_r \end{array}\right\} \Rightarrow T'_{ir} = A_i^j \cdot T_{jq} \cdot A_r^q$$

Es decir

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}$$

TEMA 2: VECTORES Y TENSORES – TENSORES CARTESIANOS DE 2º ORDEN

COMPONENTES DE TENSORES DE 2º ORDEN Y ORDENES SUPERIORES: El numero de componentes de un tensor depende del Nº de dimensiones del espacio y el orden del vector, para un espacio 3D

$$S_{ij} \quad : \ 9 \ \text{Componentes (3x3)}$$

$$T_{ijk} \quad : 27 \ \text{Componentes (3x3x3)}$$

$$P_{ijkl} \ : 81 \ \text{Componentes (3x3x3x3)}$$

CONTRACCIÓN DE INDICES: Es la operación de eliminar indices por repeticion de los mismos en una expresión tensorial. Ejemplos:

$$v_i = S_{ik} u_k$$

$$R_{op} = M_{oqr} N_{rqp}$$

NOTACIÓN DE GIBBS: Por medio de puntos. Cada punto es un indice contraido

$$\mathbf{v} = v_i = S_{ik} u_k = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{R} = R_{op} = M_{oqr} N_{qrp} = \mathbf{M} : \mathbf{N}$$

$$\mathbf{P} = P_{op} = M_{orq} N_{pqr} = \mathbf{M} \cdot\cdot \mathbf{N}$$

ELEMENTO NULO: Dada una transformación vectorial

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{v} \Rightarrow 0_j = 0_{jk} v_k \ \forall v_k$$

PRODUCTO DE UN TENSOR POR UN ESCALAR

$$\mathbf{S} = S_{ij} = \alpha \cdot T_{ij} = \alpha \cdot \mathbf{T}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN TENSOR POR UN ESCALAR

a) Producto de un escalar por un producto de un tensor por un escalar

$$\mathbf{V} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{T}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{V} \text{ es Tensor}$$

b) Propiedad Distributiva

$$\mathbf{V} = \alpha \cdot (\mathbf{T} + \mathbf{Q}) = \alpha \cdot \mathbf{T} + \alpha \cdot \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{R} = (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{T} = \alpha \cdot \mathbf{T} + \beta \cdot \mathbf{T}$$

c) Elemento Nulo

$$0 \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{0} \text{ es el elemento nulo}$$

d) Producto por Unidad

$$1 \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}$$

ADICIÓN DE TENSORES: Dados dos tensores $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$

$$\mathbf{V} = V_{ij} = S_{ij} + T_{ij} = \mathbf{S} + \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{V} \text{ es Tensor}$$

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE TENSORES

a) Propiedad Conmutativa

$$\mathbf{V} = \mathbf{S} + \mathbf{T} = \mathbf{T} + \mathbf{S}$$

b) Propiedad Asociativa

$$\mathbf{V} = \mathbf{S} + (\mathbf{T} + \mathbf{Q}) = (\mathbf{S} + \mathbf{T}) + \mathbf{Q}$$

c) Elemento Nulo

$$\mathbf{T} + \mathbf{0} = \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{0} \text{ es el elemento nulo}$$

d) Elemento Negativo

$$\forall\, \mathbf{T}\, \exists\, (-\mathbf{T}) \,/\, \mathbf{T} + (-\mathbf{T}) = \mathbf{0}$$

NOTA: *Los tensores cumplen con las propiedades de adición y producto por escalar que definen a los espacios vectoriales, por lo tanto un conjunto de tensores es un espacio vectorial.*

PRODUCTO ESCALAR DOBLE: Dados dos tensores $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$

$$\left.\begin{aligned} k = S_{ij}T_{ij} &= \mathbf{S}:\mathbf{T} \\ l = S_{ij}T_{ji} &= \mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{T} \end{aligned}\right\} \mathbf{S}:\mathbf{T} = \mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{S} = \mathbf{S}^T; \mathbf{T} = \mathbf{T}^T$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR DOBLE DE TENSORES

a) Propiedad Conmutativa

$$k = \mathbf{S}:\mathbf{T} = \mathbf{T}:\mathbf{S}$$

b) Propiedad Distributiva

$$k = \mathbf{S}:(\mathbf{T}+\mathbf{Q}) = \mathbf{S}:\mathbf{T} + \mathbf{S}:\mathbf{Q}$$

c) Producto por escalar

$$k = \alpha\cdot(\mathbf{T}:\mathbf{Q}) = (\alpha\cdot\mathbf{T}):\mathbf{Q} = \mathbf{T}:(\alpha\cdot\mathbf{Q})$$

d) Carácter Positivo

$\mathbf{T}:\mathbf{T} > 0 \ \forall\ \mathbf{T} \neq \mathbf{0} \rightarrow$ Forma Cuadrática

e) Tensor Unitario: Dado un espacio vectorial

$$\exists\, \mathbf{1} \,/\, \mathbf{v} = \mathbf{1}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{1} \ \forall\ \mathbf{v}$$

en coordenadas cartesianas rectangulares $\mathbf{1} = 1_{ij} = \delta_{ij}$

PRODUCTO ESCALAR SIMPLE: Dados dos tensores $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$

$$P_{ij} = S_{ik}T_{kj} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{v} = (\mathbf{S}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{S}\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR SIMPLE DE TENSORES

a) Propiedad Asociativa

$$\mathbf{V} = \mathbf{S}\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}) = (\mathbf{S}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}$$

b) Propiedad Distributiva

$$\mathbf{V} = \mathbf{S}\cdot(\mathbf{T}+\mathbf{Q}) = \mathbf{S}\cdot\mathbf{T} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{Q}$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{T}+\mathbf{Q})\cdot\mathbf{R} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{R} + \mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}$$

c) Producto por escalar

$$\mathbf{V} = \alpha\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{Q}) = (\alpha\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{T}\cdot(\alpha\cdot\mathbf{Q})$$

d) Tensor Unitario

$$\mathbf{T} = \mathbf{1}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{1}$$

NOTA: En general no se verifica la propiedad conmutativa, es decir

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{Q} \neq \mathbf{Q}\cdot\mathbf{T}$$

Pero se puede verificar que $\mathbf{T}\cdot\mathbf{Q} = \left(\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{T}^T\right)^T$

INVARIANTES TENSORIALES – TRAZA DE UN TENSOR: Dado un tensor $\mathbf{T}$

$$tr(\mathbf{T}) = T_{ii}$$

IDENTIDADES DE LA TRAZA DE UN TENSOR

$$\mathbf{S} \cdot\cdot \mathbf{T} = tr(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T})$$

$$\mathbf{S} : \mathbf{T} = tr(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^T)$$

$$tr(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) = tr(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})$$

$$tr(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}) = tr(\mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}) = tr(\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{T})$$

PRODUCTO EXTERIOR, DIÁDICO O TENSORIAL DE DOS VECTORES

$$\mathbf{T} = T_{ij} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j$$

Verifica la siguiente propiedad respecto al producto por un vector

$$\mathbf{u} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \ \forall \ \mathbf{v}$$

DYADS Y POLYADS: Dados varios vectores pueden definirse

$$D_{ij} = \mathbf{D} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j \qquad \text{Dyad}$$

$$T_{ijk} = \mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} = a_i b_j c_k \qquad \text{Triad}$$

$$S_{ijkl} = \mathbf{S} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = a_i b_j c_k d_l \qquad \text{Tetrad}$$

$\ldots$

Cumplen con todas las reglas del álgebra, excepto la propiedad conmutativa, i.e.

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$$

$Ej:$

$$\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2 = i_{1_i} i_{2_j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1 = i_{2_i} i_{1_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TEMA 2: VECTORES Y TENSORES – DYADS, POLYADS Y DIADICAS

CONJUGADA DE UNA DYAD: Definida como

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_C = \mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$$

DIADICA: Combinación lineal de dyads

$$\mathbf{A} = \alpha\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) + \beta\cdot(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) + \ldots$$

CONTRACCIÓN DE DYADS. PRODUCTO SIMPLE Y DOBLE.
Contraer es reemplazar uno de los productos externos por un producto interno.
Por ejemplo, el producto interno simple es

$$A_{ijkl} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}$$

$$B_{ij} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}\otimes\mathbf{d} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}$$

$$C_{ij} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\otimes\mathbf{d} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}\otimes\mathbf{d}$$

$$D_{ij} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} = \underbrace{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})}_{Escalar}\cdot\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$$

En general no cumple con la propiedad conmutativa, es decir

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) \neq (\mathbf{c}\otimes\mathbf{d})\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})$$

PRODUCTO INTERNO DOBLE DE UNA DYAD

$$k = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})$$

El producto interno doble cumple con la propiedad conmutativa, es decir

$$k = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$$

DYADS COMO TENSORES DE SEGUNDO ORDEN

Demostración a) Transformación de vectores

$$\mathbf{v} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$$

Demostración b) Transformación de coordenadas

$$\mathbf{a}' \otimes \mathbf{b}' = a'_i \, b'_j = A_i^k a_k A_j^l b_l = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \text{ es tensor}$$

<u>NOTA:</u> Si bien toda dyad es un tensor de segundo orden, no todo tensor de segundo orden es un dyad, sin embargo todo tensor de segundo orden puede expresarse como una diadica

$$\mathbf{T} = T_{11} \cdot (\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1) + T_{12} \cdot (\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2) + T_{13} \cdot (\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_3) +$$

$$T_{21} \cdot (\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1) + T_{22} \cdot (\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2) + T_{23} \cdot (\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_3) +$$

$$T_{31} \cdot (\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_1) + T_{32} \cdot (\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_2) + T_{33} \cdot (\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3)$$

$$\mathbf{T} = T_{rs} \cdot (\mathbf{i}_r \otimes \mathbf{i}_s)$$

DEFINICION DE TENSOR: “Un conjunto de 9 cantidades en un sistema cartesiano tridimensional es un tensor de segundo orden sii”

$$\mathbf{T}':(\mathbf{u}'\otimes\mathbf{v}') = \mathbf{T}:(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) \,/\, \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{i}',\mathbf{i} \Leftrightarrow \mathbf{T}\ \text{es tensor}$$

$$\mathrm{T}'_{\mathrm{ij}}\, u'_i\, v'_j = \mathrm{T}_{\mathrm{ij}} u_i v_j$$

Si el tensor es simétrico hay que probar que

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \wedge \mathbf{T}':(\mathbf{v}'\otimes\mathbf{v}') = \mathbf{T}:(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) \,/\, \mathbf{v},\mathbf{i}',\mathbf{i} \Leftrightarrow \mathbf{T}\ \text{es tensor}$$

$$\mathrm{T}'_{\mathrm{ij}}\, v'_i\, v'_j = \mathrm{T}_{\mathrm{ij}} v_i v_j$$

REGLAS DEL COCIENTE: Las definiciones anteriores son muy complicadas de probar, por lo que para probar que una entidad es un tensor se puede:

1) Probar que se transforma como un tensor
2) Utilizar una regla de cociente, por ejemplo

$$\mathrm{T}'_{ij}\, Q'^{ij} = \mathrm{T}_{ij} Q^{ij}\ \forall\, Q^{ij},\mathbf{i},\mathbf{i}' \rightarrow \mathrm{T}_{ij}\ \text{componente covariante tensor}$$

$$\mathrm{T}'_{ij}\, u'^i\, v'^j = \mathrm{T}_{ij} u^i v^j\ \forall\, u^i, v^i,\mathbf{i},\mathbf{i}' \rightarrow \mathrm{T}_{ij}\ \text{componente covariante tensor}$$

TEMA 2: VECTORES Y TENSORES – REVISION DE MATRICES

DEFINICION DE MATRIZ: “Una matriz (m x n) es un arreglo rectangular de m x n elementos”. Consideramos como elementos números reales.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

IGUALDAD: Dos matrices *A* y *B* (m x n) son iguales si sus componentes lo son

$$A = B \Leftrightarrow A_{ij} = B_{ij} \forall i, j$$

SUMA: Una matriz C es la matriz suma de dos matrices A y B si sus componentes son la suma de los componentes de A y B

$$C = A + B \Leftrightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \forall i, j$$

PRODUCTO: Dos matrices A (m x n) y B (p x q) son conformables para el producto A x B si n = p. En este caso el resultado es una matriz C (m x q) cuyos componentes son

$$C_{(m,q)} = A_{(m,n)} x B_{(p,q)} \Leftrightarrow C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left[A_{ik} \cdot B_{kj} \right] \forall i, j = \mathbf{a}_{i.} \cdot \mathbf{b}_{.j}$$

En la expresión anterior **a** y **b** son los vectores fila y columna de las matrices A y B respectivamente

En general A x B ≠ B x A

MATRICES Y TRANSFORMACIONES LINEALES: Dada una matriz cuadrada M (n x n) y dos vectores **x** e **y**, el siguiente sistema de ecuaciones

$$M \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Transforma el vector **x** en el vector **y**. Si M es una matriz diagonal el sistema se resuelve directamente, sino se diagonaliza. Si se verifica que

$$M \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Entonces M es una matriz identidad y se nota con I.

INVERSA DE UNA MATRIZ CUADADA: Se nota como M^{-1} y cumple

$$M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = I$$

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ: Se nota como M^T y cumple

$$M^T \Rightarrow M^T{}_{ij} = M_{ji}$$

TRANSPUESTA CONJUGADA DE UNA MATRIZ: Se nota como $M_C{}^T$ y cumple

$$M_C{}^T \Rightarrow M_C{}^T{}_{ij} = Conj(M_{ji}) = M^{-1}$$

MATRICES SIMETRICAS: Una matriz A es simétrica si cumple

$$A_{ij} = A_{ji} \forall i \neq j \Rightarrow A = A^T$$

MATRICES ANTISIMÉTRICAS: Una matriz A es antisimétrica si cumple

$$A_{ij} = -A_{ji} \forall i \neq j$$

Para dos matrices cuadradas A y B se cumple

$$A \cdot B = (B^T \cdot A^T)^T$$

MATRICES SIMILARES: Si M y N son dos matrices cuadradas, *N es similar a M* si existe una matriz no singular A tal que

$$N = A^{-1} \cdot M \cdot A \Rightarrow M = A \cdot N \cdot A^{-1}$$

MATRICES ORTOGONALES: Una matriz Q es ortogonal si cumple que

$$Q^T \cdot Q = Q \cdot Q^T = I \Rightarrow Q^T = Q^{-1}$$

VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ: Si una matriz M transforma un vector **x** = α **x0** en un vector **y**, podemos plantear si existe una dirección en el espacio **x0** tal que la transformación solo cambie la magnitud del vector, es decir

$$M \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} = \lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot I \cdot \mathbf{x} \Rightarrow (M - \lambda \cdot I) \cdot \mathbf{x} = 0$$

Si cumple la anterior, **x** es un autovector de M y λ un autovalor de M. El Sistema de ecuaciones

$$(M - \lambda \cdot I) \cdot \mathbf{x} = 0$$

Una solución no trivial (**x ≠ 0**) va a existir sólo si

$$Det(M - \lambda \cdot I) = 0$$

La expansión de este determinante es el *Polinomio Característico* de M, y sus raíces son los valores propios λ_i de M. Conocidos estos se puede resolver el sistema de ecuaciones para encontrar los vectores propios $\mathbf{x}_i$ de M, generalmente presentados con módulo 1

VALORES PROPIOS DE UNA MATRIZ REAL SIMÉTRICA: Sea M una matriz real simétrica, en consecuencia los coeficientes del polinomio característico serán reales.

<u>*Demostración:*</u> Supongamos que existe una raíz imaginaria del polinomio característico λ (y por lo tanto su conjugada λ_c), con autovectores asociados **x** y $\mathbf{x}_c$, luego se cumplen.

$$\text{(a) } M \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$$

$$\text{(b) } M_c^{\,T} \cdot \mathbf{x}_c = M$$

Complejo Conjugado:
$(a+ib)_c = a-ib$

Premultiplicando (a) por $\mathbf{x}_c^T$ y (b) por $\mathbf{x}^T$, resulta

$$\text{(a) } \mathbf{x}_c^{\,T} \cdot M \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}_c^{\,T} \cdot \mathbf{x}$$

$$\text{(b) } \mathbf{x}^T \cdot M \cdot \mathbf{x}_c = \lambda_c \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}_c$$

Considerando que

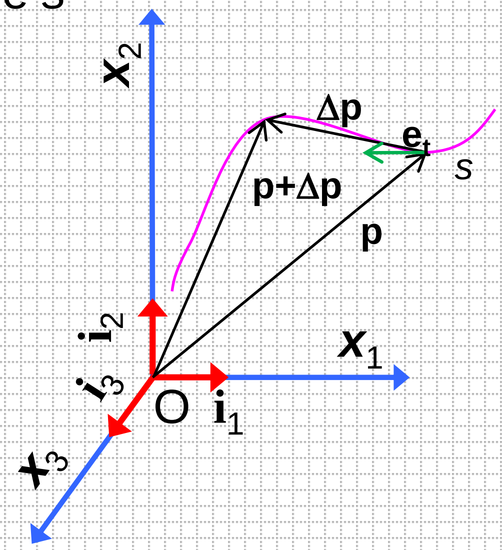
$$\mathbf{x}_c^{\,T} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}_c \neq 0$$

$$\mathbf{x}^T \cdot M \cdot \mathbf{x}_c = \mathbf{x}_c^{\,T} \cdot M \cdot \mathbf{x}$$

Restando miembro a miembro las anteriores

$$0 = (\lambda - \lambda_c) \cdot \mathbf{x}_c^{\,T} \cdot \mathbf{x} \rightarrow (\lambda - \lambda_c) = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_c \Rightarrow \lambda, \lambda_c \in \Re$$

En general, las magnitudes físicas varían en el espacio ó en el dominio en donde se desarrollan. El estudio de su variación espacial y temporal motiva el análisis vectorial y tensorial. Por ejemplo, la derivada temporal total del vector posición de una partícula en movimiento, **p**(t), que sigue una trayectoria suave *s*



La velocidad **v** de la partícula que ocupa la posición **p** en el instante t resulta

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

Referido a la Trayectoria: Puede ser conveniente referir el movimiento a la trayectoria de la partícula *s*. Considerando que *s* es suave

$$\left|\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}\right| = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ en el límite}$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta s} = \mathbf{e}_T \to \mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \cdot \mathbf{e}_T \Rightarrow \mathbf{e}_T \text{ vector tangente}$$

Expresión en componentes: Dado **p** por sus componentes respecto a un sistema de coordenadas fijo

$$\mathbf{p} = x_1 \cdot \mathbf{i}_1 + x_2 \cdot \mathbf{i}_2 + x_3 \cdot \mathbf{i}_3 \to \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \cdot \mathbf{i}_1 + \frac{dx_2}{dt} \cdot \mathbf{i}_2 + \frac{dx_3}{dt} \cdot \mathbf{i}_3 = \dot{x}_i \cdot \mathbf{i}_i$$

Integración: De forma semejante, la integral entre un instante t_0 y t resulta

$$d\mathbf{p} = \mathbf{v} \cdot dt \Rightarrow \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{v} \cdot dt = \mathbf{i}_1 \cdot \int_{t_0}^{t} v_1 dt + \mathbf{i}_2 \cdot \int_{t_0}^{t} v_2 dt + \mathbf{i}_3 \cdot \int_{t_0}^{t} v_3 dt$$

En general la derivada temporal de cualquier vector se evalúa como

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\frac{da_1}{dt}\cdot\mathbf{i}_1+\frac{da_2}{dt}\cdot\mathbf{i}_2+\frac{da_3}{dt}\cdot\mathbf{i}_3=\dot{a}_i\cdot\mathbf{i}_i$$

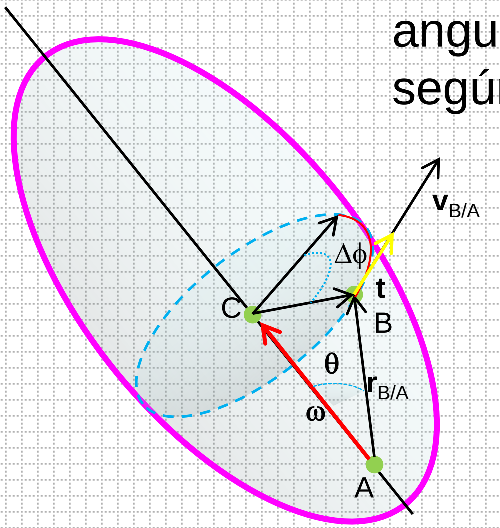
En general las derivadas de las siguientes operaciones

- Producto de un escalar por un vector
- Producto Escalar de dos vectores
- Producto Vectorial de dos vectores
- Productos Tensoriales

Obedecen las reglas del cálculo. Por ejemplo recordando que

$$d(a\cdot b)=da\cdot b+a\cdot db\Rightarrow\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\frac{d\mathbf{u}}{dt}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Consideremos un cuerpo rígido rotando con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ sobre un eje, dos puntos sobre el eje, A y C, y un punto sobre la superficie del mismo, B. La velocidad relativa de B respecto a A, $\mathbf{v}_{B/A}$ está dada sólo por la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo, será tangente al círculo de radio CB según el vector tangente $\mathbf{t}$ y su magnitud será



$$\left|\mathbf{v}_{B/A}\right| = \frac{d\phi}{dt}\cdot\left|CB\right| = \frac{d\phi}{dt}\cdot\left|\mathbf{r}_{B/A}\right|\cdot\sin(\theta)$$

$$\text{Como } \frac{d\phi}{dt} = \left|\boldsymbol{\omega}\right| \rightarrow \mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{B/A} \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{B/A}$$

En general para un vector arbitrario asociado a la posición de una partícula del cuerpo, **a**, la derivada temporal resulta

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}$$

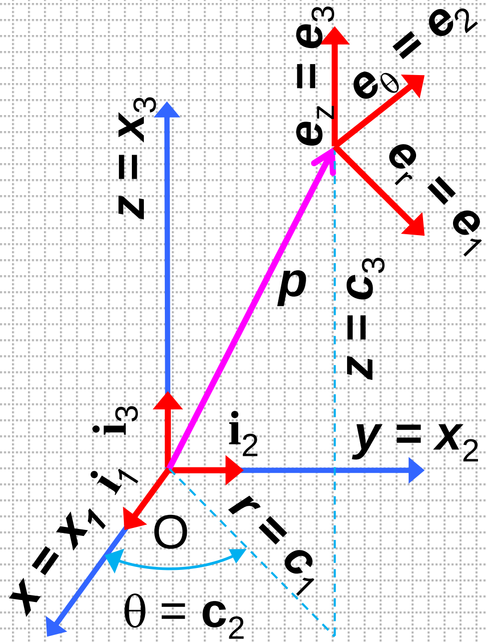
Esta expresión permite analizar la derivada temporal de un vector en coordenadas cilíndricas o para un sistema de referencia variable

Tomando como referencia un sistema cilíndrico r, θ, z (ó c_1, c_2, c_3), relacionado con un sistema cartesiano por medio de

$$x = x_1 = r \cdot \cos(\theta) = c_1 \cdot \cos(c_2)$$

$$y = x_2 = r \cdot \sin(\theta) = c_1 \cdot \sin(c_2)$$

$$z = x_3 = z = c_3$$



El vector posición **p** está definido como

$$\mathbf{p} = r \cdot \mathbf{e}_r + z \cdot \mathbf{e}_z \text{ con}$$

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(t)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathrm{k} = \text{constante}$$

La velocidad **v** resulta

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot \mathbf{e}_r + r \cdot \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \mathbf{e}_z$$

Los versores $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ pueden considerarse como un cuerpo rígido unido a la partícula. Como $\mathbf{e}_r$ **.** $\mathbf{e}_z$ = 0 (perpendiculares) la velocidad angular del punto resulta

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \mathbf{i}_3 = \frac{d\theta}{dt} \cdot \mathbf{e}_z$$

Luego

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_r = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\theta = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\theta = -\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_r$$

$$\frac{d\mathbf{e}_z}{dt} = 0$$

Reemplazando, la velocidad de la partícula resulta

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \cdot \mathbf{e}_r + r \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \mathbf{e}_\theta + \frac{dz}{dt} \cdot \mathbf{e}_z$$

Ejercicio: Calcular la aceleración tomando en cuenta las derivadas temporales de los versores $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$

FUNCION ESCALAR DE PUNTO: Tiene un valor escalar para cada punto del dominio, independiente del sistema de coordenadas adoptado, es decir, considerando dos sistemas de referencia **x** y ξ

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$$

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, x_3) = F(x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) = F(\xi)$$

EJEMPLO: Dada F(ξ) y la transformación **x**=**x**(ξ) encontrar la función transformada F(**x**)

$$x_1 = (4\xi_1 - 3\xi_2)/5$$

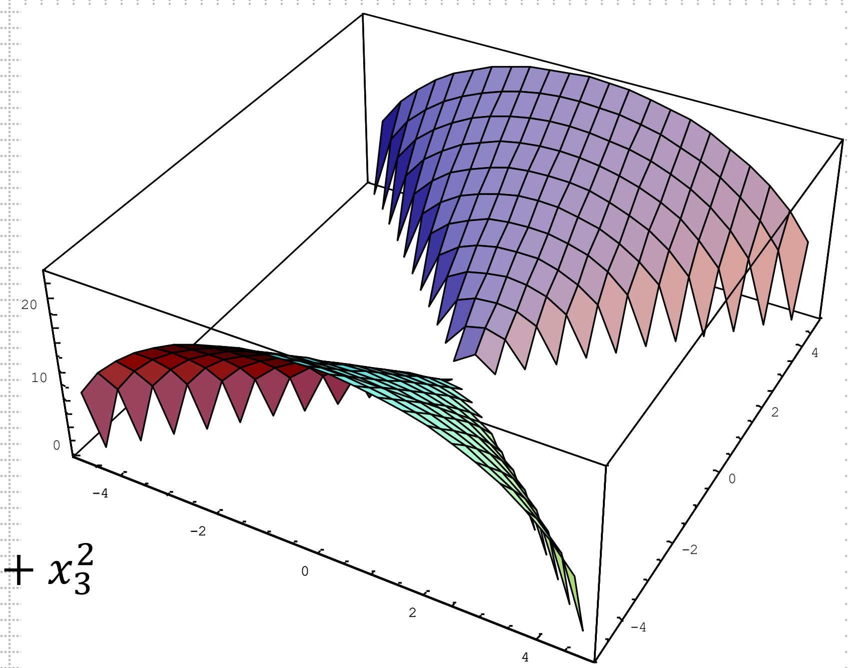
$$x_2 = (4\xi_1 + 3\xi_2)/5$$

$$x_3 = \xi_3$$

$$F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 25(\xi_1^{\ 2} - \xi_2^{\ 2}) + \xi_3^{\ 2}$$

luego

$$F(x_1, x_2, x_3) = 7(x_1^2 \text{-} x_2^2) - 48x_1x_2 + x_3^2$$



GRADIENTE DE UNA FUNCION ESCALAR DE PUNTO: Es un vector notado como

$$grad(F) = \nabla F$$

Tal que para cualquier vector unitario **u** aplicado en el punto y tangente a una trayectoria *s*, la derivada direccional de F en la dirección de **u**, dF/ds resulta

$$\frac{dF}{ds} = \nabla F \cdot \mathbf{u}$$

Para un sistema rectangular de coordenadas, y un punto con vector posición **p** sobre la trayectoria *s*, el vector tangente a la trayectoria **n** es

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{dx_i}{ds} \cdot \mathbf{i}_i = u_i \cdot \mathbf{i}_i \quad \text{luego} \quad \frac{dF(\mathbf{x})}{ds} = \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i} \cdot u_i \Rightarrow (\nabla F)_i = \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

Luego

$$(\nabla F)_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} = \partial_i F = F_{,i}$$

$$\nabla \mathbf{F} = grad(F) = F_{,i} \cdot \mathbf{i}_i$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL GRADIENTE DE UNA FUNCION ESC. DE PUNTO: Si **t** es un vector tangente a la curva de nivel F = constante (dF/ds =0), y **n** es un vector normal a la sup. en el mismo punto

$$\frac{dF}{ds} = \nabla F \cdot \mathbf{t} = 0 \rightarrow \nabla F \perp \mathbf{t} \rightarrow \nabla F // \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$

EJEMPLO

Se define el operador DEL como

$$\nabla = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k \partial_k$$

Aplicado a una función escalar de punto da el gradiente de la misma

$$\nabla F = (\mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3})F = \mathbf{i}_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} = \mathbf{i}_k F_{,k}$$

OPERADOR LAGRANGEANO: Aplicado a un campo escalar doblemente diferenciable

$$\nabla^2 F = \nabla \cdot \nabla F = F_{,kk} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}$$

OPERADOR DEL APLICADO A CAMPOS VECTORIALES: Se puede aplicar de diversas maneras:

Divergencia: Es el producto escalar del operador DEL por el vector

$$div(\mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}) \cdot (\mathbf{i}_1 v_1 + \mathbf{i}_2 v_2 + \mathbf{i}_3 v_3) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = v_{i,i}$$

Es un escalar que da la magnitud del flujo del campo vectorial

Rotor: Es el producto vectorial del operador DEL por el vector

$$rot(\mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{v} = (\mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}) \times (\mathbf{i}_1 v_1 + \mathbf{i}_2 v_2 + \mathbf{i}_3 v_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

En notación indicial

$$\mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{v} \rightarrow q_i = \varepsilon_{ijk} v_{j,k}$$

INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL ROTOR: Si v es un campo de velocidades definido en una región del espacio, resulta que

$$rot(\mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$$

Si el campo de velocidades está definido como el gradiente de una función escalar de punto F

$$\mathbf{v} = \nabla F \Rightarrow rot(\mathbf{v}) = \nabla \times \nabla F =$$

$$\mathbf{i}_1\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3}\right] + \mathbf{i}_2\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3}\right] + \mathbf{i}_3\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\right] = 0$$

El campo **v** se denomina irrotacional y la función F “Función Potencial”

GRADIENTE DE UN CAMPO VECTORIAL: Dado un campo vectorial **v**, su gradiente es un tensor de segundo orden **T** tal que para una dirección cualquiera dada por un vector unitario **u**, **T.u** ó **u.T** dan la tasa de cambio de **v** en la dirección de **u**, d**v**/ds. La aplicación por derecha o izquierda del operador se simboliza de la siguiente manera

$$\mathbf{v}\overleftarrow{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \qquad \vec{\nabla}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$