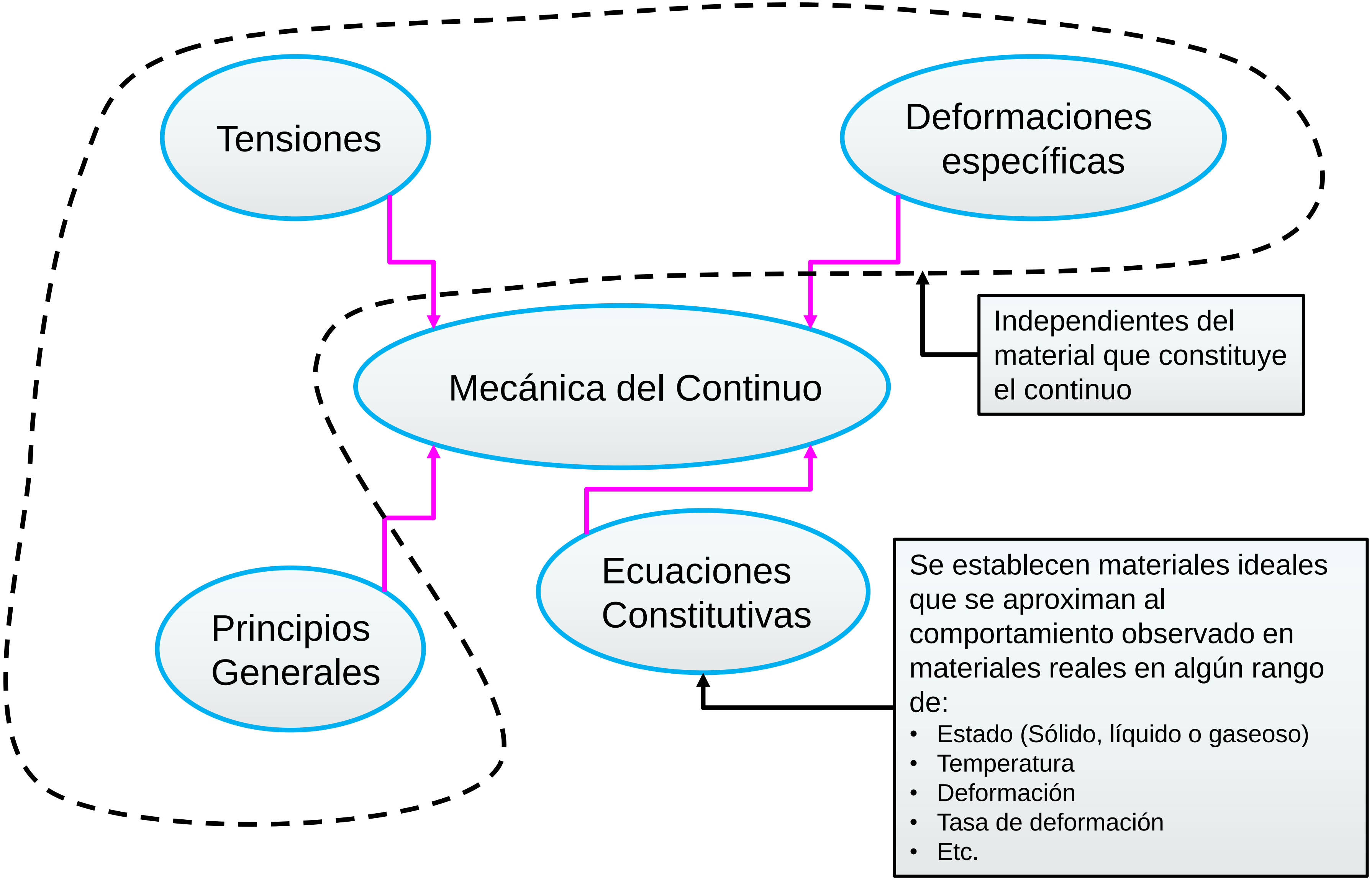
TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS



TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Estrategias de desarrollo de ecuaciones constitutivas

<u>Enfoque clásico:</u>

- Desarrolladas para un problema específico
- Simplificación extrema
- Ejemplos
    - Sólido elástico ideal (Hooke)
    - Fluido viscoso (Newtoniano)

<u>Enfoque actual:</u>

- Desarrollo general
- Mínimas hipótesis simplificativas
- Particularización al final del proceso, con la menor cantidad de restricciones posibles
- Ejemplos
    - Hiperelasticidad
    - Elastoplasticidad

Sólido elástico ideal

Tensión uniaxial: $T_{ii} = E \cdot \epsilon_{ii} \rightarrow p = -K \cdot e$

Corte Puro: $\tau = G \cdot \gamma \rightarrow T'_{ij} = 2\, G\, \epsilon'_{ij}$

Estado triaxial de tensiones: $T_{ij} = c_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \rightarrow \mathbf{T} = \mathbb{C} \cdot\cdot\, \mathbf{E}$

Tensor 4$^{\text{to}}$ orden $c_{ijkl} \rightarrow 81\ componentes$

Simetría de $\mathbf{T}, \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{C}\ simétrico \rightarrow 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36\ componentes$

Sólido elástico ideal

Isotropía : *Un tensor es isótropo si sus componentes no cambian ante cualquier transformación ortogonal del sistema de referencia.*

Tensores isótropos:

- Escalares (Tensor de orden 0): Todos son isótropos
- Vectores (Tensor de orden 1): Sólo el vector nulo $\vec{\mathbf{0}}$ es isótropo
- Tensor de segundo orden: $\alpha \cdot \delta_{ij}$ son isótropos (incluye 0)
- Tensor de tercer orden: $\alpha \cdot e_{ijk}$ son isótropos (incluye 0)
- Tensor de cuarto orden: $c_{ijrs} = \lambda \cdot \delta_{ij}\,\delta_{rs} + \mu \cdot \left(\delta_{ir}\,\delta_{js} + \delta_{is}\,\delta_{jr}\right) + \nu\left(\delta_{ir}\,\delta_{js} - \delta_{is}\,\delta_{jr}\right)$

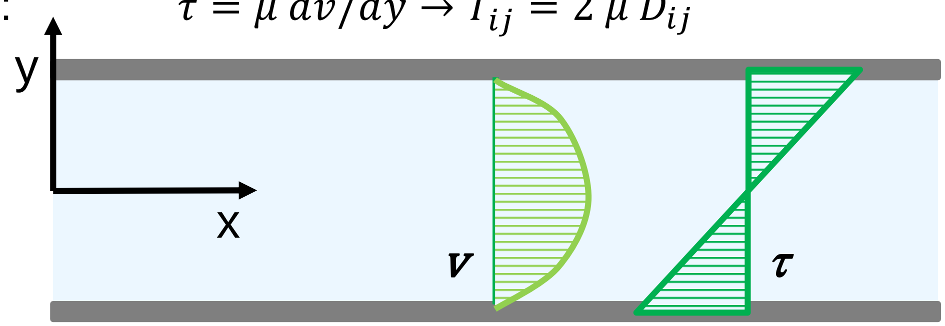
Como $T_{ij} = T_{ij} \to c_{ijrs} = c_{jirs}$; $\epsilon_{rs} = \epsilon_{sr} \to c_{ijrs} = c_{ijsr}$; luego $\nu\left(\delta_{ir}\,\delta_{js} - \delta_{is}\,\delta_{jr}\right) = 0 \to \nu = 0$, entonces

$$c_{ijrs} = \lambda \cdot \delta_{ij}\,\delta_{rs} + \mu \cdot \left(\delta_{ir}\,\delta_{js} + \delta_{is}\,\delta_{jr}\right)$$

Fluido ideal Newtoniano: No soportan tensiones de corte

Tensión uniaxial: fluido incompresible, luego $T_{ii} = 0 \cdot \epsilon_{ii} = 0 \to p = 0$

Corte Puro: $\tau = \mu\, dv/dy \to T'_{ij} = 2\,\mu\, D_{ij}$



TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Dependencia en la temperatura

En general

Tensor de Tensión = f(Tensor de deformación)

Pudiendo utilizarse cualquiera de las medidas de tensión y deformación vistas, siempre que la formulación constitutiva tome en cuenta los movimientos de cuerpo rígido si la medida de deformación adoptada no lo hace ($\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{-1}$, por ejemplo).
Las constantes propias del material que intervienen en la función ***f(Tensor de deformación)***
En general dependen de la temperatura y otras variables de estado

f = f(Tensor de deformación,Θ,ν) donde ν representa un conjunto de variables de estado

Acoplamiento térmico

Disipación térmica del proceso mecánico significativa ->
Proceso termomecánico acoplado:
- Modelos y determinación de parámetros complejos
- La energía disipada por el proceso mecánico cambia el valor de los parámetros constitutivos

Disipación térmica del proceso mecánico no significativa ->
Proceso termomecánico desacoplado:
- Modelo y determinación de parámetros más sencillos

Elasticidad clásica, ley de Hooke generalizada

Material elástico ideal

Relación biunívoca entre **T** y **E** (T y E representan un estado tensional y un estado de deformación, utilizando cualquiera de las medidas vistas para estas magnitudes) a θ cte.

Como es una relación biunívoca e independiente del tiempo, no incluye los efectos temporales como

- Relajación de tensiones a deformación específica constante
- Deformación diferida a tensión constante

Los parámetros materiales no dependen de θ, pero deben considerarse la aparición de tensiones de origen térmico si las condiciones de borde son tales que impiden la libre dilatación del continuo.

Ley de Hooke Generalizada

$$\tilde{T}_{IJ} = c_{IJRS} \cdot E_{RS}, \text{ si } x \to X \Rightarrow T_{ij} = c_{ijrs} \cdot E_{rs}$$

2do Tensor Tensiones de P-K

Tensor de deformaciones específicas Lagrangeano

Tensor de Tensiones de Cauchy

Tensor de deformaciones específicas en pequeñas deformaciones

TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Ley de Hooke Generalizada

Considerando la simetría de T_{ij} y E_{rs}, junto con el comportamiento material isótropo

$$T_{ij} = c_{ijrs} \cdot E_{rs} = \left(\lambda \cdot \delta_{ij}\, \delta_{rs} + \mu \cdot \left(\delta_{ir}\, \delta_{js} + \delta_{is}\, \delta_{jr}\right)\right) E_{rs} = \lambda \cdot \delta_{ij}\, E_{rr} + \mu \cdot \left(E_{ij} + E_{ij}\right)$$

Luego

$$\boxed{T_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij}\, E_{rr} + 2 \cdot \mu \cdot E_{ij} \text{ (A)}}$$

T=T(E)

Y la traza de T_{ij}

$$T_{ii} = 3 \cdot \lambda \cdot E_{rr} + 2 \cdot \mu \cdot E_{ii} = (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)\, E_{ii} \Rightarrow E_{ii} = \frac{T_{ii}}{(3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)}$$

En (A), cambiando el subíndice i por k, resulta

$$T_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \frac{T_{kk}}{(3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)} + 2 \cdot \mu \cdot E_{ij} \Rightarrow \boxed{E_{ij} = -\frac{\lambda \cdot \delta_{ij}}{2 \cdot \mu \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)} T_{kk} + \frac{1}{2 \cdot \mu} T_{ij}}$$

E=E(T)

Constantes elásticas

- λ, μ: Constantes elásticas de Lamé
- $\mathrm{E}, \mathrm{G}, \nu$: Módulos de Young, Corte y Poisson
- Relaciones entre constantes

$$\mu = \mathrm{G} = \frac{\mathrm{E}}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu\, \mathrm{E}}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)}$$

TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Ley de Hooke Generalizada

Reemplazando λ y μ en el factor escalar del primer término de la relación E = E(T)

$$\frac{\lambda}{2\cdot\mu\cdot(3\cdot\lambda\,+2\cdot\mu)}=\frac{\nu\,\cancel{\mathrm{E}}}{\cancel{(1\,+\nu)}\cdot(1-2\nu)\,\cancel{2}\,\frac{\cancel{\mathrm{E}}}{\cancel{2}\cdot\cancel{(1\,+\nu)}}\left(\frac{3\,\nu\,\mathrm{E}}{(1\,+\nu)\cdot(1-2\nu)}+2\,\frac{\mathrm{E}}{2\cdot(1\,+\nu)}\right)}$$

$$\frac{\nu}{(1-2\nu)\,\frac{\mathrm{E}}{(1\,+\nu)}\left(\frac{3\,\nu}{(1-2\nu)}+1\right)}=\frac{\nu}{\cancel{(1-2\nu)}\,\frac{\mathrm{E}}{(1\,+\nu)\cancel{(1-2\nu)}}\,(3\,\nu+(1-2\nu))}=\frac{\nu}{\frac{\mathrm{E}}{\cancel{(1\,+\nu)}}\,\cancel{(1\,+\nu)}}=\frac{\nu}{\mathrm{E}}$$

Junto con μ en la relación E = E(T)

E=E(T)

$$\boxed{E_{ij}=-\frac{\nu}{\mathrm{E}}\,\delta_{ij}\,T_{kk}+\frac{(1\,+\nu)}{\mathrm{E}}T_{ij}}$$

Equivale a

$$\left.\begin{aligned}
\epsilon_x&=\frac{1}{E}[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)] & \gamma_{yz}&=\frac{1}{G}\tau_{yz}\\
\epsilon_y&=\frac{1}{E}[\sigma_y-\nu(\sigma_z+\sigma_x)] & \gamma_{zx}&=\frac{1}{G}\tau_{zx}\\
\epsilon_z&=\frac{1}{E}[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)] & \gamma_{xy}&=\frac{1}{G}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\}$$

TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Ley de Hooke Generalizada

Recordando que los deviadores de tensión y deformación específica son

$$T'_{ij} = T_{ij} - \tfrac{1}{3} T_{kk}\delta_{ij},\ E'_{ij} = E_{ij} - \tfrac{1}{3} E_{kk}\delta_{ij}$$

$$T'_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk}\delta_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij}\, E_{rr} + 2\cdot\mu\cdot E_{ij} - \frac{1}{3}\cdot(\lambda\cdot\delta_{ss}\, E_{rr} + 2\cdot\mu\cdot E_{ss})\cdot\delta_{ij}$$

$$T'_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij}\, E_{rr} + 2\cdot\mu\cdot E_{ij} - \frac{1}{3}\cdot(\lambda\cdot 3\ + 2\cdot\mu)\cdot E_{rr}\cdot\delta_{ij}$$

$$T'_{ij} = \cancel{\lambda \cdot \delta_{ij}\, E_{rr}} + 2\cdot\mu\cdot E_{ij} - \cancel{\lambda\cdot\delta_{ij}\, E_{rr}} - \frac{2}{3}\,\mu\delta_{ij}\, E_{rr} = 2\cdot\mu\cdot\left(E_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\, E_{rr}\right) = 2\cdot\mu\cdot E'_{ij}$$

$$\boxed{T'_{ij} = 2\cdot \mathrm{G}\cdot E'_{ij}}$$

De forma similar, a partir de la presión hidrostática y la deformación volumétrica

$$p = -\tfrac{1}{3} T_{kk},\ e = E_{kk}$$

$$p = -\frac{1}{3} T_{kk} = -\frac{1}{3}\cdot(\lambda\cdot\delta_{ss}\, E_{rr} + 2\cdot\mu\cdot E_{ss}) = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\cdot\mu\right)\cdot\ E_{rr} \Rightarrow \boxed{p = -K\cdot e}$$

Con $K = \left(\lambda + \frac{2}{3}\cdot\mathrm{G}\right) = \left(\frac{\nu\,\mathrm{E}}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} + \frac{\cancel{2}}{3}\frac{\mathrm{E}}{\cancel{2}\cdot(1+\nu)}\right) = \frac{3\,\nu\,\mathrm{E} + (1-2\nu)\,\mathrm{E}}{3(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} = \frac{\cancel{(1+\nu)}\,\mathrm{E}}{3\cancel{(1+\nu)}\cdot(1-2\nu)} = \frac{\mathrm{E}}{3\,(1-2\nu)}$

TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Forma matricial de la ley de Hooke generalizada

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 6\ variables \\ independientes \\ Se\ transforman \\ como\ vector \end{matrix} \rightarrow \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 6\ variables \\ independientes \\ Se\ transforman \\ como\ vector \end{matrix} \rightarrow \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2\ E_{23} \\ 2\ E_{31} \\ 2\ E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix}$$

36 coeficientes $\mathrm{c_{mn}}$

En formas compacta, matricial e indicial

$$\mathbf{T} = \mathbb{C} \cdot\cdot \mathbf{E}, \qquad \mathbf{T} = \mathbb{C}\,\mathbf{E}, \qquad T_m = \mathrm{c_{mn}}\, E_n$$

TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Potencial elástico o función de densidad de energía de deformación específica - Hiperelasticidad

Función potencial elástico $W = W(\mathbf{E})$ con $\mathbf{E}$ una de las medidas de deformación o deformación específica

Un material es hiperelástico (o elástico de Green) si

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}$$

Para el caso de deformación isotérmica, con la energía libre de Helmoltz simetrizada

$$\tilde{T}_{IJ} = \rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial E_{IJ}}\right)_\theta \rightarrow W = \rho_0 \psi$$

Para el caso de procesos adiabáticos isentrópicos

$$\tilde{T}_{IJ} = \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial E_{IJ}}\right)_s \rightarrow W = \rho_0 u$$

En general

$$\tilde{T}_{IJ} = \frac{\partial W\left(E_{IJ}\right)}{\partial E_{IJ}}$$

o para pequeñas deformaciones

$$T_{ij} = \frac{\partial W\left(E_{ij}\right)}{\partial E_{ij}}$$

Si *W* no se ha simetrizado en **E**, se puede utilizar la forma alternativa $T_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial E_{ji}}\right)$

Potencial elástico o función de densidad de energía de deformación específica - Hiperelasticidad

Se adopta una función de potencial elástico

$$W = c_0 + c_q\, E_q + \frac{1}{2}\bar{c}_{rs} E_r E_s$$

Como $E_r E_s = E_s E_r$, agrupando esos términos y definiendo $c_q = \frac{1}{2}(\bar{c}_{rs} + \bar{c}_{sr})$

$$W = \begin{aligned}
& c_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4 + c_5E_5 + c_6E_6 + \\
& \frac{1}{2}c_{11}E_1^2 + c_{12}E_1E_2 + c_{13}E_1E_3 + c_{14}E_1E_4 + c_{15}E_1E_5 + c_{16}E_1E_6 + \\
& \frac{1}{2}c_{22}E_2^2 + c_{23}E_2E_3 + c_{24}E_2E_4 + c_{25}E_2E_5 + c_{26}E_2E_6 + \\
& \frac{1}{2}c_{33}E_3^2 + c_{34}E_3E_4 + c_{35}E_3E_5 + c_{36}E_3E_6 + \\
& \frac{1}{2}c_{44}E_4^2 + c_{45}E_4E_5 + c_{46}E_4E_6 + \\
& \frac{1}{2}c_{55}E_5^2 + c_{56}E_5E_6 + \\
& \frac{1}{2}c_{66}E_6^2
\end{aligned}$$

Como $W(\mathbf{E} = 0) = 0 \rightarrow c_0 = 0$

<u>Potencial elástico o función de densidad de energía de deformación específica - Hiperelasticidad</u>

Como $\mathbf{T}(\mathbf{E}) = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}$ y $\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, luego

$$\boxed{= 1\ \forall s = q,\ = 0\ \forall s \neq q}$$

$$T_q(E) = \frac{\partial W}{\partial E_q} = c_s \frac{\partial E_s}{\partial E_q} + c_{qs} E_s \frac{\partial E_q}{\partial E_q} = c_q + c_{qs} E_s \frac{\partial E_q}{\partial E_q}$$

Como $\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \rightarrow c_q = 0$, luego

$$T_q(E) = c_{qs} E_s \text{ o } \mathbf{T} = \mathbb{C} \cdot\cdot \mathbf{E}$$

En forma matricial, resultan 21 coeficientes independientes

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix}$$

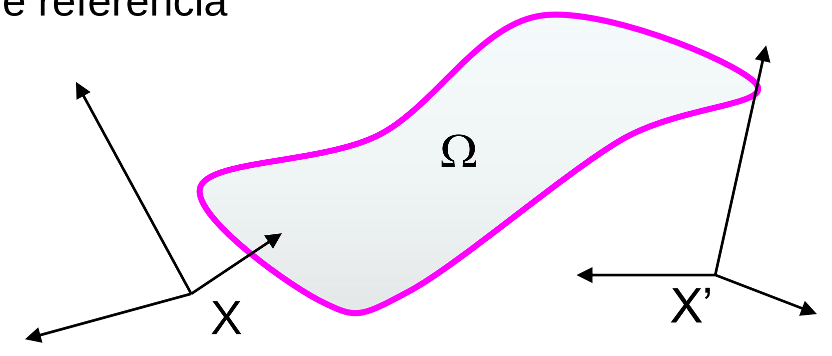
donde $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}$ $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2\,E_{23} \\ 2\,E_{31} \\ 2\,E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix}$

TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Simetría elástica

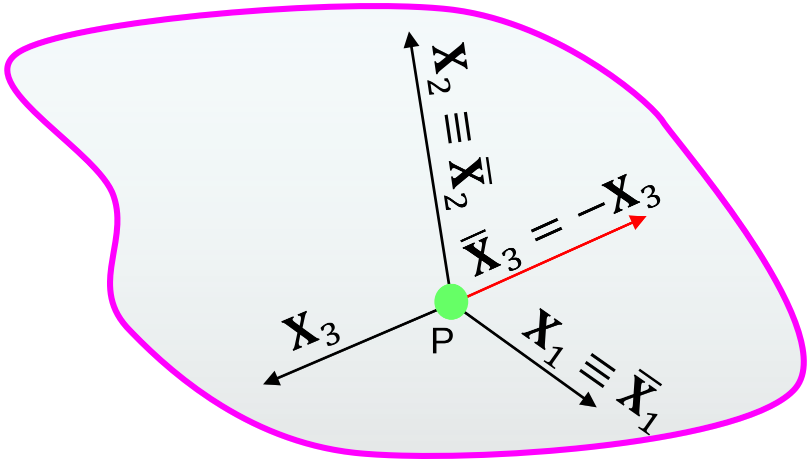
En la expresión del potencial elástico, los valores de c_{rs} dependen de la orientación relativa del material respecto al sistema de referencia

$W = c_{rs}E_rE_s = c'_{rs}E'_rE'_s$



Si $c_{rs} = cte \; \forall \, \mathbf{X}$ se trata de un *material isótropo*
Si $c_{rs} \neq cte \; \forall \, \mathbf{X}$ se trata de un *material anisótropo*
Un *grupo de simetría material* o *grupo de isotropía* es un grupo de transformaciones de coordenadas materiales que mantienen invariante las ecuaciones constitutivas (sus coeficientes).
Un *material isótropo* tiene al menos un estado de referencia (*estado inalterado*) para el cual su grupo de simetría material contiene todas las posibles transformaciones de coordenadas ortogonales (incluyendo reflexiones e inversión central).

Simetría elástica – plano de simetría elástica



Si $c_{rs} = \bar{c}_{rs}$, $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ es un *plano de simetría elástica*
En general el plano de simetría elástica no coincide con planos de simetría geométrica, del campo de tensiones o del campo de deformaciones.

Considerando las reglas de signos, en los sistemas $\mathbf{X}$ y $\bar{\mathbf{X}}$ de la figura:
$\bar{T}_{23} = -T_{23}$, $\bar{T}_{31} = -T_{31}$ en los restantes casos $\bar{T}_{ij} = T_{ij}$
$\bar{E}_{23} = -E_{23}$, $\bar{E}_{31} = -E_{31}$ en los restantes casos $\bar{E}_{ij} = E_{ij}$
Luego, considerando que $c_{rs} = \bar{c}_{rs}$, se puede calcular para el sistema $\bar{\mathbf{X}}$

$$\bar{T}_1 = c_{11}\bar{E}_1 + c_{12}\bar{E}_1 + c_{13}\bar{E}_3 + c_{14}\bar{E}_4 + c_{15}\bar{E}_5 + c_{16}\bar{E}_6$$

O bien

$$\bar{T}_{11} = c_{11}\bar{E}_{11} + c_{12}\bar{E}_{22} + c_{13}\bar{E}_{33} + 2\,c_{14}\bar{E}_{23} + 2\,c_{15}\bar{E}_{31} + 2\,c_{16}\bar{E}_{12}$$

Como $\bar{T}_{11} = T_{11}$ y $\bar{E}_{ij} = E_{ij}$ excepto para los casos mencionados

$$T_{11} = c_{11}E_{11} + c_{12}E_{22} + c_{13}E_{33} - 2\,c_{14}E_{23} - 2\,c_{15}E_{31} + 2\,c_{16}\bar{E}_{12}$$

Simetría elástica – plano de simetría elástica

Por otra parte, en el sistema $\mathbf{X}$:

$$T_{11} = c_{11}E_{11} + c_{12}E_{22} + c_{13}E_{33} + 2\, c_{14}E_{23} + 2\, c_{15}E_{31} + 2\, c_{16}E_{12}$$

Restando miembro a miembro ambas expresiones de T_{11} y simplificando

$$0 = -4\, c_{14}E_{23} - 4\, c_{15}E_{31} \forall\, E_{23}, E_{31} \rightarrow c_{14} = c_{15} = 0$$

Considerando los casos de T_{22} y T_{33} resulta $c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = 0$
Luego:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix}$$

Notar que $T_{11} = 2\, c_{16}\, E_{12}$ (deformación de corte origina tensiones normales)

13 coeficientes $\mathrm{c_{mn}}$

Ortotropía

Si además de $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$, consideramos que los planos $\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$ y $\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1$ también son planos de simetría elástica, procediendo de la misma manera:

$$c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{46} = c_{66} = c_{45} = 0$$

Luego:

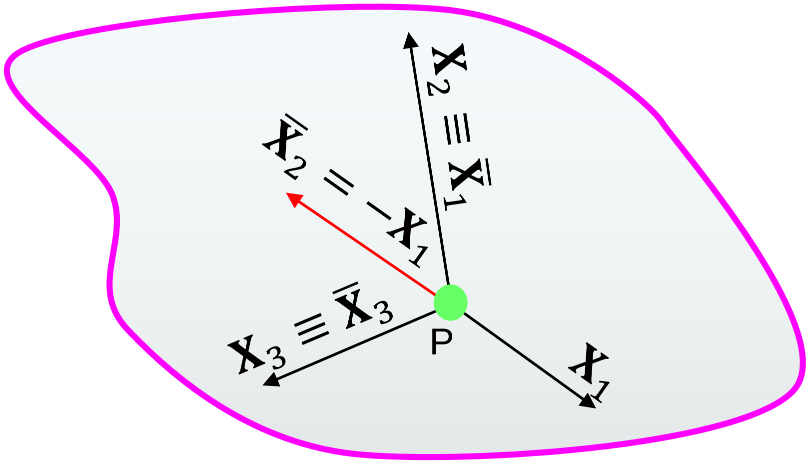
$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

Notar que si se escoge el sistema de referencia $\mathbf{X}$ de forma tal que coincida con los planos de simetría elástica, las direcciones principales de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{E}$ coinciden

9 coeficientes c_{mn}

Isotropía

Si consideramos que en el punto P además de las transformaciones anteriores ocurre una rotación de 90 grados alrededor de $\mathbf{X}_3$ de forma que $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$, los planos $\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$ y $\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1$ son planos de simetría elástica, resulta



Si esta transformación forma parte del grupo de simetría material, luego $c_{rs} = \bar{c}_{rs}$, y existen las siguientes igualdades

$$\bar{T}_{11} = T_{22}, \bar{T}_{22} = T_{11}, \bar{T}_{33} = T_{33}$$

$$\bar{E}_{11} = E_{22}, \bar{E}_{22} = E_{11}, \bar{E}_{33} = E_{33}$$

TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Isotropía

Luego, considerando que $c_{rs} = \bar{c}_{rs}$, se puede calcular para el sistema $\bar{\mathbf{X}}$

$$\bar{T}_{22} = c_{12}\bar{E}_{11} + c_{22}\bar{E}_{22} + c_{23}\bar{E}_{33}$$

Substituyendo por las igualdades anteriores

$$T_{11} = c_{12}E_{22} + c_{22}E_{11} + c_{23}E_{33}$$

Por otra parte, en el sistema $\mathbf{X}$

$$T_{11} = c_{11}E_{11} + c_{12}E_{22} + c_{13}E_{33}$$

Restando miembro a miembro

$$0 = (c_{22} - c_{11})E_{11} + (c_{12} - c_{12})E_{22} + (c_{23} - c_{13})E_{33} \forall E_{11}, E_{22}, E_{33}$$

Luego $c_{22} = c_{11}$, $c_{23} = c_{13}$

Operando con las restantes tensiones

$c_{22} = c_{11} = c_{33}$, $\quad c_{23} = c_{13} = c_{12} = \lambda$, $\quad c_{44} = c_{55} = c_{66} = \mu$

Considerando rotaciones a 45 grados (hacer como ejercicio)

$$c_{22} = c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu$$

TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Isotropía

Luego

$$\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & c_{12} & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Termoelasticidad lineal

En la expresión de $W = c_q\, E_q + c_{rs}E_rE_s$ determinamos que c_q porque $\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Sin embargo, si existen variaciones de temperatura $\Delta\theta = (\theta - \theta_0)$ junto con restricciones a la libre dilatación del continuo, puede ocurrir que $\mathbf{T}(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, luego

$$c_q = -\beta_q \cdot\ \Delta\theta\ \rightarrow W = -\beta_q \cdot\ \Delta\theta + c_{rs}E_rE_s$$

Y

$[T_k] = -[\beta_k] \cdot\ \Delta\theta + c_{ks}[E_s]$ en notación matricial o bien $T_{ij} = -\beta_{ij} \cdot\ \Delta\theta + c_{ijrs}E_{rs}$ en indicial

Comportamiento isótropo: $\beta_{ij} = \beta\ \delta_{ij}$

Luego

$$T_{ij} = \lambda\ E_{kk}\ \delta_{ij} + 2\ \mathrm{G}\ E_{ij} - \beta\ \delta_{ij} \cdot\ \Delta\theta$$

TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Termoelasticidad lineal

Descomponiendo en componentes hidrostáticas y deviatóricas

$$T'_{ij} = 2\ \mathrm{G}\ E'_{ij}$$

$$p = -K\ e + \beta \cdot\ \Delta\theta$$

(el signo + en el termino térmico es porque p es positivo para compresión)

Inversamente

$$E'_{ij} = \frac{T'_{ij}}{2\ \mathrm{G}}$$

$$e = -\frac{p}{K} + \frac{\beta}{K}\ \Delta\theta = -\frac{p}{K} + 3\ \alpha\ \Delta\theta; \quad \alpha = \frac{\beta}{3\ K} \rightarrow \beta = 3\ K\alpha = \frac{\mathrm{E}\alpha}{(1 - 2\nu)}$$

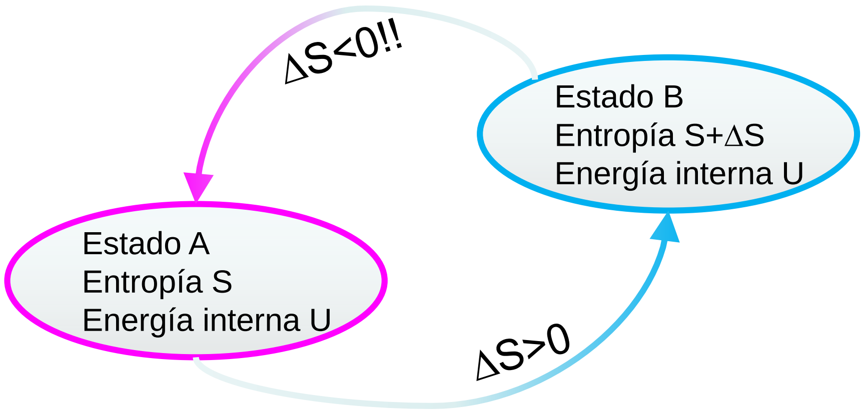
TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Positividad de la función de densidad de energía de deformación específica

Se asume que

$$W(\mathbf{E}) \geq 0 \begin{cases} W(\mathbf{E}) > 0 \ \forall \ \mathbf{E} \neq \mathbf{0} \\ W(\mathbf{E}) = 0 \ si \ \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Hipótesis básica para demostrar la unicidad de la solución elástica, de acuerdo a la condición de equilibrio termodinámico estable de Gibbs



A es un estado de equilibrio termodinámico si ***es un estado de máxima entropía S entre todos los estados con la misma energía interna U***

Inversamente A es un estado de equilibrio termodinámico si ***es un estado de mínima energía interna U entre todos los estados con la misma entropía S***

TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Restricciones a los módulos elásticos isotropicos

Como

$$\mathbf{T}(\mathbf{E}) = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \frac{dW(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}} \rightarrow dW = \mathbf{T}\, d\mathbf{E} = T_{ij}\, dE_{ij}$$

O bien

$dW = -p\, de + T'_{ij}\, dE'_{ij}$ Y como $T'_{ij} = 2 \cdot \mathrm{G} \cdot E'_{ij}$, $p = -K \cdot e$ $\boxed{dW = K\, e\, de + 2 \cdot \mathrm{G} \cdot E'_{ij}\, dE'_{ij}}$

integrando

$$\boxed{W = \frac{1}{2} K\, e^2 + \mathrm{G} \cdot E'_{ij}\, E'_{ij}}$$

Para que W sea positivo definido, basta que

$$K = \frac{\mathrm{E}}{3(1-2\nu)} > 0 \Rightarrow \mathrm{E} > 0, (1-2\nu) > 0 \rightarrow -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{G} > 0$$

TEMA 6 – ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Fluidos – Fluido ideal sin fricción

Fluido en reposo o en flujo uniforme -> no soporta tensiones de corte, estado hidrostático

$$\mathbf{T} = -\bar{p}_0\ \mathbf{1} \Rightarrow T_{ij} = -\bar{p}_0\ \delta_{ij}$$

$$\boxed{\bar{p}_0 = -\frac{T_{kk}}{3}\ \textit{Presión estática}}$$

Ecuación de estado termodinámico $\mathrm{F}(\bar{p}_0, \rho, \theta) = 0$, en la que la igualdad a cero indica el equilibrio
Para densidad y temperaturas conocidos, la presión estática queda determinada por el equilibrio termodinámico. Ej. Para gases perfectos

$$p = \rho\ R\ \theta$$

Presión termodinámica $\mathrm{p} \neq \bar{p}_0$ *Cumple la misma relación funcional que la presión estática*

$$\mathrm{F}(p_0, \rho, \theta) = 0$$

Y para el estado de referencia

$$\mathrm{F}(p, \rho, \theta)_0 = \mathrm{F}(\bar{p}_0, \rho, \theta)$$