Trabajo Práctico N°4
Análisis Matemático 1-Facultad de Ingeniería

INTEGRACIÓN Y APLICACIONES

1-NOTACIÓN SIGMA. SUMAS DE RIEMANN. INTEGRAL DEFINIDA.

1. Escriba la suma sin la notación sigma. Luego evalúela: $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos k\pi$

2. Exprese la suma en notación sigma: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16}$

3. Grafique los integrandos y utilice las áreas para evaluar las integrales:

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - |x|)\, dx$

   b) $\displaystyle\int_{a}^{b} 2s\, ds$, $0 < a < b$

4. Para las siguientes funciones, calcule la integral definida en el intervalo indicado utilizando la definición de integral definida. Para ello, tome particiones que den origen a n subintervalos de igual longitud, elija como puntos muestra los extremos derechos de cada subintervalo y obtenga las sumas de Riemann correspondientes. Finalmente tome el límite de las sumas de Riemann cuando $n \to \infty$. ¿Por qué es suficiente tomar solamente particiones de la forma especificada para calcular la integral?

   a) $f(x) = 3x + 2$, en [0,1].
   Ayuda: utilice la fórmula
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   b) $g(x) = x + 4$, en [0,1]

   c) $f(x) = 1 - x^2$, $\quad x \in [0, 1]$. Ayuda: utilice la fórmula
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2-TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

1. Evalúe las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_{-3}^{4} \left(5 - \frac{x}{2}\right) dx$

   b) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t+1)(t^2+4)\, dt$

   c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/6} (\sec x + \tan x)^2\, dx$

2. Mediante el teorema fundamental del Cálculo, determine dy/dx: $y = \displaystyle\int_{0}^{x} \sqrt{1+t^2}\, dt$

3. Determine la derivada: $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \cos t\, dt$

    a) evaluando la integral y derivando el resultado.

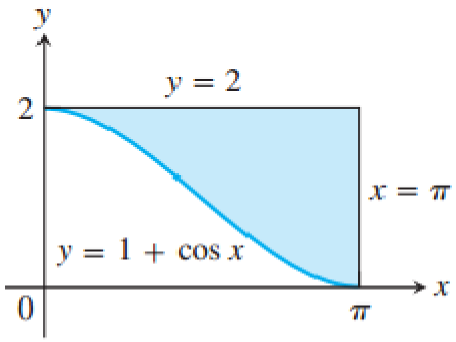
    b) derivando directamente la integral (usando el teorema fundamental del Cálculo).

4. Determine el área total entre el gráfico de la función y el *eje* x en el intervalo dado:

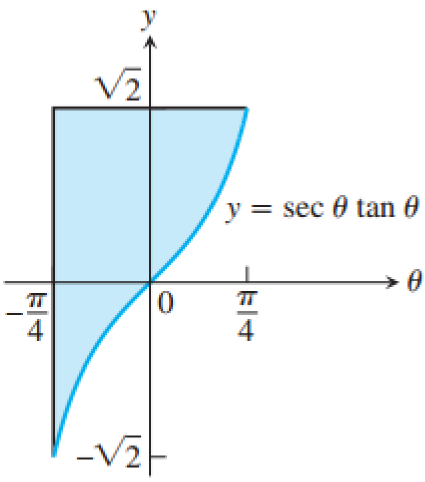
    a) $y = -x^2 - 2x$, $-3 \leq x \leq 2$

    b) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, $0 \leq x \leq 2$

5. Determine las áreas de las regiones sombreadas:



a)



b)

6. Suponga que el ingreso marginal de una compañia por la fabricación y venta de batidoras es:

$$\frac{dr}{dx} = 2 - \frac{2}{(x+1)^2}$$

donde r se mide en miles de pesos y x en miles de unidades. ¿Cuánto dinero recibirá la compañía por una venta de 3 mil unidades?

3-INTEGRALES INDEFINIDAS Y EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

7. Evalúe las integrales indefinidas usando las sustituciones dadas para reducir las integrales a una forma estándar:

    a) $\displaystyle\int 2x(x^2+5)^{-4}\, dx$; $u = x^2 + 5$

    b) $\displaystyle\int \left(1 - \cos\frac{t}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt$; $u = 1 - \cos\dfrac{t}{2}$

c) $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta \, d\theta$. Usando:

1) $u = \cot 2\theta$
2) $u = \csc 2\theta$

8. Evalúe las integrales:

a) $\int \theta(1-\theta^2)^{1/4}\, d\theta$

b) $\int x^{1/2} \operatorname{sen}(x^{3/2}+1)\, dx$

c) $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}\operatorname{sen}^2\sqrt{t}}\, dt$

d) $\int x^3\sqrt{x^2+1}\, dx$

9. La aceleración de una partícula que se mueve hacia atrás y hacia adelante en una recta es $a = \frac{d^2s(t)}{dt^2} = \pi^2\cos(\pi t) m/s^2$ para toda t (recurse que $s = s(t)$ es la posición de la partícula). Si $s = 0$ y $v = 8m/s$ cuando $t = 0\, s$, determine s cuando $t = 1s$.

10. Calcule el valor promedio de la función temperatura en Fairbanks, Alaska:

$$f(x) = 37 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(x-101)\right) + 25,$$

para un periodo de 365 días. Esta es una manera de estimar la temperatura promedio. Compare su resultado con el del servicio meteorológico que es de $25{,}7^0 F$.

4-SUSTITUCIÓN Y ÁREA ENTRE CURVAS.

1. Evalúe las siguientes integrales definidas:

a) a1) $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\, dx$

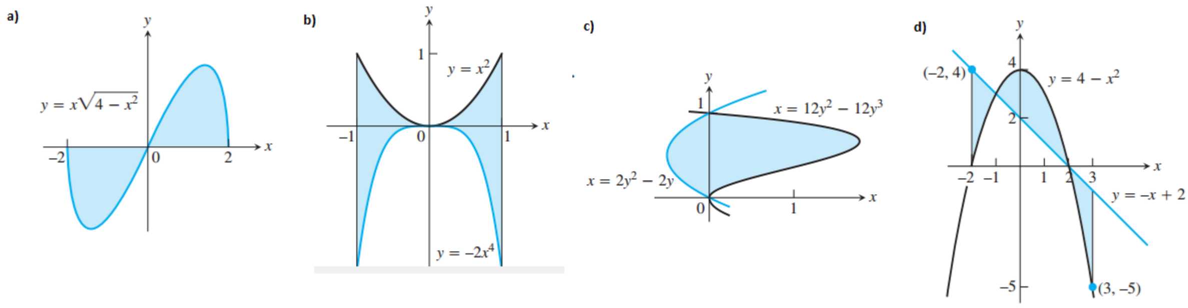
a2) $\int_{-\pi/4}^{0} \tan x \sec^2 x\, dx$

b) b1) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\, dx$

b2) $\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\, dx$

c) $\int_0^1 (4y - y^2 + 4y^3 + 1)^{-2/3}(12y^2 - 2y + 4)\, dy$

2. Determine las áreas totales de las regiones sombreadas.



3. Determine el área de la región encerrada por las curvas:

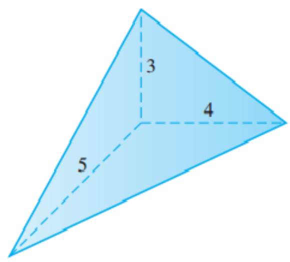
   a) $y = x^4 - 4x^2 + 4$ y $y = x^2$

   b) $y = 2\,\mathrm{sen}\,x$ y $y = \mathrm{sen}\,2x\; 0 \leq x \leq \pi$

   c) $y = \mathrm{sen}(\pi x/2)$ y $y = x$

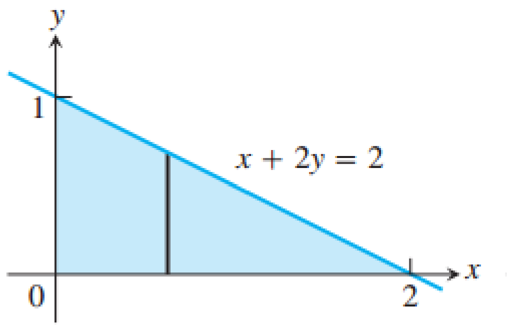
5-CÁLCULO DE VOLÚMENES POR SECCIONES TRANSVERSALES.

1. Determine el volumen del tetraedro dado. (*Sugerencia: considere rebanadas perpendiculares a uno de los lados marcados*)

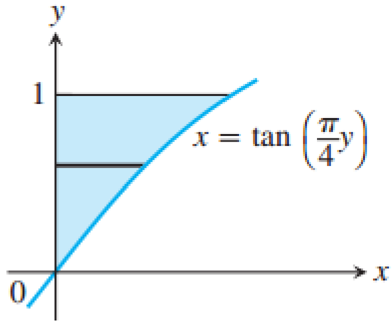


2. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región sombreada:

   a) Alrededor del eje x:



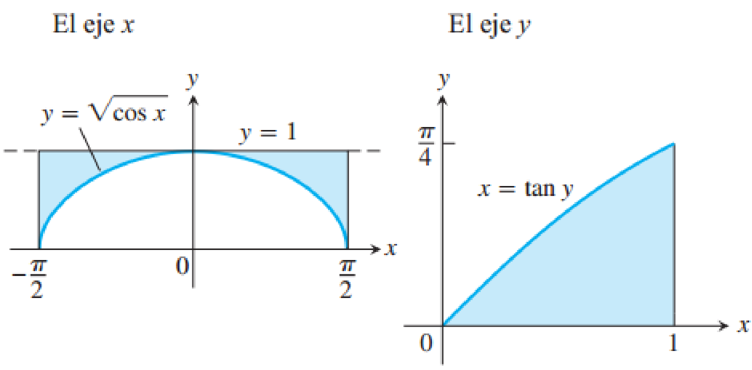
   b) Alrededor del eje y:



3. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por $y = \sqrt{9-x^2}$, $y = 0$ alrededor del eje x.

4. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$ alrededor del eje x.

5. Determine el volumen de cada uno de los sólidos generados al hacer girar las regiones sombreadas alrededor del eje indicado:



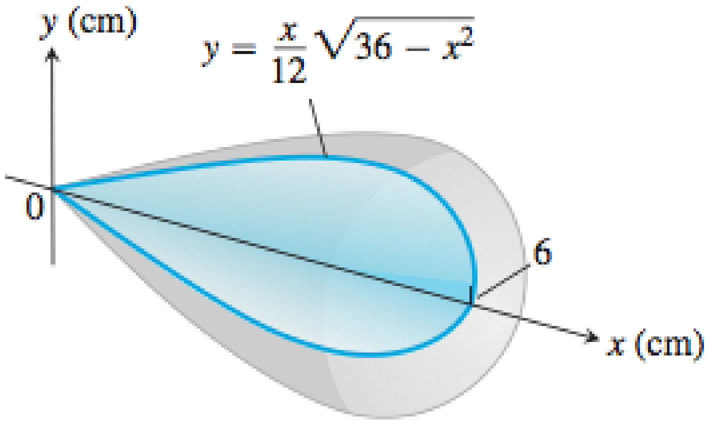
6. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante, acotada por arriba por la parábola $y = x^2$, abajo por el eje x, y a la derecha por la recta $x = 2$ alrededor del eje y.

7. Un tazón tiene una forma que puede generarse al hacer girar la gráfica de $y = x^2/2$ entre $y = 0$ y $y = 5$ alrededor del eje y.

   a) Determine el volumen del tazón.

   b) Si llenamos el tazón con agua a una velocidad constante de 3 unidades cúbicas por segundo, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua en el tazón cuando el agua tiene una profundidad de 4 unidades?

8. Se le ha pedido que diseñe una plomada de 190 g. La forma debe ser similar al sólido de revolución que se ilustra en la figura. Si se elige Latón, que tiene una densidad de 8.5 g por cm cúbico, ¿cuánto pesará la plomada?



6-CÁLCULO DE VOLÚMENES POR MEDIO DE CASCARONES CILÍNDRICOS.

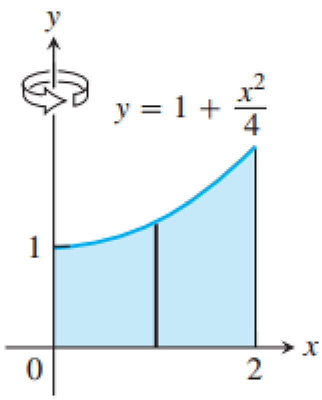
1. Utilice el método de los cascarones para determinar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar:

   a) alrededor del *eje* y la región acotada por $y = x^2$, $y = 2 - x$, $x = 0$ para $x \geq 0$

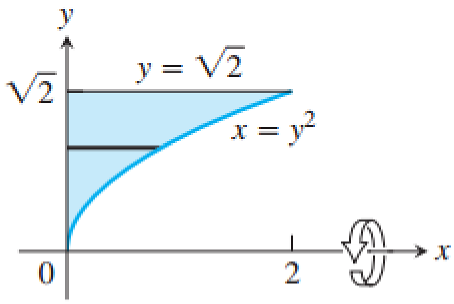
   b) alrededor del *eje* x la región acotada por $x = 2y - y^2$, $x = 0$

2. Utilice el método de los cascarones para determinar el volumen de los sólidos generados al hacer girar la región sombreada alrededor del eje indicado.

1.



2.



3. Utilice el método de los cascarones para determinar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región acotada por las curvas que se indican alrededor de las rectas dadas.

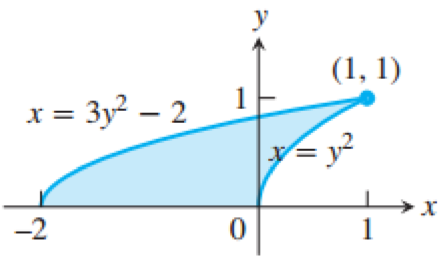
$$y = x^3,\ y = 8,\ x = 0$$

   a) El eje y

   b) La recta $x = -2$

   c) El eje x

   d) La recta $y = 8$



4. La región que se muestra arriba se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. ¿Cuál de los métodos (discos, arandelas, cascarones) podría utilizar para determinar el volumen del sólido más fácilmente? En cada caso plantee las integrales necesarias. Justifique.

7-LONGITUD DE ARCO

1. Determine la longitud de cada curva:

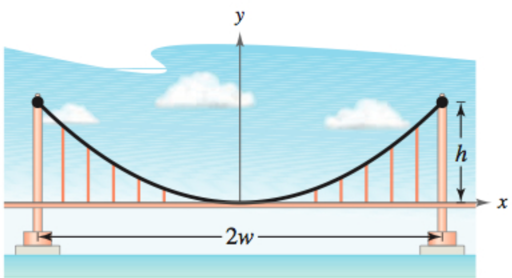
   a) $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 3$

   b) $x = \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{1}{4y}$ de $y = 1$ a $y = 3$

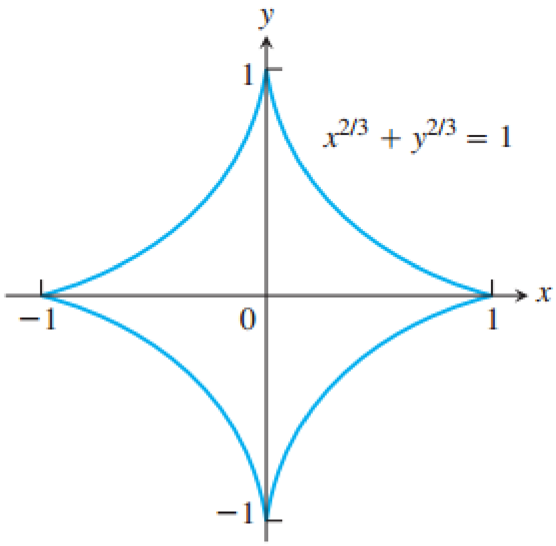
   c) $x = \displaystyle\int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1}\, dt \quad -\pi/4 \leq y \leq \pi/4$

2. El cable de un puente suspendido tiene la forma de una parábola de ecuación $y = kx^2$. Supongamos que h representa la altura del cable desde su punto más bajo al más alto, y sea $2w$ la longitud del puente como se ilustra en la figura. Mostrar que la longitud del cable está dada por:

$$L = 2\int_0^w \sqrt{1 + (4h^2/w^4)x^2}dx.$$



3. La gráfica de la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ es una familia de curvas denominada *astroides*, en virtud de su apariencia de estrella. Determine la longitud de esta astroide particular, para ello, calcule la longitud de la mitad de la parte que está en el primer cuadrante, $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{4} \leq x \leq 1$ y multiplique por 8.



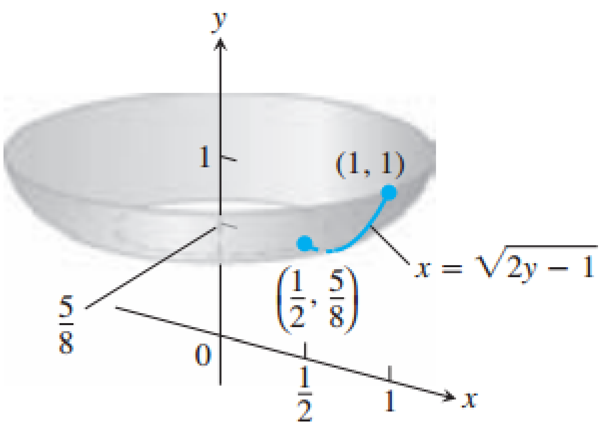
8-ÁREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

1. Determine el área de la superficie lateral del cono generado al hacer girar el segmento de recta $y = x/2$, $0 \leq x \leq 4$, alrededor del eje x.

2. Determine el área de cada superficie generada al hacer girar la curva alrededor del eje indicado.

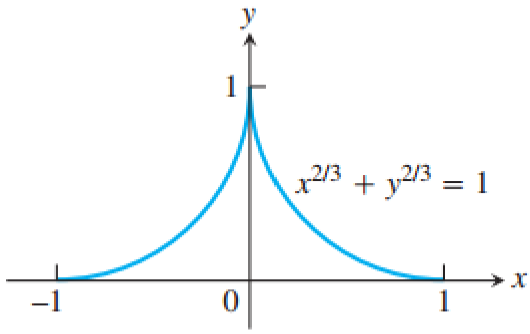
   a) $y = \sqrt{x}$, $3/4 \leq x \leq 15/4$; *eje* x

   b) $x = \sqrt{2y-1}$, $5/8 \leq y \leq 1$; *eje* y



3. Escriba una integral para el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = \cos x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, alrededor del eje x. Más adelante aprenderá a evaluar estas integrales.

4. Determine el área de la superficie al hacer girar alrededor del eje x, la parte de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$que se muestra en la figura. (*Sugerencia*: haga girar alrededor del eje x la parte en el primer cuadrante $y = (1-x^{2/3})^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$, y multiplique por 2 su resultado)

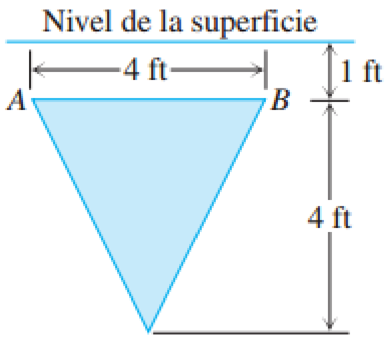


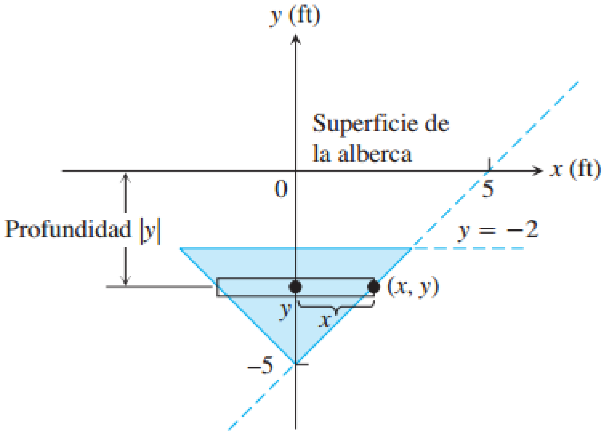
9-TRABAJO Y FUERZAS DE FLUIDOS.

1. Se requiere una fuerza de $210714N$ para comprimir un montaje de resortes en espiral en el tren subterráneo de la ciudad de New York desde su altura original de 15 m a 10 m. ¿Cuál es la constante del resorte? ¿Cuánto trabajo se requiere para comprimir el montaje el primer metro?

2. La fuerza del campo gravitacional de la Tierra varía con la distancia al centro de ésta. La magnitud de la fuerza gravitacional experimentada por un satélite de masa m durante y después del lanzamiento es:
$$F(r) = \frac{mGM}{r^2}$$
donde $M = 5,975 \times 10^{24} kg$ es la masa de la Tierra, $G = 6,6720 \times 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ es la constante de gravitación universal y r se mide en metros y es la distancia al centro de la Tierra. Por lo tanto, el trabajo requerido para elevar un satélite de 1000 kg desde la superficie de la Tierra hasta una órbita a 36780 kilométros del centro de la Tierra es:
$$W = \int_{6370000}^{35780000} \frac{1000MG}{r^2} dr \, (Joules)$$
donde el límite inferior de la integral es la distancia del punto de lanzamiento al centro de la Tierra en metros. Calcule el trabajo.

3. Calcule la fuerza del agua (w = 62,4) sobre un lado de una placa plana en forma de triángulo rectángulo isósceles con base de 6 ft y altura de 3 ft, que se sumerge verticalmente con la base hacia arriba, 2 ft por debajo de la superficie del recipiente.





a) Determine la fuerza del fluido contra una cara de la placa.

b) ¿Cuál será la fuerza del fluido sobre un lado de la placa si el agua fuera de mar en vez de agua dulce?