TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

DEFORMACIÓN: Cambio de forma de un cuerpo. Por ejemplo, ensayo de tracción uniaxial.

DEFORMACIÓN ESPECÍFICA: Deformación por unidad de longitud

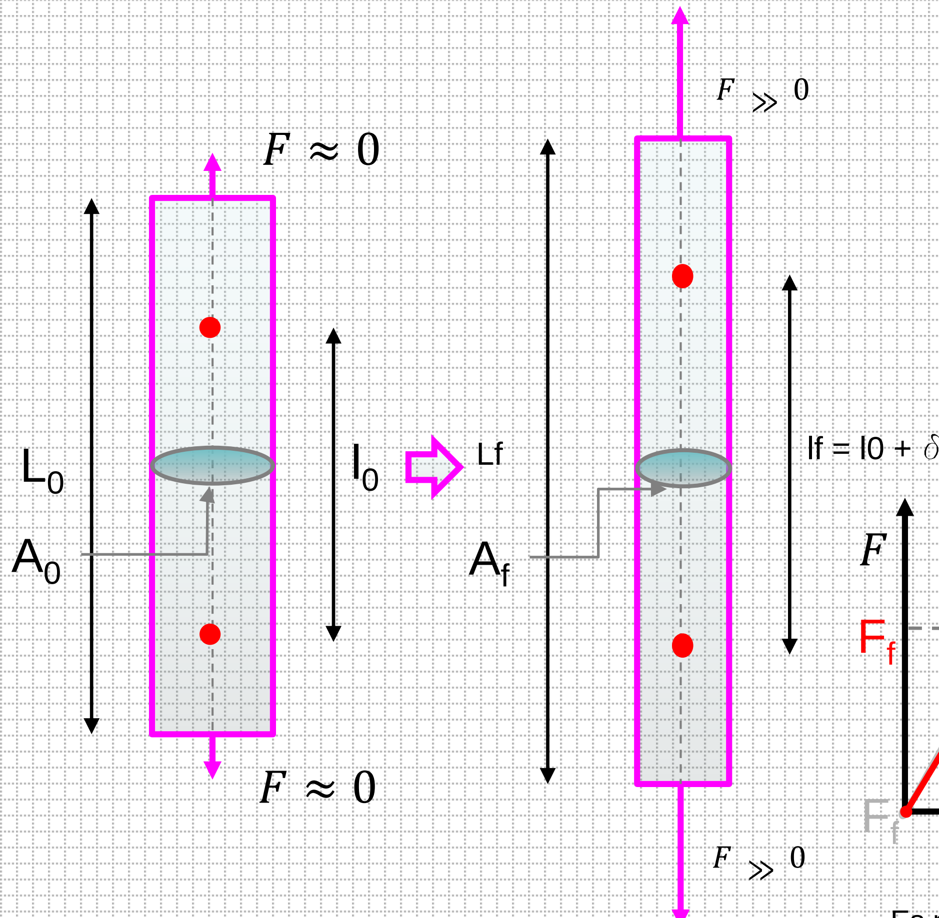
l_0: Longitud calibrada

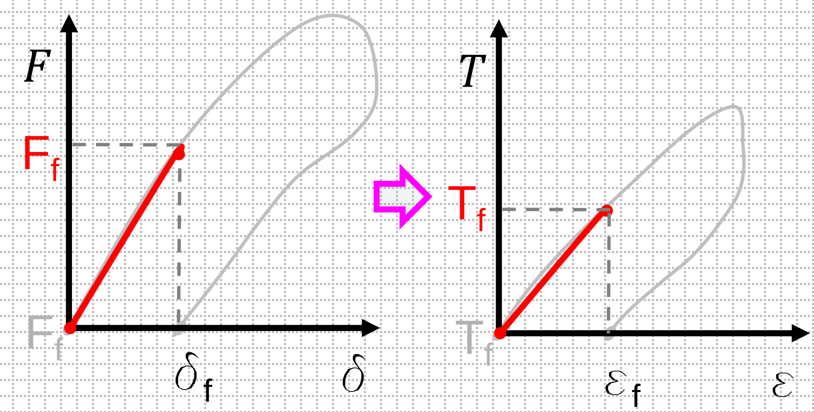
$\delta = l_f - l_0$: Deformación

$\varepsilon = \delta / l_0$: Deformación específica

$T = \frac{F}{A_0}$: Tensión de Cauchy

$\bar{T} = \frac{F}{A_f}$: 1er Tensión de Piola-Kirchoff





Es necesario conocer la historia de la deformación específica

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Definiciones de deformación específica y deformación

Experimentales

- Basadas en los cambios de longitud de un segmento calibrado
- Normalmente unidimensionales

Elementales

- Basadas en un elemento [entorno] diferencial del punto
- Formulación total

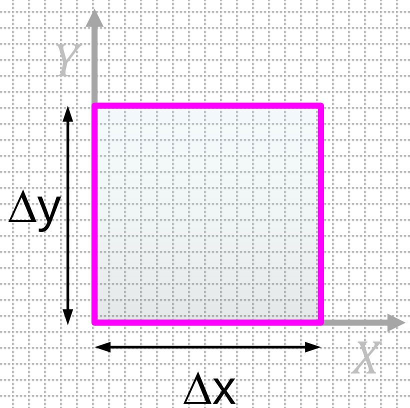
Cinemáticas

- Basadas en la variación de posición de un punto respecto a otro durante un proceso cinemático.
- Formulación total o diferencial

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Definición elemental 2D

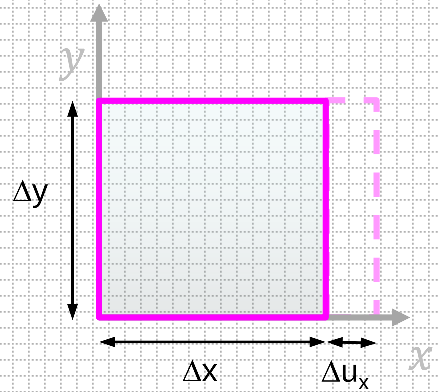
Elemento de análisis
Para todo punto
{X,Y}: Posición inicial
{x,y}: Posición final



Existe un campo de desplazamientos $\{u_x, u_y\}$, con valor inicial conocido:

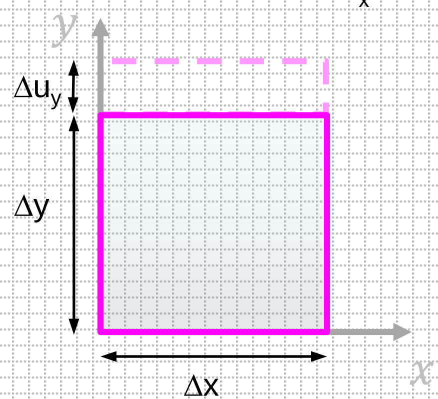
$x = X + u_x$

$y = Y + u_y$



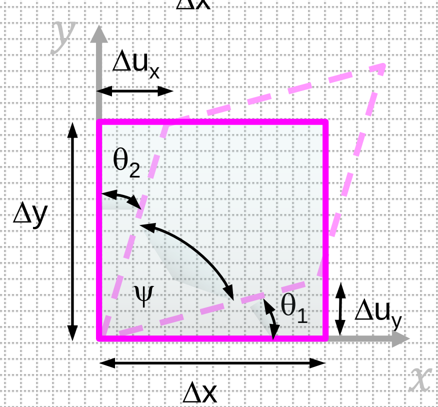
Extensión uniaxial en X

$$\varepsilon_x \approx \frac{\Delta u_x}{\Delta X}, si\ \Delta X \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial X}$$



Extensión uniaxial en Y

$$\varepsilon_y \approx \frac{\Delta u_y}{\Delta Y}, si\ \Delta Y \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial Y}$$



Distorsión en el plano XY

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \psi = \theta_1 + \theta_2$$

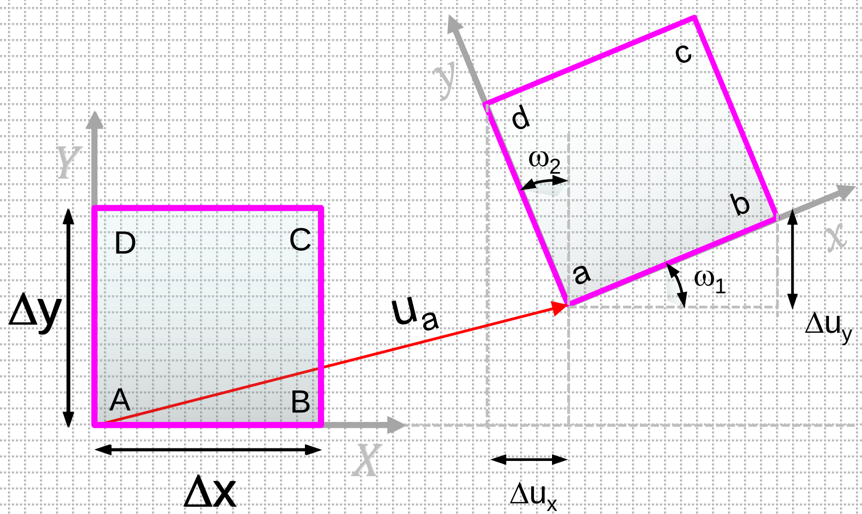
$$\text{Como } \theta_1 \approx \tan(\theta_1) = \frac{\Delta u_y}{\Delta X} \text{ si } \theta_1 \approx 0$$

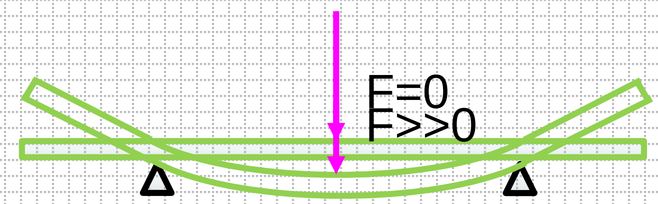
$$\gamma_{xy} = \frac{\Delta u_x}{\Delta Y} + \frac{\Delta u_y}{\Delta X}, si \Delta X, \Delta Y \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X}\right)$$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

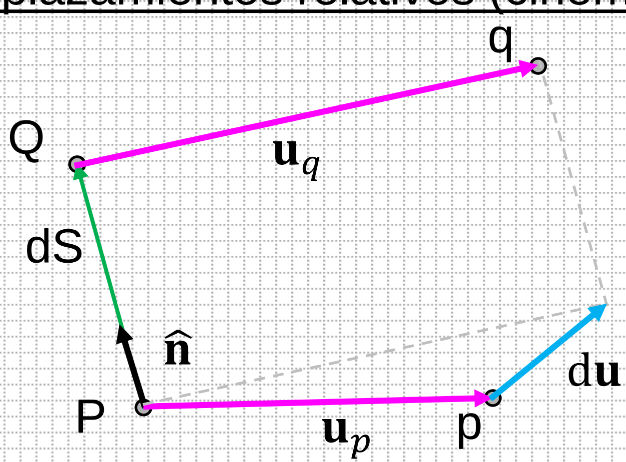
Movimientos de cuerpo rígido





Problema: Expresar $\varepsilon = \varepsilon(u)$ considerando solo la parte del campo de desplazamientos que provoca deformaciones, y no movimientos de cuerpo rígido.

Desplazamientos relativos (cinemática)



Desplazamiento relativo de Q respecto a P:

$\mathrm{d}\mathbf{u} = \mathbf{u}_q - \mathbf{u}_p.$

Desplazamiento relativo unitario de Q respecto a P:

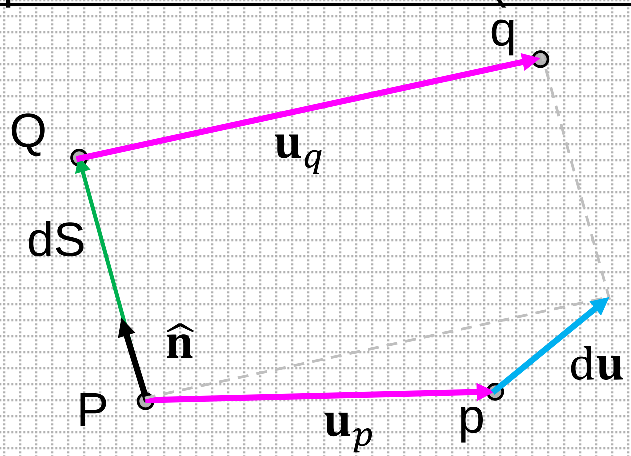
$$\frac{d\mathbf{u}}{dS}$$

Es un vector, con

$dS = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$

(los puntos están dados por su vector posición)

Desplazamientos relativos (cinemática)



Componentes del vector $\frac{d\mathbf{u}}{dS}$

$$\frac{du_x}{dS} = \frac{\partial u_x}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial u_x}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial S}$$

$$\frac{du_y}{dS} = \frac{\partial u_y}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial u_y}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial S}$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{du_x}{dS} \\ \frac{du_y}{dS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial X} & \frac{\partial u_x}{\partial Y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial X} & \frac{\partial u_y}{\partial Y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial S} \\ \frac{\partial Y}{\partial S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial X} & \frac{\partial u_x}{\partial Y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial X} & \frac{\partial u_y}{\partial Y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{n}_x \\ \hat{n}_y \end{bmatrix}$$

$\mathbf{J}_u$

- Gradiente de desplazamiento
- Matriz Jacobiana
- Matriz de desplazamientos relativos unitarios

Luego

$$\frac{d\mathbf{u}}{dS} = \mathbf{J}_u \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

O en forma tensorial

$$\frac{d\mathbf{u}}{dS} = \mathbf{u}\overleftarrow{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\nabla}\mathbf{u}$$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Descomposición aditiva de $\mathbf{J}_u$

Se descompone el gradiente de desplazamiento a fin de separar las componentes que provocan deformaciones de aquellas que originan movimientos de cuerpo rígido.

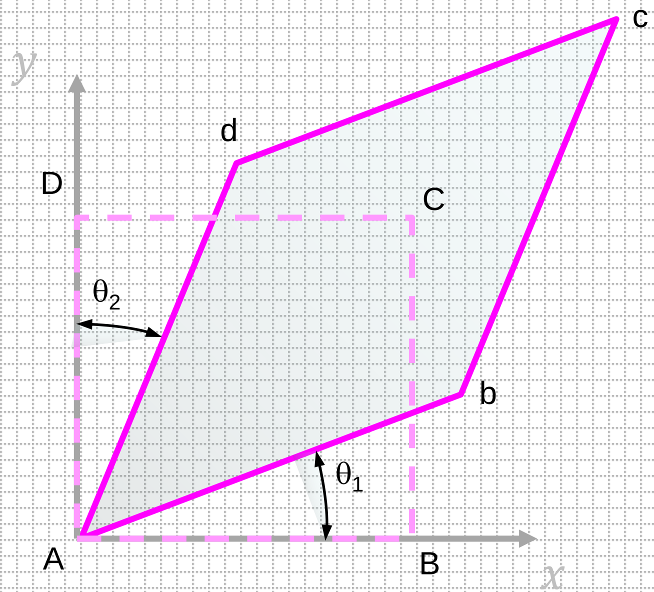
$$\mathbf{J}_u = \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}_u + {\mathbf{J}_u}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}_u - {\mathbf{J}_u}^T\right) = \mathbf{E} + \mathbf{\Omega}$$

Matriz de deformaciones específicas $$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial X} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathrm{x}} & \varepsilon_{\mathrm{xy}} \\ \varepsilon_{\mathrm{yx}} & \varepsilon_{\mathrm{y}} \end{bmatrix}$$

Matriz de rotación $$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} - \frac{\partial u_y}{\partial X}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial X} - \frac{\partial u_x}{\partial Y}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{\mathrm{xy}} \\ \Omega_{\mathrm{yx}} & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos a demostrar que ante un campo de desplazamientos que provoque sólo deformaciones $\mathbf{J}_u = \mathbf{E}$ y en el caso que origine sólo movimientos de cuerpo rígido $\mathbf{J}_u = \mathbf{\Omega}$

Deformación pura sin rotación ($\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$)



Segmento AB

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial u_y}{\partial X} - \frac{\partial u_x}{\partial Y} = \frac{\partial u_x}{\partial Y} - \frac{\partial u_y}{\partial X} = 0 \rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial Y} = \frac{\partial u_y}{\partial X}$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dS} = \begin{bmatrix} \frac{du_x}{dS} \\ \frac{du_y}{dS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial X} & \frac{\partial u_x}{\partial Y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial X} & \frac{\partial u_y}{\partial Y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{yx} \end{bmatrix}$$

Segmento AD

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

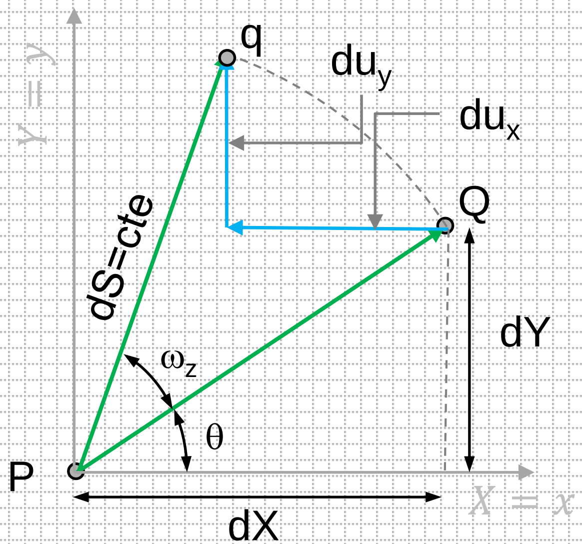
$$\frac{d\mathbf{u}}{dS} = \begin{bmatrix} \frac{du_x}{dS} \\ \frac{du_y}{dS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial X} & \frac{\partial u_x}{\partial Y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial X} & \frac{\partial u_y}{\partial Y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{E}$ es simétrica, $\varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xy} \rightarrow \theta_1 = \theta_2$ y en consecuencia **no hay rotación**

Las columnas de $\mathbf{E}$ representan las componentes de las deformaciones de los segmentos AB y AD divididas por la longitud de estos segmentos; en las direcciones X e Y

Rotación pura sin deformación ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$)

Consideremos una rotación del segmento PQ con centro de giro en P



$$du_x = dS\cos(\omega_z + \theta) - dS\cos(\theta)$$

Recordando la identidad trigonométrica

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \sin(a)\cdot\sin(b)$$

$$\frac{du_x}{dS} = \cos(\omega_z)\cdot\cos(\theta) - \sin(\omega_z)\cdot\sin(\theta) - \cos(\theta)$$

$$\boxed{\frac{du_x}{dS} = (\cos(\omega_z) - 1)\cdot\cos(\theta) - \sin(\omega_z)\cdot\sin(\theta)}$$

En el sentido Y

$$du_y = dS\sin(\omega_z + \theta) - dS\sin(\theta)$$

Recordando la identidad trigonométrica $\sin(a + b) = \cos(a)\cdot\sin(b) + \sin(a)\cdot\cos(b)$

$$\frac{du_y}{dS} = (\sin(\omega_z)\cdot\cos(\theta) + \cos(\omega_z)\cdot\sin(\theta)) - \sin(\theta)$$

$$\boxed{\frac{du_y}{dS} = \sin(\omega_z)\cdot\cos(\theta) + (\cos(\omega_z) - 1)\cdot\sin(\theta)}$$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Rotación pura sin deformación ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$)

Reordenando las expresiones para $\frac{du_x}{dS}$ y $\frac{du_y}{dS}$ en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{du_x}{dS} \\ \frac{du_y}{dS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_z) - 1 & -\sin(\omega_z) \\ \sin(\omega_z) & \cos(\omega_z) - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

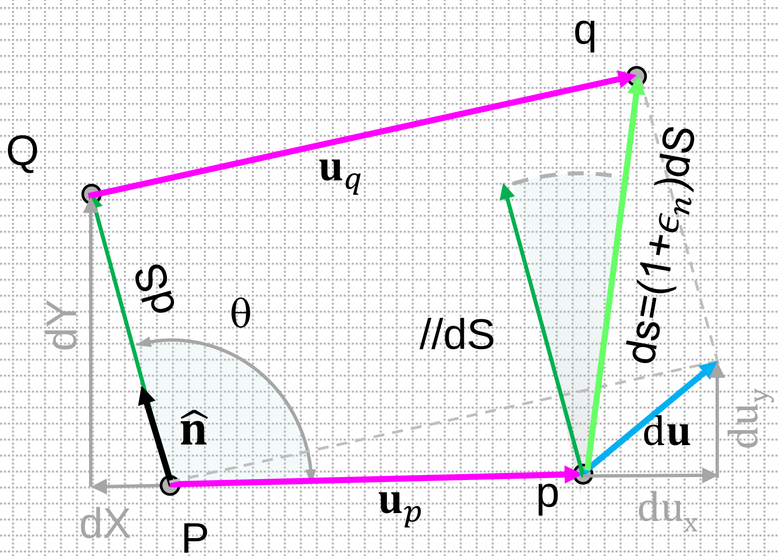
Si $\omega_z \ll 1rad \rightarrow \cos(\omega_z) = 1; \sin(\omega_z) = \omega_z$ y como $\cos(\theta) = \frac{\partial X}{\partial S}; \sin(\theta) = \frac{\partial Y}{\partial S}$

$$\begin{bmatrix} \frac{du_x}{dS} \\ \frac{du_y}{dS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial S} \\ \frac{\partial X}{\partial S} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{J}_u = \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{xy} \\ \Omega_{yx} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \omega_z = \Omega_{yx} = -\Omega_{xy}$$

Es decir, si se cumple la hipótesis de rotaciones infinitesimales, y en un punto del continuo P se verifica que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$; la matriz de rotación $\mathbf{\Omega}$ representa una rotación infinitesimal de cuerpo rígido del material en un entorno diferencial alrededor de P.

Extensión unitaria de un elemento inclinado

Demostraremos que aún en presencia de rotaciones de cuerpo rígido la extensión unitaria ϵ_n de un elemento orientado según un vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ puede calcularse a partir de la matriz de deformaciones específicas $\mathbf{E}$ y $\hat{\mathbf{n}}$, y luego que si $\mathbf{E}=\mathbf{0}$; $\epsilon_n = 0\ \forall\ \hat{\mathbf{n}}$.



Hipótesis:

- Las derivadas del campo de desplazamientos son pequeñas comparadas con la unidad.
- Los valores de extensión unitaria ε_n son pequeños comparados con la unidad.

$$dS = |\overline{PQ}|$$

$$ds = |\overline{pq}| = (1+\epsilon_n)\cdot dS$$

Luego
$$\frac{|\overline{pq}|^2 - |\overline{PQ}|^2}{|\overline{PQ}|^2} = \frac{(1+\epsilon_n)^2\cdot dS^2 - dS^2}{dS^2} = \frac{((1+\epsilon_n)^2 - 1)\cdot dS^2}{dS^2} = 2\epsilon_n + {\epsilon_n}^2$$

Por otro lado, considerando que

$$dS^2 = |\overline{PQ}|^2 = dX^2 + dY^2; ds^2 = |\overline{pq}|^2 = (dX + du_x)^2 + (dY + du_y)^2$$

Luego
$$\frac{|\overline{pq}|^2 - |\overline{PQ}|^2}{|\overline{PQ}|^2} = \frac{\left[(dX + du_x)^2 + (dY + du_y)^2\right] - [dX^2 + dY^2]}{dS^2} =$$

$$\frac{dX^2 + 2\,dX du_x + du_x^2 + dY^2 + 2\,dY du_y + du_y^2 - dX^2 - dY^2}{dS^2} =$$

$$2\left(\frac{dX}{dS}\frac{du_x}{dS} + \frac{dY}{dS}\frac{du_y}{dS}\right) + \frac{du_x^2}{dS^2} + \frac{du_y^2}{dS^2}$$

Igualando ambas expresiones

$$\cancel{2}\epsilon_n + \boxed{{\epsilon_n}^2} = \cancel{2}\left(\frac{dX}{dS}\frac{du_x}{dS} + \frac{dY}{dS}\frac{du_y}{dS}\right) + \boxed{\frac{du_x^2}{dS^2} + \frac{du_y^2}{dS^2}} = \frac{d\mathbf{u}}{dS}\cdot\hat{\mathbf{n}}$$

infinitesimos

Recordando que

$$\frac{du_x}{dS} = \frac{\partial u_x}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial u_x}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial S}; \frac{du_y}{dS} = \frac{\partial u_y}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial u_y}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial S}$$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Agrupando y reorganizando

$$\epsilon_n = \left(\frac{dX}{dS}\left(\frac{\partial u_x}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial u_x}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial S}\right) + \frac{dY}{dS}\left(\frac{\partial u_y}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial u_y}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial S}\right)\right)$$

$$\epsilon_n = \frac{\partial u_x}{\partial X}\frac{\partial X^2}{\partial S^2} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial X} + \frac{\partial u_x}{\partial Y}\right)\frac{\partial X}{\partial S}\frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{\partial u_y}{\partial Y}\frac{\partial Y^2}{\partial S^2}$$

Como $\frac{\partial X}{\partial S} = \cos(\theta)$; $\frac{\partial Y}{\partial S} = \sin(\theta)$; $\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial X}$; $\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial Y}$; $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial X} + \frac{\partial u_x}{\partial Y}\right)$

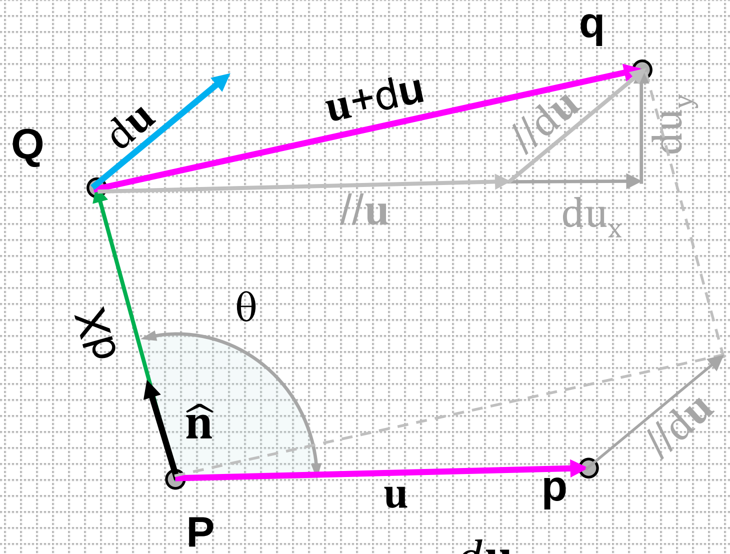
$$\boxed{\epsilon_n = \varepsilon_x \cos(\theta)^2 + 2\varepsilon_{xy}\cos(\theta)\sin(\theta) + \varepsilon_y \sin(\theta)^2}$$

Si $\epsilon_n = 0$, considerando que $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ pueden tomar cualquier valor entre -1 y 1, resulta que la condición para la cual no existan extensiones unitarias en cualquier dirección alrededor de un punto es que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, en otras palabras, $\mathbf{E}$ contiene toda la información de la deformación alrededor de P

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Pequeñas deformaciones y rotaciones 3D

Dado un punto P y un punto Q en un entorno infinitesimal de P, $d\mathbf{X} = \overline{\mathbf{QP}}$,
con $\mathbf{X} = \{X, Y, Z\} = \{X_1, X_2, X_3\}$



Desplazamiento relativo de Q resp. a P

$$\frac{d\mathbf{u}}{dS} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial S} = \begin{bmatrix} \dfrac{du_x}{dS} \\ \dfrac{du_y}{dS} \\ \dfrac{du_z}{dS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial X} & \dfrac{\partial u_x}{\partial Y} & \dfrac{\partial u_x}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial X} & \dfrac{\partial u_y}{\partial Y} & \dfrac{\partial u_y}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial X} & \dfrac{\partial u_z}{\partial Y} & \dfrac{\partial u_z}{\partial Z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial S} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial S} \\ \dfrac{\partial Z}{\partial S} \end{bmatrix}$$

De forma compacta $$\frac{d\mathbf{u}}{dS} = \boldsymbol{J}_u \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u}\overleftarrow{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\nabla}\mathbf{u}$$

Como el gradiente de un vector es un tensor, $\boldsymbol{J}_u$ es un tensor.

Descomposición aditiva de $\mathbf{J}_u$

Al igual que en el caso 2D

$$\mathbf{J}_u = \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}_u + \mathbf{J}_u{}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}_u - \mathbf{J}_u{}^T\right) = \mathbf{E} + \mathbf{\Omega}$$

Matriz de deformaciones específicas

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial X} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial Y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial X}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial Z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial X}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial Y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial X}\right) & \dfrac{\partial u_y}{\partial Y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial Z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial Y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial Z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial X}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial Z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial Y}\right) & \dfrac{\partial u_z}{\partial Z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\overleftarrow{\nabla} + \overrightarrow{\nabla}\mathbf{u}\right)$$

Como $\mathbf{u}\overleftarrow{\nabla}, \overrightarrow{\nabla}\mathbf{u}$ son tensores, $\mathbf{E}$ es un tensor

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Descomposición aditiva de $\mathbf{J}_u$

Matriz de rotación

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} - \frac{\partial u_y}{\partial X}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial Z} - \frac{\partial u_z}{\partial X}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial X} - \frac{\partial u_x}{\partial Y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial Z} - \frac{\partial u_z}{\partial Y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial X} - \frac{\partial u_x}{\partial Z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial Y} - \frac{\partial u_y}{\partial Z}\right) & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\overleftarrow{\nabla} - \overrightarrow{\nabla}\mathbf{u}\right)$$

Como $\mathbf{u}\overleftarrow{\nabla}, \overrightarrow{\nabla}\mathbf{u}$ son tensores, $\boldsymbol{\Omega}$ es un tensor

En el análisis 2D vimos que una rotación de cuerpo rígido ω_z alrededor del eje Z pasante por P está vinculada a un tensor $\boldsymbol{\Omega}$ 2D cuyas componentes resultan $\omega_z = \Omega_{yx} = -\Omega_{xy}$

Esta conclusión se extiende a 3D considerando el caso $\frac{d\mathbf{u}}{dS} = \boldsymbol{J}_u \cdot \hat{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ y un vector rotación

$\boldsymbol{\omega} = -\Omega_{yz}\mathbf{i} - \Omega_{zx}\mathbf{j} - \Omega_{xy}\mathbf{k}$ O en forma indicial $\omega_i = -\frac{1}{2} e_{ijk}\Omega_{jk}$

El producto matricial $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario, puede escribirse como

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

<u>Descomposición aditiva de $\mathbf{J}_u$</u>

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{xy} & -\Omega_{zx} \\ -\Omega_{xy} & 0 & \Omega_{yz} \\ \Omega_{xz} & -\Omega_{yz} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{\Omega}\,\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \Omega_{xy}n_y - \Omega_{xz}n_z \\ -\Omega_{xy}n_x + \Omega_{yz}n_z \\ \Omega_{xz}n_x - \Omega_{yz}n_y \end{bmatrix}$$

además

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\Omega_{yz} & -\Omega_{zx} & -\Omega_{xy} \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} =$$

$$\left(-\Omega_{zx}n_z + \Omega_{xy}n_y\right)\mathbf{i} + \left(-\Omega_{xy}n_x + \Omega_{yz}n_z\right)\mathbf{j} + \left(-\Omega_{yz}n_y + \Omega_{zx}n_x\right)\mathbf{k}$$

luego

$$\frac{d\mathbf{u}}{dS} = \mathbf{\Omega}\,\mathbf{n} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}$$

Recordando la definición de rotor de un campo vectorial, resulta

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}$$ O en forma indicial $$\omega_i = -\frac{1}{2}e_{ijk}u_{k,j}$$

<u>NOTA:</u>
Siempre que se trate de pequeñas deformaciones

Extensión unitaria

Como

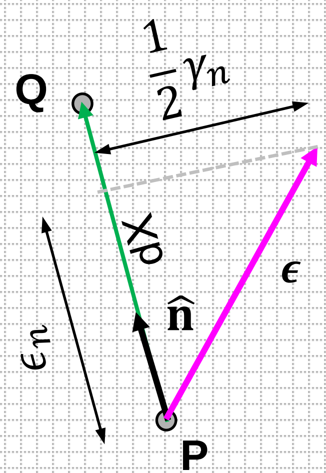
$$\frac{d\mathbf{u}}{dS} = \boldsymbol{J}_u \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \boldsymbol{J}_u \cdot \hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\epsilon}$$

Donde $\boldsymbol{\epsilon}$ es el vector de deformación específica que representa la fracción del desplazamiento relativo unitario no originada por una rotación de cuerpo rígido del elemento inicialmente en P

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

La extensión unitaria del segmento PQ es la proyección de $\boldsymbol{\epsilon}$ en la dirección $\hat{\mathbf{n}}$.

$$\epsilon_n = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$



Aplicando Pitágoras, el desplazamiento lateral debido al corte resulta

$$\left|\frac{1}{2}\gamma_n\right| = \left(|\boldsymbol{\epsilon}\ |^2 - \epsilon_n\ ^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Tensores de Deformación Específica y Rotación

Ya demostramos que tanto $\mathbf{E}$ como $\boldsymbol{\Omega}$ son tensores por ser suma de tensores ($\mathbf{u}\overleftarrow{\nabla}$ y $\overrightarrow{\nabla}\mathbf{u}$).
Las consecuencias de esto son:

A) Frente a una transformación de coordenadas entre los sistemas de referencia X_p a $\overline{X_r}$, las componentes se trasforman como

$\bar{\varepsilon}_{rs} = a_r^p a_s^q \varepsilon_{pq}$ e inversamente $\varepsilon_{pq} = a_p^r a_q^s \bar{\varepsilon}_{rs}$

B) Valen todas las deducciones realizadas para las tensiones respecto a **deformaciones especificas principales** $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$; invariantes I_E, II_E, III_E; **deformaciones específicas esférica y deviatórica**; Circulo de Mohr de deformaciones específicas, etc.

Deformación específica normal media $\frac{e}{3}$

$$\frac{e}{3} = \frac{1}{3}\left(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z\right) = \frac{1}{3} I_E = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}$$

Dilatancia o Deformación volumétrica

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

Tensor de deformación esférica $\frac{e}{3}\,\mathbf{1}$

Miden cambio de volumen

Tensor deviador de deformación específica $\boldsymbol{E}'$

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} - \frac{e}{3}\,\mathbf{1} \rightarrow \grave{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{e}{3}\,\delta_{ij}$$

Mide cambio de forma

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Tensores de Deformación Específica y Rotación

La dilatancia representa el cambio de volumen ya que, en un sistema principal de referencia $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$; un elemento rectangular de dimensiones iniciales $\Delta\bar{X}$, $\Delta\bar{Y}$, $\Delta\bar{Z}$ con volumen inicial $V_0 = \Delta\bar{X} \cdot \Delta\bar{Y} \cdot \Delta\bar{Z}$, luego del proceso de deformación tiene un volumen $V_F = (1+\bar{\epsilon}_x)\Delta\bar{X} \cdot \left(1+\bar{\epsilon}_y\right)\Delta\bar{Y} \cdot (1+\bar{\epsilon}_z)\Delta\bar{Z} = V_0(1+\left(\bar{\epsilon}_x+\bar{\epsilon}_y+\bar{\epsilon}_z\right)+\left(\bar{\epsilon}_x\bar{\epsilon}_y+\bar{\epsilon}_y\bar{\epsilon}_z+\bar{\epsilon}_z\bar{\epsilon}_x\right)+\bar{\epsilon}_x\bar{\epsilon}_y\bar{\epsilon}_z)$

Luego

$$\frac{V_F - V_0}{V_0} = \frac{\Delta V}{V_0} = \bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y + \bar{\epsilon}_z = e$$

Deformación plana y deformaciones superficiales

En un punto de un cuerpo existe un estado de deformación plana paralelo al plano XY si:

$$\epsilon_z = 0; \epsilon_{zx} = \epsilon_{yz} = 0$$

Los restantes elementos del tensor de deformaciones específicas son no nulos e independientes de Z

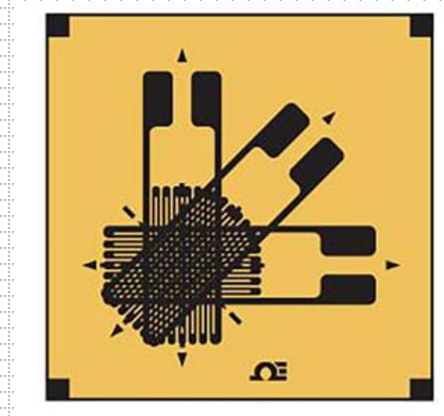
TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

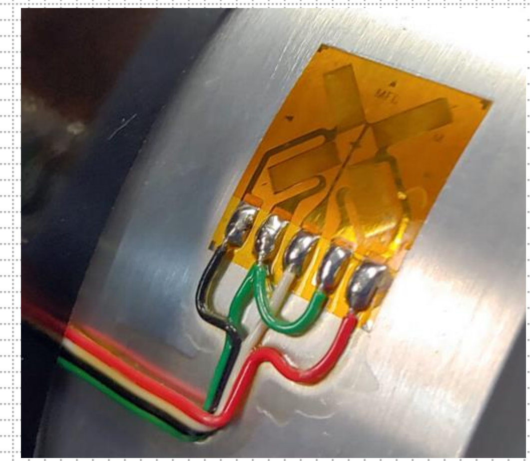
Deformación plana y deformaciones superficiales

Particularizando el círculo de Mohr para deformaciones específicas, conociendo las deformaciones específicas no nulas en un sistema XY, ϵ_x, ϵ_y, ϵ_{xy}; se puede evaluar la deformación axial en una dirección $\bar{X}$ rotada un ángulo α respecto a X como

$$\bar{\epsilon}_{\bar{x}} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_x + \epsilon_y\right) + \frac{1}{2}\left(\epsilon_x - \epsilon_y\right)\cos(2\alpha) + \epsilon_{xy}\sin(2\alpha)$$

Esto es útil para determinar el estado de deformación en la superficie de un cuerpo utilizando strain-gauges





NOTAS: Estas medidas de deformación y movimiento de cuerpo rígido son válidas en el contexto de la hipótesis de pequeñas deformaciones, usualmente se verifica en metales en el rango elástico, por ejemplo. En otro casos donde no es posible asegurar su cumplimiento, la teoría es aproximada.

EJERCICIOS PÁGINA 135 MALVERN: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 Y 9

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Cinemática del continuo; derivadas materiales

Tipos de descripción del movimiento en el continuo

1 - Material

- Variables independientes: Partícula *X* y tiempo **t**
- $\mathbf{x} = \mathbf{x}(X, \mathrm{t})$

2 - Referencial

- Variables independientes: Posición ocupada por la Partícula ***X*** en el estado de referencia, **X**, y tiempo **t**
- Si en el estado de referencia **t**=0, Lagrangeana o Material
- $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, \mathrm{t})$

3 - Espacial

- Variables independientes: Posición de la Partícula ***x*** en el tiempo ***t*** y el tiempo presente **t**
- *Analiza una región del espacio y no un cuerpo definido*
- Muy usada en fluidos, designada como Euleriana
- $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathrm{t})$

4 - Relativa

- Variables independientes: Posición actual de la Partícula ***x*** y un instante de tiempo variable $\boldsymbol{\tau}$, en el que la partícula ocupaba una posición ξ.
- $\boldsymbol{\xi} = \chi_t(\mathbf{x}, \tau)$ con χ_t una configuración en el instante **t**

Se utilizan normalmente 2 y 3

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Descripción Referencial

En la *descripción referencial* el movimiento es $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, \mathrm{t})$, en componentes resulta

$$x_r = x_r(X_1, X_2, X_3, \mathrm{t})$$

Donde $\{X_1, X_2, X_3\}$ son las *coordenadas materiales* y $\{x_1, x_2, x_3\}$ las *coordenadas espaciales.*

El sistema de referencia para $\mathbf{X}$ y $\mathbf{x}$ puede ser el mismo o puede cambiar con el tiempo. La designación $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}$ son intercambiables, donde $\mathbf{p}$ indica la partícula cuyo vector posición es $\mathbf{x}$. Además, pueden existir distintas configuraciones de referencia para describir el movimiento, por ejemplo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\kappa_1}(\mathbf{X}, \mathrm{t})$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\kappa_2}(\mathbf{X}, \mathrm{t})$. Si no se indica nada, la configuración de referencia permanece constante.

En esta descripción generalmente se conoce la historia del movimiento de la partícula (*trayectoria*), porque $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, \mathrm{t})$ está definido. Luego la derivada respecto al tiempo de la posición manteniendo $\mathbf{X}$ constante resulta

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathrm{t}) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}(\mathbf{X}, \mathrm{t}) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}}$$

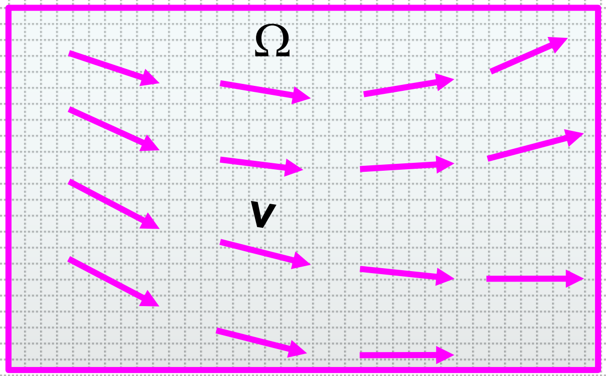
El subíndice $()_{\mathbf{X}}$ indica que $\mathbf{X}$ = cte. Luego

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathrm{t}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{x}(\mathbf{X}, \mathrm{t})$$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Descripción Espacial

En la *descripción espacial* el movimiento es $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathrm{t})$, normalmente se analiza una región fija del espacio en donde se conocen las velocidades (flujo).



En esta descripción generalmente se conoce la historia de las velocidades de las sucesivas partículas que pasan por un punto $\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathrm{t})$. Normalmente no se conoce la trayectoria o el punto de inicio del movimiento $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathrm{t} = 0)$, por lo que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathrm{t}) \neq \mathbf{a}$$

$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathrm{t})$ es la tasa local de cambio de v, describe como varía **v** en el tiempo para un punto fijo en el espacio **x**, no es lo mismo que la aceleración **a**

Flujo permanente (no cambia en el tiempo) $\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} = 0 \;\forall\, \mathbf{x}$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Derivada temporal material en coordenadas espaciales

Dado que las leyes de la mecánica del continuo se expresan en función de aceleraciones $\mathbf{a}$ y no de tasas locales de cambio, es necesario evaluar $\mathbf{a}$ a partir de los datos disponibles en la descripción espacial, $\mathbf{v}=\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathrm{t})$. Si bien no se conoce $\mathbf{v}=\mathbf{G}(\mathbf{X},\mathrm{t})$, se asume que existe una función univaluada y suficientemente diferenciable $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},\mathrm{t})$. Luego, substituyendo

$$\mathbf{v}=\mathbf{G}(\mathbf{X},\mathrm{t})=\mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{X},\mathrm{t}),\mathrm{t})$$

Diferenciando respecto al tiempo manteniendo $\mathbf{X}$=cte

$$\mathbf{a}=\left(\frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{X},\mathrm{t}),\mathrm{t})}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}}=\left(\frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}}+\left(\frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\partial\mathbf{x}}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{x}(\mathbf{X},\mathrm{t})}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{X}}=\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}}+\mathbf{v}\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}}\right)$$

En componentes

$a_{\boldsymbol{m}}=\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}}=\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}}+v_k\frac{\partial v_m}{\partial x_k}$ o bien en forma compacta $\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\dot{\mathbf{v}}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\ \mathrm{grad}(\mathbf{v})$

El operador derivada temporal material

$$\frac{d()}{dt}=\frac{\partial()}{\partial t}+\mathbf{v}\ \mathrm{grad}()$$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Derivada temporal material en coordenadas espaciales

$\frac{d()}{dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + \mathbf{v}\ \mathrm{grad}()$ es un operador que puede aplicarse a tensores de cualquier orden

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial t} + v_k \partial_k f$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &\equiv \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\,\mathbf{u} \\ \dot{u}_m &\equiv \frac{du_m}{dt} = \frac{\partial u_m}{\partial t} + v_k \partial_k u_m \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} &\equiv \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\,\mathbf{T} \\ \dot{T}_{km} &\equiv \frac{dT_{km}}{dt} = \frac{\partial T_{km}}{\partial t} + v_r \partial_r T_{km} \end{aligned}\right\}$$

EJEMPLO: la descripción espacial de la densidad

$\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$

La tasa de cambio de densidad en la vecindad de la partícula que ocupa la posición $\mathbf{x}$ en el instante t es:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v\ \mathrm{grad}(\rho)$$

Tasa local de cambio en $\mathbf{x}$: $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ (=0 en flujo permanente)

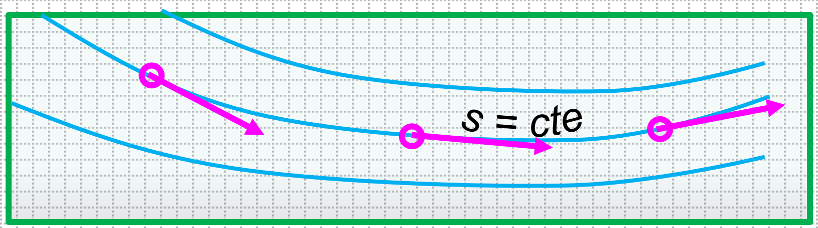
Tasa convectiva de cambio en la vecindad de la partícula: $v\ \mathrm{grad}(\rho)$ (=0 en flujo unifome)

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

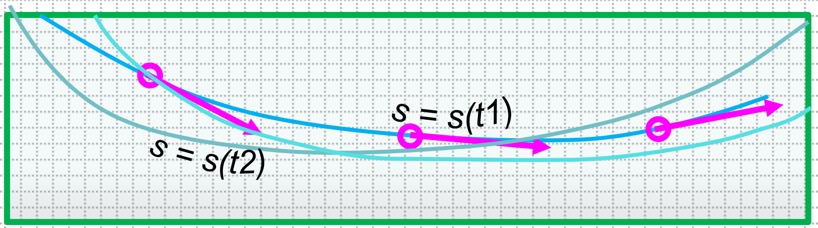
Líneas de flujo y trayectoria de la partícula

Línea de flujo: curva cuya tangente en cada punto tiene la dirección del vector velocidad.
Trayectoria de la partícula: curva compuesta por las posiciones que ocupa una partícula en los sucesivos instantes de tiempo.

Flujo permanente: La trayectoria de una partícula coincide con una de las líneas de flujo *s* invariantes en el tiempo.



Flujo impermanente: La trayectoria de una partícula **no** coincide con una de las líneas de flujo *s(t).*



Dada la descripción espacial de una función de punto (supongamos vectorial, pero podría ser escalar o tensorial) $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$; si s son las sucesivas posiciones a lo largo de una línea de flujo $s = s(\mathbf{x}, t)$, puede expresarse la función como $\mathbf{u} = \mathbf{u}(s, t)$.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

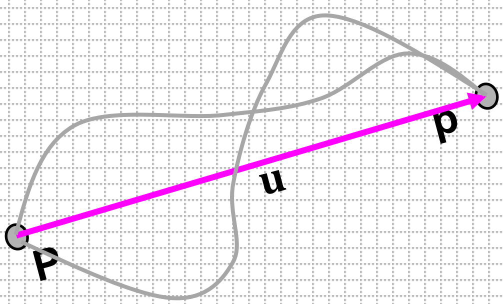
Como la velocidad $\mathbf{v} = \vec{\mathbf{e}}_t(\frac{ds}{dt})$, $\vec{\mathbf{e}}_t$ es el vector tangente a la línea de flujo, si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}s}$$

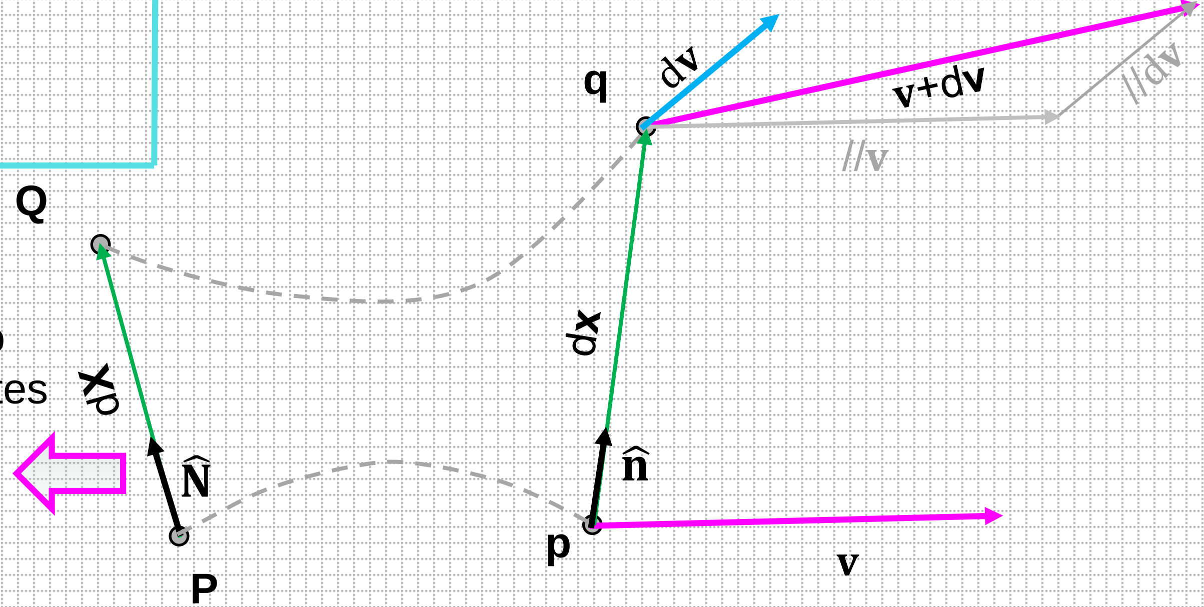
TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Tensor tasa de deformación (estiramiento) y tensor de espín (vorticidad)

Teoría de pequeñas deformaciones y elasticidad: La transición de **P** a **p** es según **u**, que no considera las posibles trayectorias entre los dos puntos



Teoría de Deformaciones finitas o comportamiento material no lineal: Debe considerarse la transición de **P** a **p** según una única trayectoria que define la evolución de la deformación y de las variables de estado -> ***Movimiento tangente***



$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, \mathrm{t})$ o bien $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathrm{t})$ luego

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, \mathrm{t}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathrm{t})$ en componentes

$v_i = v_i(X_1, X_2, X_3, \mathrm{t})$ {materiales} o

$v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, \mathrm{t})$ {espaciales}

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Tensor tasa de deformación (estiramiento) y tensor de espín (vorticidad)

Movimiento tangente: El observador sólo puede registrar las velocidades **v** en función de las coordenadas espaciales **x** y el tiempo t. No es posible conocer las trayectorias -> sólo vale la descripción espacial.

Velocidad relativa de **q** respecto a **p**: Designada como $\mathrm{d}\mathbf{v}$, resulta

$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{v}\overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}\mathbf{v} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}^{T}$ donde $\mathbf{L} = \mathbf{v}\overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}$y $\mathbf{L}^{T} = \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$. En componentes resulta

$\mathrm{dv}_{\boldsymbol{i}} = \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \cdot dx_m = v_{k,m} \cdot dx_m = L_{km} \cdot dx_m$, donde $L_{km} = v_{k,m}$

$\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$ y se denomina ***Gradiente espacial de velocidad*** (recordar gradiente de deformación)

Descomposición aditiva de $\mathbf{L}$

Al igual que en el caso del gradiente de desplazamiento $\mathbf{J}_u$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^{T}) + \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^{T}) = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} + \mathbf{L}^{T}\right)$: **Tensor tasa de deformación** o **tensor de estiramiento**, $D_{km} = D_{mk} \rightarrow simétrico$
$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} - \mathbf{L}^{T}\right)$: **Tensor de espín** o **tensor de vorticidad**, $W_{km} = -W_{mk} \rightarrow antisimétrico$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Tensor tasa de deformación (estiramiento) y tensor de espín (vorticidad)

El significado físico del tensor **W** se encuentra al hacer **D** = **0**, en ese caso la velocidad relativa de **q** respecto a **p** es:

$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{W} \cdot d\mathbf{x} = \boldsymbol{w} \times d\mathbf{x}$,

con el vector de velocidad angular $\boldsymbol{w}$ definido como

$\boldsymbol{w} = -W_{23}\,\mathbf{i_1} - W_{31}\,\mathbf{i_2} - W_{12}\,\mathbf{i_3}$ (recordar demostración para pequeñas deformaciones)

Por lo cual

$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}$ o en componentes $w_i = \frac{1}{2} e_{ijk} v_{k,j} = \frac{1}{2} e_{ijk} \partial_j v_k$

Si el campo de velocidades **v** es irrotacional, **W = 0** y **L** = **D**, en ese caso la velocidad relativa de **q** respecto a **p** es:

$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x}$,

Como $\mathbf{D}$ es un tensor de segundo orden simétrico, se puede aplicar los desarrollos vistos para **T** respecto a:

- Direcciones principales
- Invariantes
- Círculo de Mohr

Significado físico del tensor tasa de deformación

Adoptando como medida de deformación en el instante t el cuadrado de la longitud del vector d**x**, ds², con $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i$, su tasa de cambio es

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{d}s^2) = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\frac{d}{dt}(\mathrm{d}\mathbf{x})$$ [A], en componentes $\frac{d}{dt}(\mathrm{d}s^2) = 2\mathrm{d}x_i\cdot\frac{d}{dt}(\mathrm{d}x_i)$

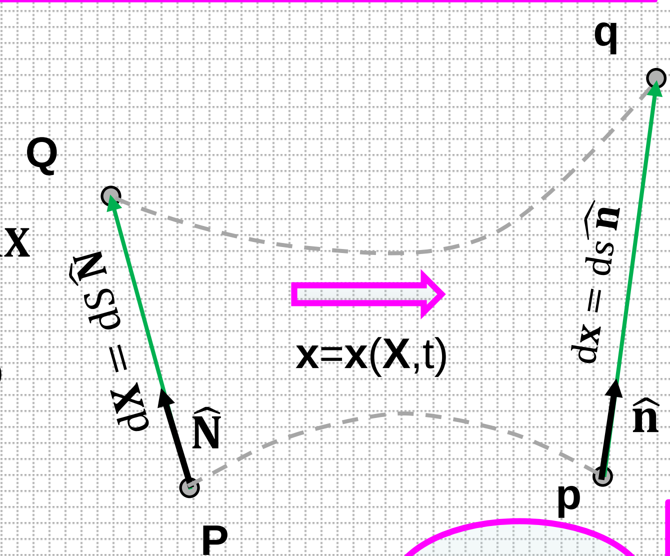
Como $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ luego $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{x}\overleftarrow{\nabla}\,\mathrm{d}\mathbf{X}$ en consecuencia

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{d}\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}\overleftarrow{\nabla}\right)\mathrm{d}\mathbf{X} + \mathbf{x}\overleftarrow{\nabla}\frac{d}{dt}(\mathrm{d}\mathbf{X})$$

=**0** por ser **X** cte (configuración inicial)

e intercambiando el orden de diferenciación

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{d}\mathbf{x}) = \mathrm{d}\frac{d}{dt}(\mathbf{x}) = \mathrm{d}\mathbf{v} = \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{x})\right)\overleftarrow{\nabla}\,\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{v}\overleftarrow{\nabla}\,\mathrm{d}\mathbf{X}$$



Como $\overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}} = \mathrm{grad}()$ es diferente a $\overleftarrow{\nabla} = \overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{X}}$ pero

$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{L}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{v}\overleftarrow{\nabla}\,\mathrm{d}\mathbf{X}$ luego en [A]

=**0** (forma cuadrática tensor antisimétrico)

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{d}s^2) = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\frac{d}{dt}(\mathrm{d}\mathbf{x}) = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{v} = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} + 2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Significado físico del tensor tasa de deformación

Finalmente: $\frac{d}{dt}(\mathrm{d}s^2) = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$

Comparación entre $\mathbf{D}$ y $\dot{\mathbf{E}}$

Dado $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ o en componentes $\mathrm{u_i} = \mathrm{u_i}(X_1, X_2, X_3, t)$, el tensor de deformación específica en pequeñas deformaciones resulta

$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\overleftarrow{\nabla} + \overrightarrow{\nabla}\mathbf{u}\right)$ o en componentes $\varepsilon_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$

Luego $\dot{\mathbf{E}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}\overleftarrow{\nabla} + \overrightarrow{\nabla}\mathbf{u}\right) = \frac{1}{2}\left((\frac{d}{dt}(\mathbf{u}))\overleftarrow{\nabla} + \overrightarrow{\nabla}(\frac{d}{dt}(\mathbf{u}))\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{v}\overleftarrow{\nabla} + \overrightarrow{\nabla}\mathbf{v}\right)$

Por otra parte $\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{v}\overleftarrow{\nabla_{\mathbf{x}}} + \overrightarrow{\nabla_{\mathbf{x}}}\mathbf{v}\right)$, luego si $\mathbf{x} \to \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{D} \to \dot{\mathbf{E}}$ (peq. def.)

Incrementos naturales de deformación específica

Del ensayo de tracción uniaxial, se define la deformación específica convencional como $\mathrm{e} = \frac{L - L_0}{L_0}$ luego $\Delta\mathrm{e} = \frac{\Delta L}{L_0}$ y $\mathrm{de} = \frac{dL}{L_0}$, con lo que si se va a obtener el valor total por medio de integración $\mathrm{e} = \frac{1}{L_0}\int_{L_0}^{L} dL$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Incrementos naturales de deformación específica

El diferencial de deformación específica natural se define como

$d\epsilon = \frac{dL}{L}$

Luego

$\epsilon = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0}$, y como $L = (1+e)L_0$ resulta $\epsilon = \ln(1+e)$

El diferencial de esta medida de deformación específica puede generalizarse a 3D como

$$d\epsilon_{ij} = D_{ij} \cdot dt$$

luego

$$\int_{t_0}^{t} d\epsilon_{ij} = \int_{t_0}^{t} D_{ij} \cdot dt$$

Esta medida de deformación se utiliza en viscoelasticidad y viscoplasticidad

EJERCICIOS

Página 152: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Deformación y deformación específica finitas, formulación Euleriana y Lagrangeana

Descripción Material o Lagrangeana

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, \mathrm{t})$ o $x_i = x_i(X_J, \mathrm{t})$

Tensores gradiente de deformación

$\mathbf{F} = \mathbf{x}\overleftarrow{\nabla}, \ \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \overrightarrow{\nabla}\mathbf{x}$

$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X} = \mathrm{d}\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}$

$\mathrm{d}x_i = \mathrm{F}_{\mathrm{iJ}} \cdot \mathrm{d}X_J = \mathrm{dX_J} \cdot \mathrm{F}_{iJ}^{\mathrm{T}}$

Tensor de deformación específica $\mathbf{E}$

$(\mathrm{ds})^2 - (\mathrm{dS})^2 = 2\,\mathrm{d}\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}$

$(\mathrm{ds})^2 - (\mathrm{dS})^2 = 2\,\mathrm{d}X_I \cdot \mathrm{E_{IJ}} \cdot \mathrm{d}X_J$

Tensor de deformación de Green $\mathbf{C}$

$(\mathrm{ds})^2 = \mathrm{d}\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}$

$(\mathrm{ds})^2 = \mathrm{d}X_I \cdot \mathrm{C_{IJ}} \cdot \mathrm{d}X_J$

Información completa del movimiento

0 para movimientos de cuerpo rígido

Descripción Espacial o Euleriana

$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathrm{t})$ o $X_I = X_I(x_j, \mathrm{t})$

Tensores gradiente espacial de deformación

$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{X}\overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}, \ {\mathbf{F}^{-1}}^{\mathrm{T}} = \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}\mathbf{X}$

$\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot {\mathbf{F}^{-1}}^{\mathrm{T}}$

$\mathrm{d}X_I = \mathrm{F}_{\mathrm{Ij}}^{-1} \cdot \mathrm{d}x_j = \mathrm{dX_j} \cdot {\mathrm{F}^{-1}}_{Ij}^{\mathrm{T}}$

Tensor de deformación específica $\mathbf{E}^*$

$(\mathrm{ds})^2 - (\mathrm{dS})^2 = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}^* \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$

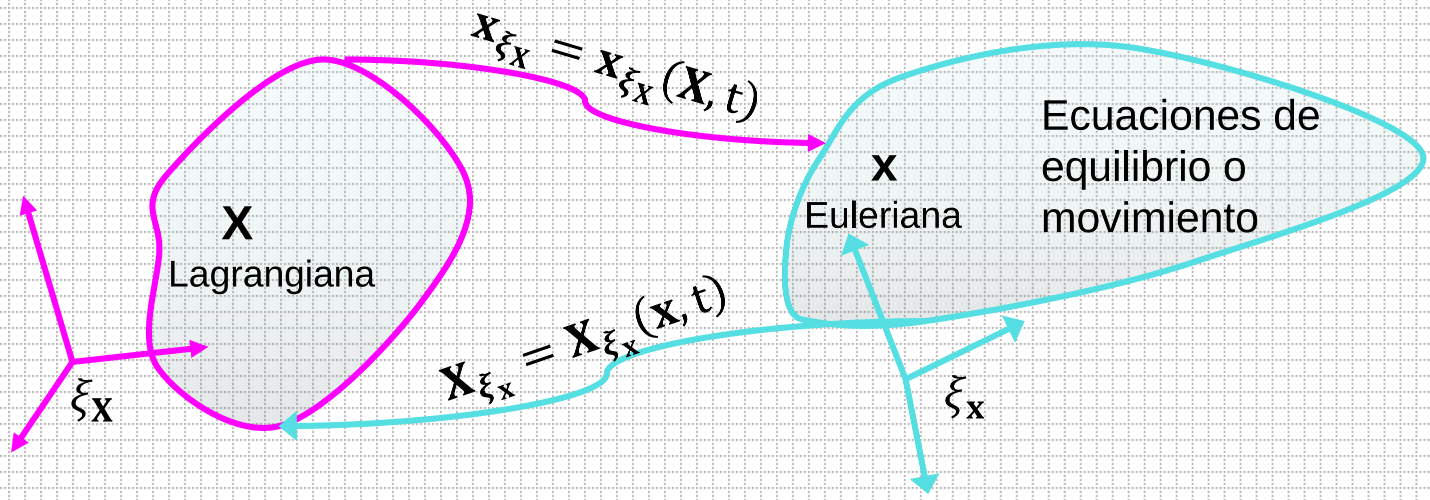
$(\mathrm{ds})^2 - (\mathrm{dS})^2 = 2\,\mathrm{d}x_i \cdot E_{ij}^* \cdot \mathrm{d}x_j$

Tensor de deformación de Cauchy $\mathbf{B}^{-1}$ o $\mathbf{c}$

$(\mathrm{dS})^2 = \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$

$(\mathrm{dS})^2 = \mathrm{d}x_i \cdot B_{ij}^{-1} \cdot \mathrm{d}x_j$

Deformación y deformación específica finitas, formulación Euleriana y Lagrangeana



Relaciones entre medidas de deformación

$$(\mathrm{ds})^2 = \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X} \rightarrow \boxed{\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}}$$

$$(\mathrm{dS})^2 = \mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot{\mathbf{F}^{-1}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} \rightarrow \boxed{\mathbf{B}^{-1} = {\mathbf{F}^{-1}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1}}$$

$$(\mathrm{ds})^2 - (\mathrm{dS})^2 = \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} - \mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathrm{d}\mathbf{X}\cdot(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F} - \mathbf{1})\cdot\mathrm{d}\mathbf{X} = 2\,\mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X} \rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{C} - \mathbf{1})}$$

$$(\mathrm{ds})^2 - (\mathrm{dS})^2 = \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} - \mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot(\mathbf{1} - {\mathbf{F}^{-1}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1})\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}^{*}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} \rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{E}^{*} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1})}$$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Consecuencias de las relaciones entre medidas de deformación

1) $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{F}^{-1}$, ${\mathbf{F}^{-1}}^{\mathrm{T}}$ son tensores por ser gradientes de un campo vectorial
2) $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}$, $\mathbf{B}^{-1} = {\mathbf{F}^{-1}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$ son tensores simétricos (producto de un tensor por su transp.)
3) $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})$, $\mathbf{E}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1})$ son tensores simétricos
4) Las direcciones principales de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{E}$ coinciden, así como las de $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{E}^*$
5) En general las direcciones principales de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{B}^{-1}$ no coinciden
6) Como $(\mathrm{d}S)^2 > 0 \;\forall\; \mathrm{d}\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ y $(\mathrm{d}s)^2 > 0 \;\forall\; \mathrm{d}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{B}^{-1}$ son positivos definidos y todos sus valores propios son positivos

Comparación entre los tensores de deformación específica para deformaciones finitas y pequeñas deformaciones

Considerando un único sistema de referencia $\xi_{\mathbf{X}}$ por lo que no se distingue entre subíndices *I* e *i*, como $x_i = X_i + u_i$, luego $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial (X_i + u_i)}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$, con lo cual $C_{ij} = F^T_{\mathrm{ik}} \cdot F_{\mathrm{kj}} = F_{ki} \cdot F_{kj}$

O sea $C_{ij} = \left(\delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right)\left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) = \left(\delta_{ki}\delta_{kj} + \delta_{ki}\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)$ luego

$C_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}$ y como $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})$ resulta

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)$$

Comparación entre los tensores de deformación específica para deformaciones finitas y pequeñas deformaciones

Si $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \ll 1 \to \frac{\partial u_i}{\partial X_k}\frac{\partial u_k}{\partial X_j} \cong 0$ y $\mathbf{E} \cong \mathbf{E}_{\text{pequeñas deformaciones}}$

Para la descripción espacial $X_i = x_i - u_i$ y

$$E^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$$

Comparación entre la tasa de deformaciones específicas y la tasa de deformación ($\frac{d}{dt}\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$)

Recordando que $(\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}S)^2 = 2\,\mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}$ y que $\mathrm{d}\mathbf{X} = cte$, $\mathrm{d}S = cte$

$$\frac{d}{dt}\left((\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}S)^2\right) = \frac{d}{dt}\left((\mathrm{d}s)^2\right) = 2\,\mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\frac{d}{dt}(\mathbf{E})\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}$$

Por otra parte, se vio que

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{d}s)^2 = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}$$

Luego

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{C}) = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}$$

Tasa de cambio del tensor gradiente de deformación $\dot{\mathbf{F}}$

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{F}) = \frac{d}{dt}\left(x_{k,K}\right) = \dot{x}_{k,K} = v_{k,K} = v_{k,m}x_{m,K} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{F}$$

Luego

$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-1}$

Tasa de deformación específica Euleriana $\dot{\mathbf{E}}^*$

Recordando que $(\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}S)^2 = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}$, que $\mathrm{d}S = cte$ y que $\frac{d}{dt}(\mathrm{d}\mathbf{x}) = \mathbf{L}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$

$$\frac{d}{dt}\left((\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}S)^2\right) = \frac{d}{dt}\left((\mathrm{d}s)^2\right) = 2\,\frac{d}{dt}(\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\ \mathbf{E}^*\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}) =$$

$$2\left(\frac{d}{dt}(\mathrm{d}\mathbf{x})\cdot\ \mathbf{E}^*\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}\ + \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{E}}^*\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} + \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}^*\cdot\frac{d}{dt}(\mathrm{d}\mathbf{x})\right) =$$

$$2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\cdot\ \mathbf{E}^*\ + \dot{\mathbf{E}}^* + \mathbf{E}^*\cdot\mathbf{L}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}$$

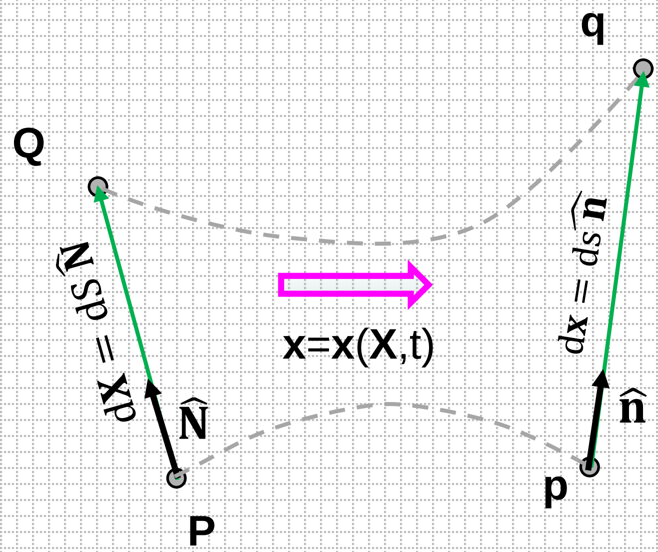
Por otra parte, se vio que

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{d}s)^2 = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Luego

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\cdot\ \mathbf{E}^*\ + \dot{\mathbf{E}}^* + \mathbf{E}^*\cdot\mathbf{L} \rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{E}}^* = \mathbf{D} - (\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\cdot\ \mathbf{E}^* + \mathbf{E}^*\cdot\mathbf{L})}$$

Medidas geométricas de deformación específica: Estiramiento, Extensión unitaria y variación angular



Estiramiento:

$\frac{ds}{dS} = \Lambda_{(\widehat{\mathbf{N}})} = \lambda_{(\widehat{\mathbf{n}})}$ sólo son iguales si $\widehat{\mathbf{n}}$ es la dirección que inicialmente era $\widehat{\mathbf{N}}$

Dividiendo $(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}$ por $(\mathrm{d}S)^2$

$\Lambda^2_{(\widehat{\mathbf{N}})} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}S}\cdot\mathbf{C}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}S} = \widehat{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{C}\cdot\widehat{\mathbf{N}}$ o bien $\Lambda^2_{(\widehat{\mathbf{N}})} = \frac{\mathrm{d}X_I}{\mathrm{d}S}\cdot C_{IJ}\cdot\frac{\mathrm{d}X_J}{\mathrm{d}S}$

Si $\widehat{\mathbf{N}} \parallel \mathbf{X}_1 \rightarrow \widehat{\mathbf{N}} = \{1{,}0{,}0\}$ luego

$$\Lambda^2_{(1)} = C_{11} = 1 + 2\,E_{11}$$

Como $\Lambda^2_{(I)} \geq 0 \rightarrow C_{II} \geq 0, E_{II} \geq -\frac{1}{2}$

Dividiendo$(\mathrm{d}S)^2 = \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}$ por $(\mathrm{d}s)^2$

$\frac{1}{\lambda^2_{(\widehat{\boldsymbol{n}})}} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{ds}}\cdot\mathbf{B}^{-1}\cdot\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{ds}} = \widehat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B}^{-1}\cdot\widehat{\mathbf{n}}$ o bien $\frac{1}{\lambda^2_{(\widehat{\boldsymbol{n}})}} = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{ds}}\cdot {B^{-1}}_{ij}\cdot\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{ds}}$

Si $\widehat{\mathbf{n}} \parallel \mathbf{x}_1 \rightarrow \widehat{\mathbf{n}} = \{1{,}0{,}0\}$ luego

$$\frac{1}{\lambda^2_{(1)}} = {B^{-1}}_{11} = 1 - 2E^*_{11}$$

Como$\frac{1}{\lambda^2_{(i)}} \geq 0 \rightarrow {B^{-1}}_{ii} \geq 0, E^*_{ii} \leq \frac{1}{2}$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Medidas geométricas de deformación específica: Estiramiento, Extensión unitaria y variación angular

Extensión unitaria $E_{(\hat{\mathbf{N}})}$ y $E^*_{(\hat{\mathbf{n}})}$:

$E_{(\hat{\mathbf{N}})} = \frac{ds-dS}{dS} = \frac{ds}{dS} - 1 = \Lambda_{(\hat{\mathbf{N}})} - 1$ y $E^*_{(\hat{\mathbf{n}})} = \frac{ds-dS}{dS} = \frac{ds}{dS} - 1 = \lambda_{(\hat{\mathbf{n}})} - 1$

$E_{(\hat{\mathbf{N}})}$ y $E^*_{(\hat{\mathbf{n}})}$ sólo son iguales si $\hat{\mathbf{n}}$ es la dirección que inicialmente era $\hat{\mathbf{N}}$

Si $\hat{\mathbf{N}} \parallel \mathbf{X}_1 \rightarrow \hat{\mathbf{N}} = \{1{,}0{,}0\}$ luego

$$E_{(1)} = \Lambda_{(1)} - 1 = \sqrt{C_{11}} - 1 = \sqrt{1 + 2\,E_{11}} - 1$$

Sumando 1 a cada miembro y elevando al cuadrado

$\left(E_{(1)} + 1\right)^2 = 1 + 2\,E_{11} \rightarrow E_{11} = E_{(1)} + \frac{1}{2}E^2_{(1)}$, Para pequeñas deformaciones $E^2_{(1)} \rightarrow 0$

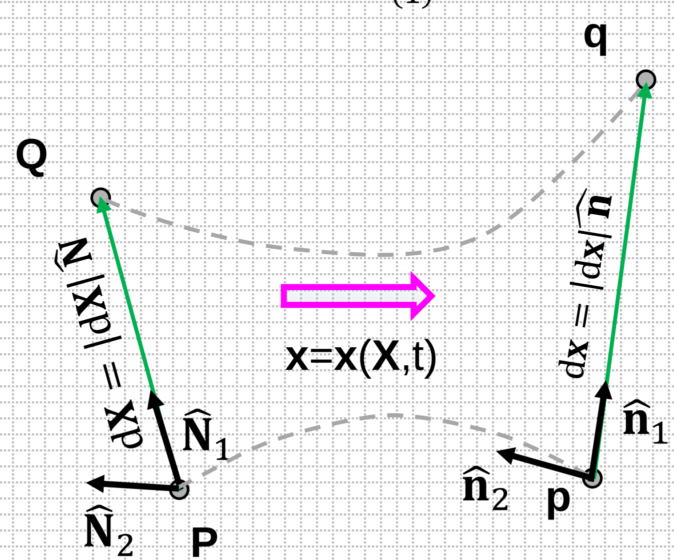
Variación angular:

Recordar que $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}\ \forall i \neq j$. En la descr. material

$$\cos(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2) = \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_1}{|\mathrm{d}\mathbf{x}_1|} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_2}{|\mathrm{d}\mathbf{x}_2|}$$

$$= \frac{\left(\mathrm{d}\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\right) \cdot \left(\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}_2\right)}{\sqrt{\mathrm{d}\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}_1}\sqrt{\mathrm{d}\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}_2}}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\mathbf{X}_1 \cdot \boldsymbol{C} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}_2}{\sqrt{\mathrm{d}\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}_1}\sqrt{\mathrm{d}\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}_2}} \cdot \frac{|\mathrm{d}\mathbf{X}_1|}{|\mathrm{d}\mathbf{X}_1|} \cdot \frac{|\mathrm{d}\mathbf{X}_2|}{|\mathrm{d}\mathbf{X}_2|}$$



TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Medidas geométricas de deformación específica: Estiramiento, Extensión unitaria y variación angular

Como $\hat{\mathbf{N}}_1 = \mathrm{d}\mathbf{X}_1/|\mathrm{d}\mathbf{X}_1|$, $\hat{\mathbf{N}}_2 = \mathrm{d}\mathbf{X}_2/|\mathrm{d}\mathbf{X}_2|$

$$\cos(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2) = \frac{\hat{\mathbf{N}}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{N}}_2}{\sqrt{\hat{\mathbf{N}}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{N}}_1}\sqrt{\hat{\mathbf{N}}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{N}}_2}} = \frac{\hat{\mathbf{N}}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{N}}_2}{\Lambda_{(\hat{\mathbf{N}}_1)}\Lambda_{(\hat{\mathbf{N}}_2)}}$$

En la descr. Material se conoce $\cos(\hat{\mathbf{N}}_1, \hat{\mathbf{N}}_2)$ directamente, por lo que se puede calcular la variación angular como $\theta_{12} = \cos^{-1}(\cos(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2)) - \cos^{-1}(\cos(\hat{\mathbf{N}}_1, \hat{\mathbf{N}}_2))$

Descripción espacial:
se conoce $\cos(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2)$ directamente y se evalúa

$$\cos(\hat{\mathbf{N}}_1, \hat{\mathbf{N}}_2) = \frac{\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2}{\sqrt{\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1}\sqrt{\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2}} = \lambda_{(\hat{\mathbf{n}}_1)}\lambda_{(\hat{\mathbf{n}}_2)}\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2$$

Si $\hat{\mathbf{N}}_1 \parallel \mathbf{X}_1 \rightarrow \hat{\mathbf{N}}_1 = \{1,0,0\}$ y $\hat{\mathbf{N}}_2 \parallel \mathbf{X}_2 \rightarrow \hat{\mathbf{N}}_2 = \{0,1,0\}$ luego $\cos(\hat{\mathbf{N}}_1, \hat{\mathbf{N}}_2) = 0$ y

$$\cos(\theta_{12}) = \frac{C_{12}}{\Lambda_{(1)}\Lambda_{(2)}} = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}C_{22}}} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{(1+2E_{11})(1+2E_{22})}} \text{ [A]}$$

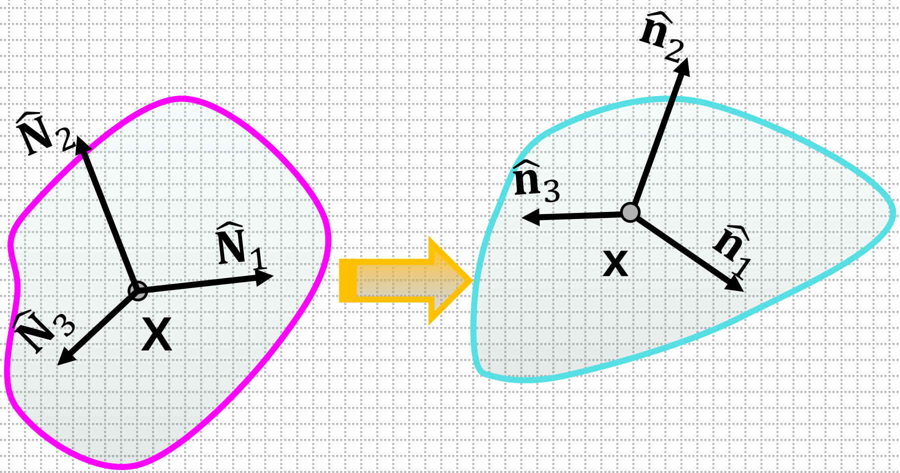
De manera similar si $\hat{\mathbf{n}}_1 \parallel \mathbf{x}_1 \rightarrow \hat{\mathbf{n}}_1 = \{1,0,0\}$ y $\hat{\mathbf{n}}_2 \parallel \mathbf{x}_2 \rightarrow \hat{\mathbf{n}}_2 = \{0,1,0\}$ luego $\cos(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2) = 0$ y

$$\cos(\theta_{12}) = -\lambda_{(1)}\lambda_{(2)}B_{12}^{-1} = -\frac{B_{12}^{-1}}{\sqrt{B_{11}^{-1}B_{22}^{-1}}} = \frac{2E_{12}^*}{\sqrt{(1-2E_{11}^*)(1-2E_{22}^*)}} \text{ [B]}$$

Medidas geométricas de deformación específica: Estiramiento, Extensión unitaria y variación angular

NOTAS:

1) Las ecuaciones [A] y [B] muestran que en deformaciones finitas la distorsión depende de las componentes diagonales de los tensores de deformación específica.
2) La ecuación [A] muestra que si $\hat{\mathbf{N}}_1$, $\hat{\mathbf{N}}_2$ coinciden con direcciones principales de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{E}$ (luego $C_{12} = E_{12} = 0$), $\cos(\theta_{12}) = 0$ por lo cual $\hat{\mathbf{n}}_1 \perp \hat{\mathbf{n}}_2$ y no existe distorsión.
3) La ecuación [B] muestra que si $\hat{\mathbf{n}}_1$, $\hat{\mathbf{n}}_2$ coinciden con direcciones principales de $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{E}^*$ (luego $B_{12}^{-1} = E_{12}^* = 0$), $\cos(\theta_{12}) = 0$ por lo cual $\hat{\mathbf{N}}_1 \perp \hat{\mathbf{N}}_2$ y no existe distorsión.



CONCLUSIONES:

1) Las direcciones principales de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{E}$ en $\mathbf{X}$, $\{\hat{\mathbf{N}}_1, \hat{\mathbf{N}}_2, \hat{\mathbf{N}}_3\}$ se transforman por medio del proceso de deformación en las direcciones $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$ en $\mathbf{x}$, mutuamente perpendiculares, por lo que no existe distorsión y son direcciones principales de $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{E}^*$
2) Las direcciones principales de $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{E}^*$ en $\mathbf{x}$, $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$, al inicio del proceso de deformación corresponden a las direcciones $\{\hat{\mathbf{N}}_1, \hat{\mathbf{N}}_2, \hat{\mathbf{N}}_3\}$ en $\mathbf{X}$, mutuamente perpendiculares, por lo cual no existe distorsión y son direcciones principales de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{E}$
3) En los procesos anteriores sólo ocurre traslación y rotación de los ejes

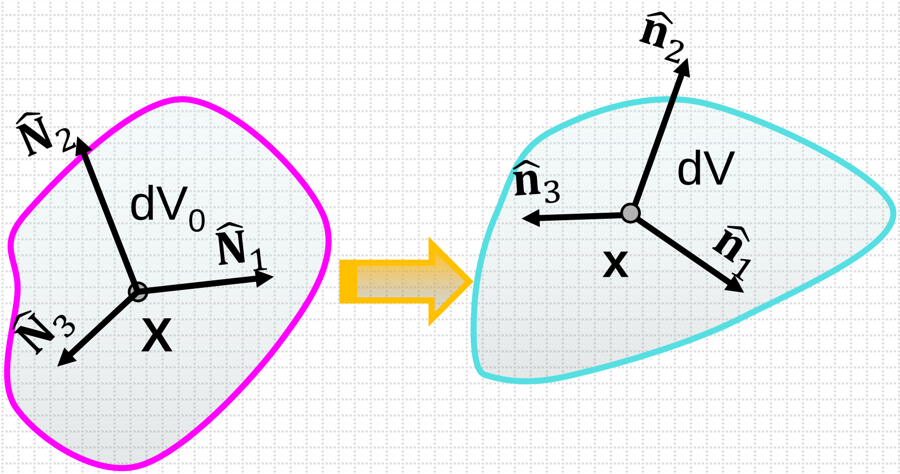
Relación de volumen $\frac{dV}{dV_0}$

Descripción material: Un elemento rectangular en $\mathbf{X}$ con sus lados orientados según las direcciones principales de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{E}$, $\{\widehat{\mathbf{N}}_1, \widehat{\mathbf{N}}_2, \widehat{\mathbf{N}}_3\}$, con volumen inicial dV_0 modifica su volumen a dV en $\mathbf{x}$, luego

$$\frac{dV}{dV_0} = \Lambda_{(1)}\Lambda_{(2)}\Lambda_{(3)} = \sqrt{C_1 C_2 C_3} = \sqrt{III_{\mathbf{C}}} = \sqrt{(1+2E_1)(1+2E_2)(1+2E_3)}$$

Descripción espacial: Un elemento rectangular en $\mathbf{x}$ con sus lados orientados según las direcciones principales de $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{E}^*$,$\{\widehat{\mathbf{n}}_1, \widehat{\mathbf{n}}_2, \widehat{\mathbf{n}}_3\}$, con volumen actual dV , inicialmente ocupaba un volumen dV_0 en $\mathbf{X}$, luego

$$\frac{dV}{dV_0} = \lambda_{(1)}\lambda_{(2)}\lambda_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{B_1^{-1}B_2^{-1}B_3^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{III_{\mathbf{B}^{-1}}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-2E_1^*)(1-2E_2^*)(1-2E_3^*)}}$$



NOTA:
La relación de volumen es la recíproca de la relación de densidad

$$\frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho}$$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Relación de volumen $\frac{dV}{dV_0}$

Puede calcularse dV como una integral en la configuración deformada, que por otra parte puede evaluarse en la indeformada como:

$$dV = \int f(\mathbf{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = \int f(\mathbf{x}(\mathbf{X}))\, |J| dX_1 dX_2 dX_3 = |J| \int f(\mathbf{x}(\mathbf{X}))\, dX_1 dX_2 dX_3 = |J| dV_0$$

En estos casos $f(\mathbf{x}) = 1$. Luego, el determinante del Jacobiano J resulta

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{dV}{dV_0} = J = \det(\mathbf{F})$$

Se puede demostrar que un determinante de tercer orden puede expandirse como

$$e_{rst} \det(a_{mn}) = e_{ijk} a_{ir} a_{js} a_{kt}$$

Aplicado a la expresión anterior

$$e_{rst} \frac{\rho}{\rho_0} = e_{rst} J^{-1} = e_{IJK} \frac{\partial X_I}{\partial x_r} \frac{\partial X_J}{\partial x_s} \frac{\partial X_K}{\partial x_t}$$

$$e_{IJK} \frac{\rho_0}{\rho} = e_{IJK} J = e_{rst} \frac{\partial x_r}{\partial X_I} \frac{\partial x_s}{\partial X_J} \frac{\partial x_t}{\partial X_K}$$

Cambio de Área

El vector diferencial de área inicial $d\mathbf{A}_0$ se evalúa como

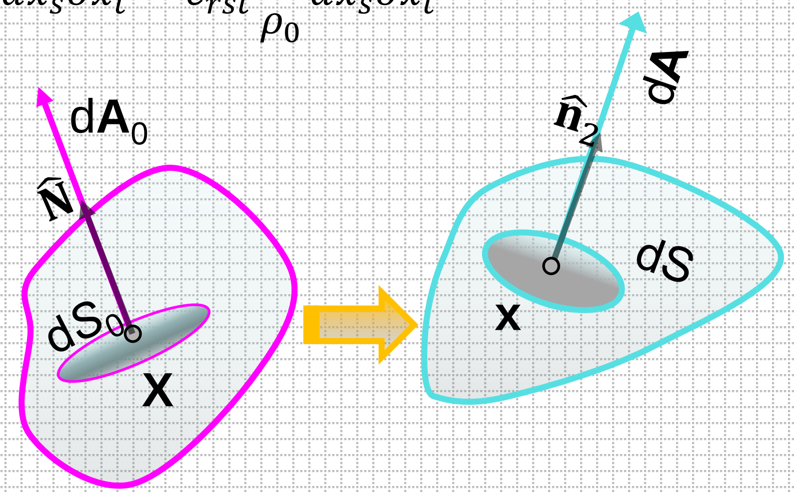
$$d\mathbf{A}_0 = dS_0\,\widehat{\mathbf{N}} = d\mathbf{X}\times\delta\mathbf{X} = e_{IJK}dX_J\delta X_K = e_{IJK}\frac{\partial X_J}{\partial x_s}\frac{\partial X_K}{\partial x_t}dx_s\delta x_t$$

Multiplicando ambos términos por $\frac{\partial X_I}{\partial x_r}$

$$\frac{\partial X_I}{\partial x_r}dS_0\,\widehat{\mathbf{N}} = e_{IJK}\frac{\partial X_I}{\partial x_r}\frac{\partial X_J}{\partial x_s}\frac{\partial X_K}{\partial x_t}dx_s\delta x_t = e_{rst}\frac{\rho}{\rho_0}dx_s\delta x_t$$

Por otra parte

$$d\mathbf{A} = dS\,\widehat{\mathbf{n}} = d\mathbf{x}\times\delta\mathbf{x} = e_{rst}dx_s\delta x_t$$



Luego

$$dS\,\widehat{\mathbf{n}} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial X_I}{\partial x_r}dS_0\,\widehat{\mathbf{N}}$$

Como $\frac{\partial X_I}{\partial x_r} = X_{I,r} = \mathbf{F}^{-1}$

$$\boxed{d\mathbf{A} = \frac{\rho_0}{\rho}\mathbf{F}^{-1}d\mathbf{A}_0}$$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Tensores de Rotación y Estiramiento

El tensor gradiente de desplazamiento $\mathbf{F}$ no admite una descomposición aditiva en una componente que provoque deformación y otra que origine movimientos de cuerpo rígido.
Sin embargo, para las direcciones principales de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{E}$ en $\mathbf{X}$; y de $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{E}^{*}$ en $\mathbf{x}$.

Conceptos a recordar

Inversa de un Tensor de segundo orden:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{1}$$

Valores y vectores propios de la Inversa de un Tensor de segundo orden: Los valores principales de la inversa son la recíproca de los valores principales del tensor, las direcciones principales coinciden

Potencias de un tensor de segundo orden:

$$\mathbf{T}^{\mathrm{m}} = \mathbf{T}^{\mathrm{m}-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{\mathrm{m}-1}; \mathbf{T}^{0} = \mathbf{1}$$

Valores y vectores propios de la potencia de un Tensor de segundo orden: Los valores principales del tensor afectado por la potencia son iguales a los valores principales del tensor elevados a la misma potencia, las direcciones principales coinciden

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Tensor de Rotación $\mathbf{R}$

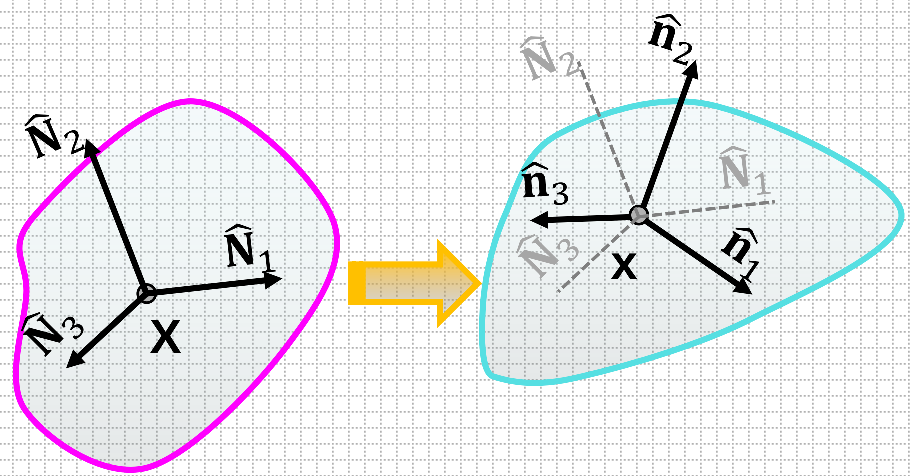
$\mathbf{R}$ rota las direcciones principales de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{E}$ en $\mathbf{X}$; $\{\hat{\mathbf{N}}_1, \hat{\mathbf{N}}_2, \hat{\mathbf{N}}_3\}$ designadas como $\hat{\mathbf{N}}_\alpha$, hacia las direcciones principales de $\mathbf{B^{-1}}$ y $\mathbf{E}^*$ en $\mathbf{x}$, $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$ designadas como $\hat{\mathbf{n}}_\alpha$, luego
$\hat{\mathbf{n}}_\alpha = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{N}}_\alpha$ o en componentes $n_{\alpha_i} = R_{im} \cdot N_{\alpha_m}$
Multiplicando por N_{α_j}

$$N_{\alpha_j} n_{\alpha_i} = R_{im} \cdot N_{\alpha_m} N_{\alpha_j} = R_{im} \delta_{mj} = R_{ij}$$

$\mathbf{R}^{-1}$ realiza la rotación inversa, es decir
$\hat{\mathbf{N}}_\alpha = \mathbf{R}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\alpha$ o en componentes $N_{\alpha_p} = R_{pi}^{-1} \cdot n_{\alpha_i}$
De forma similar, multiplicando por n_{α_q}

$$n_{\alpha_q} N_{\alpha_p} = R_{pi}^{-1} \cdot n_{\alpha_i} n_{\alpha_q} = R_{pi}^{-1} \delta_{iq} = R_{pq}^{-1}$$

Luego $R_{pi}^{-1} = R_{ji} = n_{\alpha_j} N_{\alpha_i} \rightarrow \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ y $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{1}$



TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Teorema de descomposición polar

Un vector $\mathrm{d}\mathbf{X}_\alpha = \mathrm{d}S_{(\alpha)}\widehat{\mathbf{N}}_{(\alpha)}$ en una de las direcciones principales de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{E}$ en $\mathbf{X}$ se transforma en un segmento $\mathrm{d}\mathbf{x}_\alpha = \mathrm{d}s_{(\alpha)}\widehat{\mathbf{n}}_{(\alpha)}$en la dirección principal correspondiente de $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{E}^*$ en $\mathbf{x}$, luego

$$\Lambda^2_{(\widehat{\mathbf{N}}_{(\alpha)})} = \frac{ds^2_{(\alpha)}}{dS^2_{(\alpha)}} = C_{(\alpha)} \rightarrow \mathrm{d}s_{(\alpha)} = \sqrt{C_{(\alpha)}}\mathrm{d}S_{(\alpha)}$$

Entonces

$$\mathrm{d}\mathbf{x}_\alpha = \sqrt{C_{(\alpha)}}\mathrm{d}S_{(\alpha)}\,\widehat{\mathbf{n}}_{(\alpha)}$$

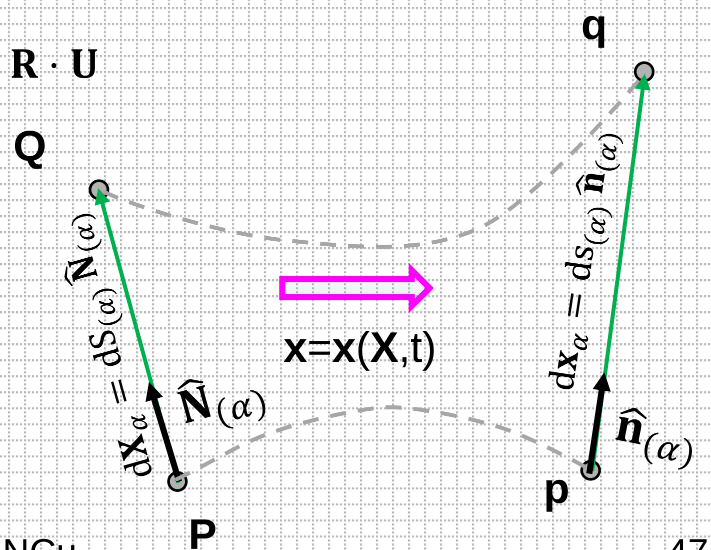
Como $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}$, recordando que $\widehat{\mathbf{n}}_{(\alpha)} = \mathbf{R}\cdot\widehat{\mathbf{N}}_{(\alpha)}$ y multiplicando ambos miembros por $\widehat{\mathbf{N}}_{(\beta)}$

$$\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}_{(\alpha)}\cdot\widehat{\mathbf{N}}_{(\beta)} = \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}S_{(\alpha)}\widehat{\mathbf{N}}_{(\alpha)}\cdot\widehat{\mathbf{N}}_{(\beta)} = \sqrt{C_{(\alpha)}}\mathrm{d}S_{(\alpha)}\,\widehat{\mathbf{n}}_{(\alpha)}\cdot\widehat{\mathbf{N}}_{(\beta)} = \sqrt{C_{(\alpha)}}\mathrm{d}S_{(\alpha)}\mathbf{R}\cdot\widehat{\mathbf{N}}_{(\alpha)}\cdot\widehat{\mathbf{N}}_{(\beta)}$$

Como $\widehat{\mathbf{N}}_{(\alpha)}\cdot\widehat{\mathbf{N}}_{(\beta)} = \mathbf{1}$ y dividiendo por $\mathrm{d}S_{(\alpha)}$

$$\mathbf{F}\cdot\frac{\mathrm{d}S_{(\alpha)}}{\mathrm{d}S_{(\alpha)}}\mathbf{1} = \mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\sqrt{C_{(\alpha)}}\frac{\mathrm{d}S_{(\alpha)}}{\mathrm{d}S_{(\alpha)}}\widehat{\mathbf{N}}_{(\alpha)}\cdot\widehat{\mathbf{N}}_{(\beta)} = \mathbf{R}\cdot\sqrt{C_{(\alpha)}}\mathbf{1} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}$$

Luego
$\mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}$ con $\mathbf{U} = \sqrt{C_{(\alpha)}}\mathbf{1}$ y
$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}$



TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Teorema de descomposición polar

De forma similar

$$\lambda^2_{(\hat{\mathbf{n}}_{(\alpha)})} = \frac{ds^2_{(\alpha)}}{dS^2_{(\alpha)}} = \frac{1}{B^{-1}_{(\alpha)}} = B_{(\alpha)} \rightarrow \mathrm{ds}_{(\alpha)} = \sqrt{B_{(\alpha)}}\mathrm{dS}_{(\alpha)}$$

Entonces de forma similar a lo anterior

$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ con $\mathbf{V} = \sqrt{B_{(\alpha)}}\mathbf{1}$ y
$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}\,\mathrm{d}\mathbf{X}$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Condiciones de Compatibilidad: Determinación de los desplazamientos a partir de las deformaciones específicas

En el problema mecánico en pequeñas deformaciones, tenemos las siguientes magnitudes:

1) Dominio de análisis: $\mathbf{X} \in \Omega, \mathrm{t} \in \{t_0, t_f\}$ (Dato)
2) Campo de desplazamientos $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathrm{t})$ – 3 Incógnitas
3) Campo de deformaciones específicas $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{X}, \mathrm{t})$ – 6 Incógnitas
4) Campo de tensiones $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathrm{t})$ – 6 Incógnitas

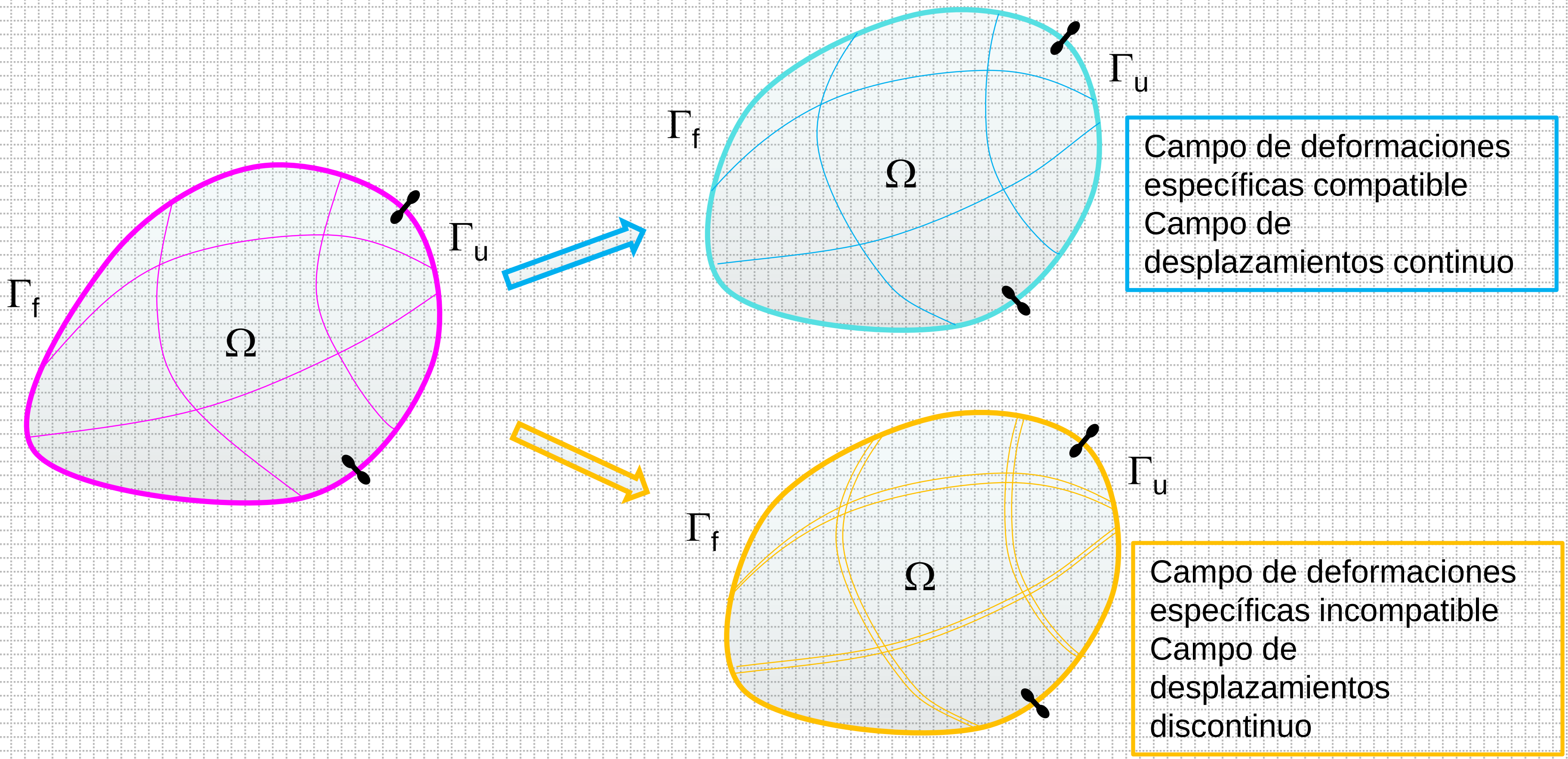
Junto con las siguientes relaciones entre ellas:

a) Relación deformación específica - desplazamiento: $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\overleftarrow{\nabla} + \overrightarrow{\nabla}\mathbf{u}\right) \rightarrow E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \right.$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Condiciones de Compatibilidad: Determinación de los desplazamientos a partir de las deformaciones específicas

El segundo planteo tiene la ventaja del menor número de ecuaciones, pero para poder determinarlo es necesario introducir las condiciones de compatibilidad



TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Condiciones de Compatibilidad: Determinación de los desplazamientos a partir de las deformaciones específicas

Relación deformación específica desplazamiento: 6 ecuaciones

(A.1) $\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial X}$, (A.2) $\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial Y}$, (A.3) $\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial Z}$

(B.1) $\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X}\right)$, (B.2) $\epsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial Z} + \frac{\partial u_z}{\partial Y}\right)$, (B.3) $\epsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial X} + \frac{\partial u_x}{\partial Z}\right)$

Suponemos que existe $\mathbf{u}$ y que es univaluado, continuo hasta sus derivadas de tercer orden.

Tomando (B.1) y haciendo $\frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial X\, \partial Y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial X\, \partial^2 Y} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial X^2 \partial Y}\right)$.

Por otra parte, derivando (A.1) y (A.2) y sumando $\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial^2 Y} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial^2 X} = \left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial X\, \partial^2 Y} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial X^2 \partial Y}\right)$, luego

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial^2 Y} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial^2 X} = 2\frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial X\, \partial Y} \rightarrow S_{33} = R_z = \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial^2 Y} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial^2 X} - 2\frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial X\, \partial Y} = 0$$

Procediendo de manera similar con (B.2), (A.2), (A.3) y (B.3), (A.3), (A.1)

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial^2 Z} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial^2 Y} = 2\frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial Y\, \partial Z} \rightarrow S_{11} = R_x = \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial^2 Z} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial^2 Y} - 2\frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial Y\, \partial Z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial^2 X} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial^2 Z} = 2\frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial Z\, \partial X} \rightarrow S_{22} = R_y = \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial^2 X} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial^2 Z} - 2\frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial Z\, \partial X} = 0$$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Condiciones de Compatibilidad: Determinación de los desplazamientos a partir de las deformaciones específicas

Diferenciando (B.1) respecto a X y Z, y (B.3) respecto de X e Y

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial X\,\partial Z} = \frac{\partial^2}{\partial X\,\partial Z}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial X\,\partial Y\,\partial Z} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial X^2 \partial Z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial X\,\partial Y} = \frac{\partial^2}{\partial X\,\partial Y}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial X} + \frac{\partial u_x}{\partial Z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_z}{\partial^2 X\,\partial Y} + \frac{\partial^3 u_x}{\partial X \partial Y \partial Z}\right)$$

S.M.A.M., reorganizando y recordando (A.1) y (B.3)

$$2\left(\frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial X\,\partial Z} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial X\,\partial Y}\right) = 2\,\frac{\partial^2}{\partial Y\,\partial Z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial X}\right) + \frac{\partial^2}{\partial X^2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial Z} + \frac{\partial u_z}{\partial Y}\right) = 2\,\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial Y\,\partial Z} + 2\,\frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial X^2}$$

Simplificando y reagrupando

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial Y\,\partial Z} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial Z} - \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial X} + \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial Y}\right) \rightarrow S_{23} = U_x = -\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial Y\,\partial Z} + \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial Z} - \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial X} + \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial Y}\right) = 0$$

Procediendo de manera similar con (B.1) y (B.2) (Uy); (B.2) y (B.3) (Uz)

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial Z\,\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial Z} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial X} - \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial Y}\right) \rightarrow S_{31} = U_y = -\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial Z\,\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial Z} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial X} - \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial Y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial X\,\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Z}\left(-\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial Z} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial X} + \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial Y}\right) \rightarrow S_{12} = U_z = -\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial X\,\partial Y} + \frac{\partial}{\partial Z}\left(-\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial Z} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial X} + \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial Y}\right) = 0$$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Demostración que las ecuaciones de compatibilidad no son independientes

Diferenciando R_x, U_y y U_z respecto a X, Z e Y respectivamente

$$\frac{\partial R_x}{\partial X} = \cancel{\frac{\partial^3 \epsilon_{yy}}{\partial X \partial^2 Z}} + \cancel{\frac{\partial^3 \epsilon_{zz}}{\partial X \partial^2 Y}} - 2\cancel{\frac{\partial^3 \epsilon_{yz}}{\partial X\, \partial Y\, \partial Z}}$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial Y} = -\cancel{\frac{\partial^3 \epsilon_{zz}}{\partial X\, \partial^2 Y}} - \cancel{\frac{\partial^3 \epsilon_{xy}}{\partial Y \partial^2 Z}} + \cancel{\frac{\partial^3 \epsilon_{yz}}{\partial X \partial Y \partial Z}} + \cancel{\frac{\partial^3 \epsilon_{zx}}{\partial^2 Y \partial Z}}$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial Z} = -\cancel{\frac{\partial^3 \epsilon_{yy}}{\partial Z^2\, \partial X}} + \cancel{\frac{\partial^3 \epsilon_{xy}}{\partial Y \partial^2 Z}} + \cancel{\frac{\partial^3 \epsilon_{yz}}{\partial X\, \partial Y\, \partial Z}} - \cancel{\frac{\partial^3 \epsilon_{zx}}{\partial^2 Y\, \partial Z}}$$

S.M.A.M y simplificando

$$\frac{\partial R_x}{\partial X} + \frac{\partial U_z}{\partial Y} + \frac{\partial U_y}{\partial Z} = 0$$

De forma similar

$$\frac{\partial R_y}{\partial Y} + \frac{\partial U_z}{\partial X} + \frac{\partial U_x}{\partial Z} = 0$$

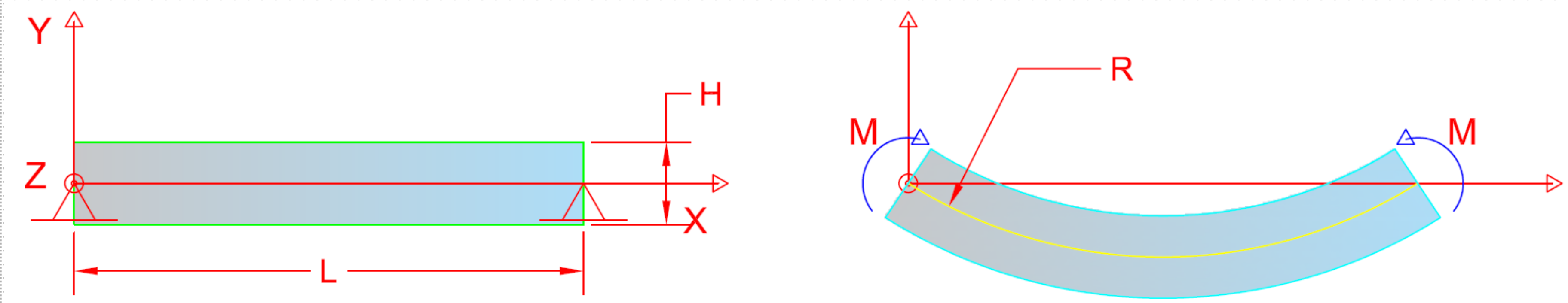
$$\frac{\partial R_z}{\partial Z} + \frac{\partial U_x}{\partial Y} + \frac{\partial U_y}{\partial Z} = 0$$

Formulas de Bianchi

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Ejemplo de aplicación

Viga simplemente apoyada en flexión pura



Suponemos un campo de deformaciones específicas

(A.1) $\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial X} = \frac{Y}{R}$, (A.2) $\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial Y} = -\nu \frac{Y}{R}$, (A.3) $\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial Z} = -\nu \frac{Y}{R}$

(B.1) $\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X}\right) = 0$, (B.2) $\epsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial Z} + \frac{\partial u_z}{\partial Y}\right) = 0$, (B.3) $\epsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial X} + \frac{\partial u_x}{\partial Z}\right) = 0$

1) La ecuación (A.1) puede integrarse directamente como

$$\boxed{u_x = \int \frac{\partial u_x}{\partial X}\, dX = \int \frac{Y}{R}\, dX = \frac{X\,Y}{R} + F(Y,Z)} \qquad \boxed{(a)}$$

Ejemplo de aplicación

2) Substituyendo en (B.1) y (B.3)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{X\,Y}{R}+F(Y,Z)\right)+\frac{\partial u_y}{\partial X}\right)=0\rightarrow\frac{\partial u_y}{\partial X}=-\frac{X}{R}-\frac{\partial F(Y,Z)}{\partial Y}\rightarrow$$

$$u_y=-\int\left(\frac{X}{R}+\frac{\partial F(Y,Z)}{\partial Y}\right)dX=-\frac{X^2}{R}-X\frac{\partial F(Y,Z)}{\partial Y}+G(Y,Z)$$

(b)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{X\,Y}{R}+F(Y,Z)\right)+\frac{\partial u_z}{\partial X}\right)=0\rightarrow\frac{\partial u_z}{\partial X}=-0-\frac{\partial F(Y,Z)}{\partial Z}\rightarrow$$

$$u_z=-\int\left(\frac{\partial F(Y,Z)}{\partial Z}\right)dX=-X\frac{\partial F(Y,Z)}{\partial Z}+H(Y,Z)$$

(c)

3) Substituyendo por *(b)* y *(c)* en (A.2) y (A.3)

$$\frac{\partial u_y}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial Y}\left(-\frac{X^2}{R}-X\frac{\partial F(Y,Z)}{\partial Y}+G(Y,Z)\right)=-X\frac{\partial^2 F(Y,Z)}{\partial Y^2}+\frac{\partial G(Y,Z)}{\partial Y}=-\nu\frac{Y}{R}\forall X$$

(d)

$$\frac{\partial u_z}{\partial Z}=\frac{\partial}{\partial Z}\left(-X\frac{\partial F(Y,Z)}{\partial Z}+H(Y,Z)\right)=-X\frac{\partial^2 F(Y,Z)}{\partial^2 Z}+\frac{\partial H(Y,Z)}{\partial Z}=-\nu\frac{Y}{R}\forall X$$

(e)

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Ejemplo de aplicación

4) Como las igualdades *(d)* y *(e)* deben cumplirse $\forall X$, y como $F(Y,Z)$ no es función de X, debe cumplirse que

$$\frac{\partial^2 F(Y,Z)}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 F(Y,Z)}{\partial Z^2} = 0 \qquad (f)$$

luego

$$\frac{\partial G(Y,Z)}{\partial Y} = -\nu \frac{Y}{R} \qquad (g)$$

$$\frac{\partial H(Y,Z)}{\partial Z} = -\nu \frac{Y}{R} \qquad (h)$$

5) Integrando *(g)* y *(h)* se obtiene

$$\frac{\partial G(Y,Z)}{\partial Y} = -\nu \frac{Y}{R} \rightarrow G(Y,Z) = -\int \nu \frac{Y}{R} dY = -\nu \frac{Y^2}{2R} + g(Z) \qquad (i)$$

$$\frac{\partial H(Y,Z)}{\partial Z} = -\nu \frac{Y}{R} \rightarrow H(Y,Z) = -\int \nu \frac{Y}{R} dZ = -\nu \frac{Y\,Z}{R} + h(Y) \qquad (j)$$

Ejemplo de aplicación

6) Reemplazando en *(b)* y *(c)* por *(i)* y *(j)*

$$u_y = -\frac{X^2}{R} - X\frac{\partial F(Y,Z)}{\partial Y} - \nu\frac{Y^2}{2R} + g(Z) \qquad (k)$$

$$u_z = -X\frac{\partial F(Y,Z)}{\partial Z} - \nu\frac{Y\,Z}{R} + h(Y) \qquad (l)$$

7) Reemplazando *(k)* y *(l)* en (B.2) se obtiene

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial Z} + \frac{\partial u_z}{\partial Y}\right) = 0 =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial Z}\left(-\cancel{\frac{X^2}{R}} - X\frac{\partial F(Y,Z)}{\partial Y} - \cancel{\nu\frac{Y^2}{2R}} + g(Z)\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(-X\frac{\partial F(Y,Z)}{\partial Z} - \nu\frac{Y\,Z}{R} + h(Y)\right)\right) = \qquad (m)$$

$$-X\frac{\partial^2 F(Y,Z)}{\partial Y\partial Z} + \frac{d\,g(Z)}{dZ} - X\frac{\partial^2 F(Y,Z)}{\partial Y\partial Z} - \nu\frac{Z}{R} + \frac{d\,h(Y)}{dY} = 0\ \forall\ X$$

8) Como la igualdad *(m)* debe cumplirse $\forall X$, y como $F(Y,Z)$ no es función de X, debe cumplirse que

$$\frac{\partial^2 F(Y,Z)}{\partial Y\partial Z} = 0 \qquad (n)$$

TEMA 4 – DEFORMACIÓN Y DEFORMACIÓN ESPECÍFICA

Ejemplo de aplicación

9) Por *(f)* y *(m)*

$$\frac{\partial^2 F(Y,Z)}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 F(Y,Z)}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2 F(Y,Z)}{\partial Y \partial Z} = 0 \rightarrow F(Y,Z) = \mathrm{M}\, Y + \mathrm{N}\, Z + \mathrm{P} \qquad (o)$$

10) Reescribiendo *(m)* agrupando en funciones de Y y Z

$$\frac{d\, g(Z)}{dZ} - \nu \frac{Z}{R} = -\frac{d\, h(Y)}{dY}\ \forall\, Y,Z \rightarrow \frac{d\, g(Z)}{dZ} - \nu \frac{Z}{R} = cte. = \mathrm{A}, \frac{d\, h(Y)}{dY} = cte. = \mathrm{A} \qquad (p)$$

11) Integrando las expresiones de *(p)* se obtiene

$$\frac{d\, g(Z)}{dZ} - \nu \frac{Z}{R} = \mathrm{A} \rightarrow g(Z) = \int \left(\mathrm{A} + \nu \frac{Z}{R}\right) dZ = \nu \frac{Z^2}{2R} + \mathrm{A}\, Z + \mathrm{C} \qquad (q)$$

$$\frac{d\, h(Y)}{dY} = \mathrm{A} \rightarrow h(Y) = \int (\mathrm{A}) dY = \mathrm{A}\, Y + \mathrm{B} \qquad (r)$$

Ejemplo de aplicación

12) Reemplazando *(o)*, *(q)* y *(r)* en *(a)*, *(k)* y *(l)*

$$u_x = \frac{X\,Y}{R} + \mathrm{M}\,Y + \mathrm{N}\,Z + \mathrm{P} \qquad (s)$$

$$u_y = -\frac{X^2}{R} - X\,\mathrm{M} - \nu\,\frac{Y^2}{2R} + \nu\,\frac{Z^2}{2R} + \mathrm{A}\,Z + \mathrm{C} = -\frac{1}{2R}\left(2X^2 + \nu(Y^2 - Z^2)\right) - \mathrm{M}\,X + \mathrm{A}\,Z + \mathrm{C} \qquad (t)$$

$$u_z = -X\,\mathrm{N} - \nu\,\frac{Y\,Z}{R} + \mathrm{A}\,Y + \mathrm{B} = -\nu\,\frac{Y\,Z}{R} - \mathrm{N}\,\mathrm{X} + \mathrm{A}\,Y + \mathrm{B} \qquad (u)$$

13) Condiciones de borde

$$u_x(0{,}0{,}0) = 0 = \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P} = 0$$

$$u_y(0{,}0{,}0) = 0 = \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{C} = 0$$

$$u_z(0{,}0{,}0) = 0 = \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{B} = 0$$

$$u_y(L, 0{,}0) = 0 = -\frac{1}{2R}(2L^2) - \mathrm{M}\,L \rightarrow \mathrm{M} = -\frac{L}{R}$$

$$u_z(X, Y, 0) = 0 = -\mathrm{N}\,\mathrm{X} + \mathrm{A}\,Y \rightarrow \mathrm{N} = \mathrm{A}\,\frac{Y}{X}$$

$$u_x\left(\frac{L}{2}, Y, Z\right) = 0 = \frac{L\,Y}{2\,R} - \frac{\mathrm{L}\,Y}{R} + \mathrm{A}\,\frac{Y\,Z}{X} \rightarrow \mathrm{A} = \frac{\mathrm{L}\,Y}{2\,R}\,\frac{X}{Y\,Z} = \frac{\mathrm{L}\,X}{2\,R\,Z}$$