Trabajo Práctico 2

Funciones de varias variables

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro "Cálculo de varias variables" de Thomas, décimosegunda edición, Ed. Pearson.

Ecuación del plano tangente y recta normal a la superficie dada en forma implícita $F(x, y, z) = 0$ en $P_0(x_0, y_0, z_0)$

PLANO: $F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0$

RECTA: $\dfrac{x - x_0}{F_x(P_0)} = \dfrac{y - y_0}{F_y(P_0)} = \dfrac{z - z_0}{F_z(P_0)} \quad o \quad (x, y, z) = P_0 + t\nabla F(P_0),\ t \in \mathbb{R}$

Ecuación del plano tangente y recta normal a la superficie dada en forma explícita $z = f(x, y)$ en $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

PLANO: $z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$

RECTA: $\dfrac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1} \quad o \quad (x, y, z) = P_0 + t(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1),\ t \in \mathbb{R}$

Funciones de varias variables

1. Obtenga los valores de las imágenes de la función $f(x, y) = x^2 + xy^3$.

   a) $f(0, 0)$ *b)* $f(-1, 1)$ *c)* $f(1, -1)$ *d)* $f(2, 3)$ *e)* $f(-3, -2)$

2. Obtenga y grafique el dominio de cada función. Indique cuál es el conjunto Imagen.

   a) $f(x, y) = \sqrt{y - x - 2}$ *b)* $f(x, y) = \dfrac{1}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$

3. Siendo $D \subset \mathbb{R}^2$, considere la función $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \frac{x^2 - y}{x^4 + y^2}$:

   a) Indique el dominio D, como el mayor conjunto posible.
   b) Evalúe f(-1, 2).
   c) Indique ceros de f.
   d) ¿Cuál es el conjunto de puntos del dominio D, donde f es positiva o negativa?

4. Obtenga y grafique las curvas de nivel $f(x, y) = c$ sobre el mismo conjunto de ejes coordenados para los valores dados de c. Nos referimos a estas curvas de nivel como un mapa de contorno.

   a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $c = 0, 1, 4, 9, 16$ *b)* $f(x, y) = xy$, $c = -4, -1, 0, 1, 4$

5. Obtenga el dominio de las siguientes funciones y determine el rango de las mismas. Describa las curvas de nivel de cada función y encuentre la frontera del dominio de cada una. Determine si el dominio es una región abierta, cerrada o ninguna de las dos, y decida si el dominio está o no acotado.

   a) $f(x, y) = \sqrt{y - x}$ *b)* $f(x, y) = \operatorname{arc\,sen}(y - x)$ *c)* $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$

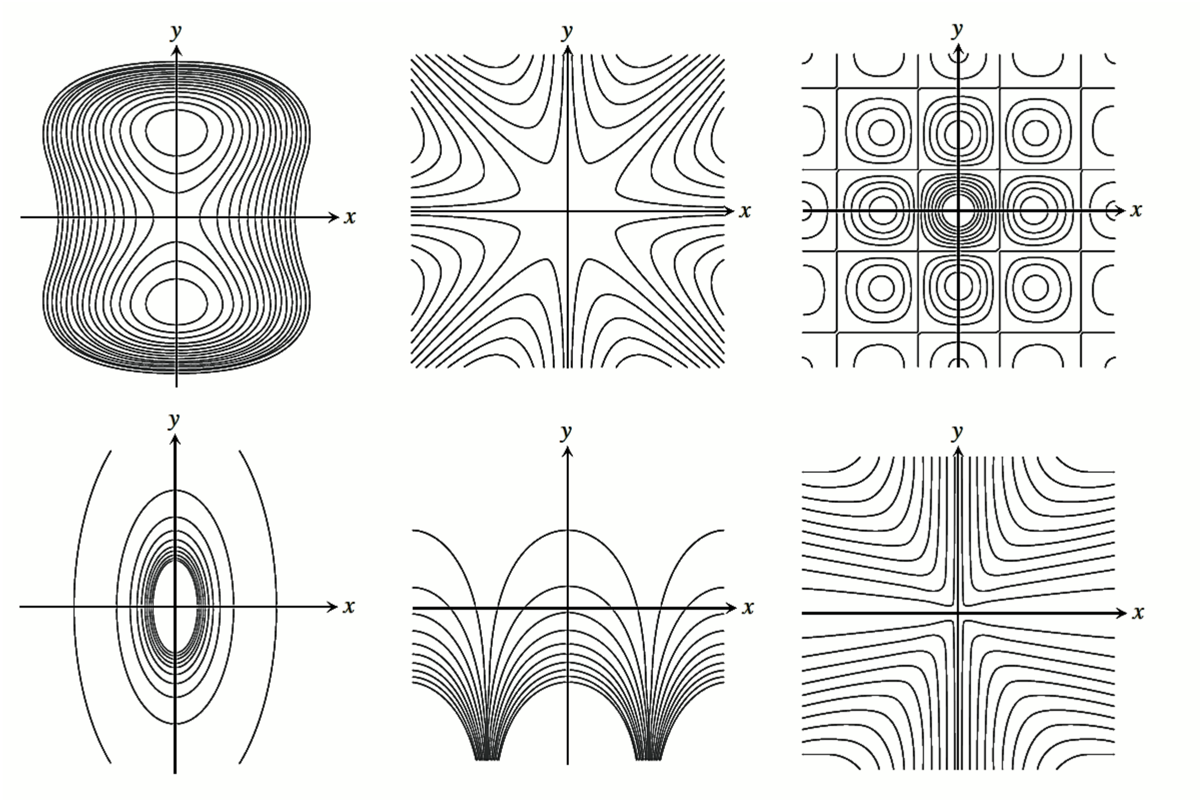
6. Obtenga analíticamente y represente gráficamente el dominio D de la función $f : D \to \mathbb{R}$, dada por

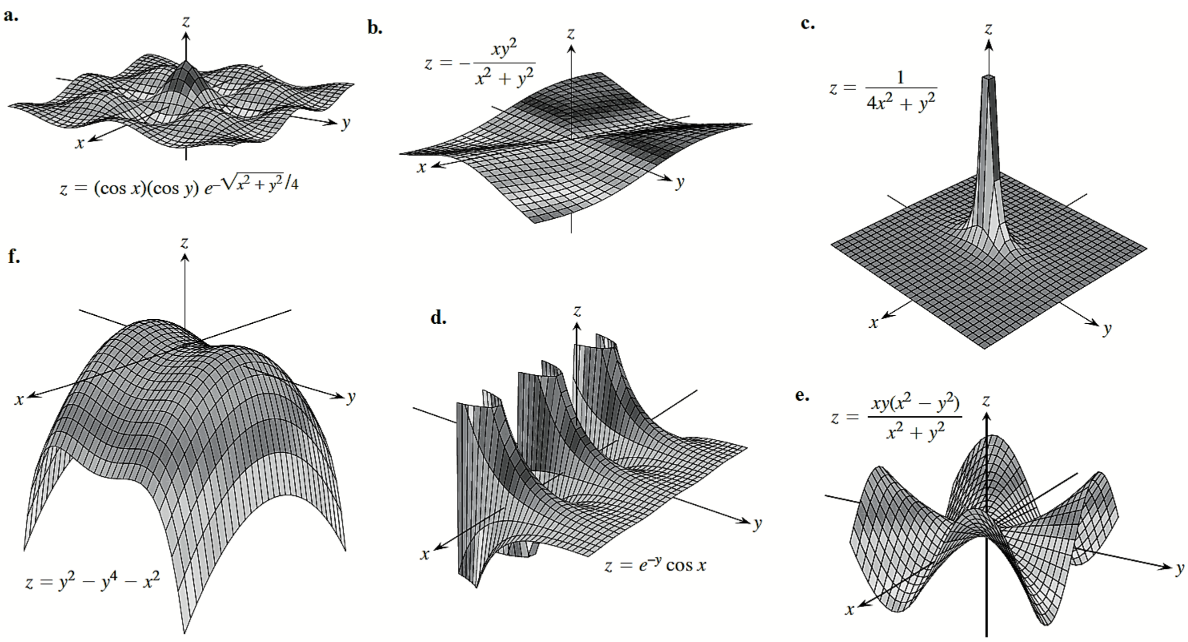
$$f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}.$$

7. Muestre los valores de las siguientes funciones de dos maneras: I) graficando la superficie $z = f(x, y)$, y II) dibujando varias curvas de nivel en el dominio de la función. Marque cada línea de contorno.

a) $f(x, y) = y^2$	*c*) $f(x, y) = 1 - \lvert y \rvert$
b) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$	*d*) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

8. Asocie cada conjunto de curvas de nivel, del primer grupo de gráficos, con la función apropiada del segundo grupo.





9. Repaso: ejercicios tomados de geometría analítca.

   Indique ecuaciones para las siguientes familias, adoptando un parámetro apropiado. Represente en cada caso al menos tres superficies de cada familia.

   a) Familia de esferas de centro $(1, -3, 5)$.

   b) Familia de paraboloides de revolución de vértice $V(0, 3, 0)$.

   c) Familia de paraboloides de revolución de vértice variable, eje de revolución el eje y.

10. Dibuje la superficie de nivel típica (es decir $f(x, y, z) = 1$) para cada función:

    a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

    b) $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

    c) $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

11. Determine la ecuación para la superficie de nivel de la función en el punto dado.

    a) $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(1, -1, \sqrt{2})$

    b) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y + z^2)$, $(-1, 2, 1)$

12. Si la función V con dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ da el potencial eléctrico en cada punto de D,

    a) ¿cómo se llaman las curvas de nivel de V? Interprete físicamente.

    b) Describa la forma de la placa D, si la función potencial está dada por $V(x, y) = \frac{C}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$, donde C es una constante positiva.

    c) Trace algunas curvas de nivel de V.

Límite y continuidad

13. Calcule los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2} \qquad d)\ \lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$$

$$b)\ \lim_{(x,y)\to(0,\pi/4)} \sec x \tan y \qquad e)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{xy}$$

$$c)\ \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} \qquad f)\ \lim_{(x,y,z)\to(\pi,0,3)} ze^{-2y}\cos(2x)$$

14. *Si dado el límite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ se hallan

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{\substack{y\to b\\ x\neq a}} f(x,y)\right) \quad \text{o} \quad \lim_{y\to b}\left(\lim_{\substack{x\to a\\ y\neq b}} f(x,y)\right),$$

se dice que se ha tomado **límites iterados**. Este procedimiento no siempre conduce al valor del límite. Analice los siguientes ejemplos.

a) Para analizar el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2},$$

halle los límites iterados. Verifique que ambos valores coinciden con el valor del límite doble.

b) Para la función dada por

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

verifique que los límites iterados cuando $(x,y)\to(0,0)$ sí existen pero el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

c) Para la función dada por $f(x,y)=(x+y)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right)$, verifique que los límites iterados cuando $(x,y)\to(0,0)$ **no** existen pero el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ sí existe.

15. ¿En cuáles puntos (x,y) del plano las siguientes funciones son continuas?

a) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

b) $f(x,y)=\operatorname{sen}\frac{1}{xy}$

c) $f(x,y)=\frac{x+y}{2+\cos x}$

16. ¿En cuáles puntos (x,y,z) del espacio las siguientes funciones son continuas?

a) $f(x,y,z)=\ln(xyz)$

b) $g(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-1}$

c) $h(x,y,z)=\frac{1}{z-\sqrt{x^2+y^2}}$

17. Considerando **diferentes trayectorias** de aproximación, demuestre que las siguientes funciones no tienen límite cuando $(x,y)\to(0,0)$.

$$a)\ f(x,y)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad b)\ g(x,y)=\frac{x^2+y}{y}$$

18. Demuestre que el siguiente límite no existe: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy^2-1}{y-1}$.

19. Demuestre que la función $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ presenta una tendencia a *cero* a lo largo de todas las líneas rectas que tienden a $(0,0)$, pero no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$.

Derivadas parciales

20. Obtenga $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ para cada una de las siguientes funciones.

    a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$; además, pruebe (por definición) que f es diferenciable.

    b) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

    c) $f(x,y) = e^{xy}\ln y$.

    d) $f(x,y) = x^y$.

21. Calcule la derivada parcial de las siguientes funciones con respecto a cada variable.

    a) $f(x,y,z) = x - \sqrt{y^2+z^2}$.

    b) $h(\rho,\phi,\theta) = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta$.

22. Encuentre las derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones:

    a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$.

    b) $h(x,y) = xe^y + y + 1$.

23. Verifique que $w_{xy} = w_{yx}$:

    a) $w = \ln(2x+3y)$.

    b) $w = e^x + x\ln y + y\ln x$.

24. Demuestre que la función $f(x,y,z) = e^{3x+4y}\cos(5z)$ satisface una ecuación de Laplace. (*Ecuación de Laplace:* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$).

25. Demuestre que la función $w = \operatorname{sen}(x+ct)$ es solución de la ecuación de onda. (*Ecuación de onda:* $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$).

26. Una función $f(x,y)$ que tiene sus primeras derivadas continuas en una región abierta R, ¿tiene que ser continua en R? Justifique su respuesta.

27. Demuestre que la función $u(x,t) = \operatorname{sen}(\alpha x)e^{-\beta t}$ satisface la ecuación del calor (distribución del calor en el tiempo t en una dimensión: $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, donde $k > 0$), para ciertos valores de α y β positivos. Indique cuáles son dichos valores.

28. Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden. Compruebe que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(Sugerencia: calcule las derivadas parciales involucradas por definición y compruebe que $f_{xy}(0,0) = -1$ y que $f_{yx}(0,0) = 1$.)

Regla de la cadena

29. Dadas $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x(t) = \cos t + \operatorname{sen} t$, $y(t) = \cos t - \operatorname{sen} t$ y $w(t) = f(x(t), y(t))$, exprese $\frac{dw}{dt}$ como una función de t usando la regla de la cadena; luego halle $\frac{dw}{dt}$ expresando w en términos de t y derivando directamente con respecto a t. Finalmente evalúe $\frac{dw}{dt}$ en el valor de $t = 0$.

30. Dadas $f(x,y,z) = 2ye^x - \ln z$, $x(t) = \ln(t^2+1)$, $y(t) = \arctan t$, $z(t) = e^t$ y $w(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, exprese $\frac{dw}{dt}$ como una función de t usando la regla de la cadena; luego halle $\frac{dw}{dt}$ expresando w en términos de t y derivando directamente con respecto a t. Finalmente evalúe $\frac{dw}{dt}$ en el valor de $t = 1$.

31. Dadas $f(x,y)$, $x(u,v)$, $y(u,v)$ y $z(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, exprese $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ como funciones de u y de v usando la regla de la cadena; luego halle las mismas derivadas expresando z directamente en términos de u y de v antes de derivar. Finalmente evalúe $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ en el punto dado (u,v).

$$f(x,y) = 4e^x \ln y,\ x = \ln(u \cos v),\ y = u \operatorname{sen} v;\ (u,v) = (2, \pi/4).$$

32. Exprese $\frac{\partial w}{\partial u}$ y $\frac{\partial w}{\partial v}$ como funciones de u y de v usando la regla de la cadena; luego halle las mismas derivadas expresando w directamente en términos de u y de v antes de derivar. Finalmente evalúe $\frac{\partial w}{\partial u}$ y $\frac{\partial w}{\partial v}$ en el punto dado (u,v).

$$w = xy + yz + xz,\ x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv;\ (u,v) = (1/2, 1).$$

33.
    a) Suponiendo que las ecuaciones definen a y como una función derivable de x, use el teorema de derivación implícita para obtener el valor de $\frac{dy}{dx}$ en el punto dado.
    - a_1) $xy + y^2 - 3x - 3 = 0$, $(-1, 1)$;
    - a_2) $xe^y + \operatorname{sen}(xy) + y - \ln 2 = 0$, $(0, \ln 2)$.

    b) Suponiendo que las ecuaciones definen a z como una función derivable de x y de y, use el teorema de derivación implícita para obtener $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el punto dado.
    - b_1) $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$, $(1,1,1)$;
    - b_2) $\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(y+z) + \operatorname{sen}(x+z) = 0$, (π, π, π).

34. Determine $\frac{\partial w}{\partial r}$, cuando $r = 1$, $s = -1$; si $w = (x+y+z)^2$, $x = r - s$, $y = \cos(r+s)$, $z = \operatorname{sen}(r+s)$.

35. Sea $T = T(x,y)$ la temperatura en el punto (x,y) de la circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y suponga que:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 8x - 4y,\ \frac{\partial T}{\partial y} = 8y - 4x.$$

   a) Encuentre dónde ocurren las temperaturas máxima y mínima en la circunferencia, examinando las derivadas $\frac{dT}{dt}$, y $\frac{d^2T}{dt^2}$.

   b) Suponga que $T = 4x^2 - 4xy + 4y^2$. Obtenga los valores máximo y mínimo de T dentro de la circunferencia.

Derivadas direccionales y vectores gradiente

36. Determine el gradiente de la función en el punto dado y dibújelo junto a la curva de nivel que pasa por el punto.

    a) $f(x,y) = y - x$, $(2,1)$

    b) $g(x,y) = xy^2$, $(2,-1)$

37. Obtenga ∇f en el punto dado: $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + \ln(xyz)$, $(-1,2,-2)$.

38. Encuentre la derivada de la función en P_0 en la dirección de $\vec{\mathbf{u}}$:

    a) $g(x,y) = \frac{x-y}{xy+2}$, $P_0(1,-1)$, $\vec{\mathbf{u}} = 12\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$

    b) $h(x,y,z) = \cos(xy) + e^{yz} + \ln(zx)$, $P_0(1,0,1/2)$, $\vec{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$

39. Obtenga la dirección en la cual la función crece y decrece más rápidamente en P_0. Luego obtenga la derivada de la función en esas direcciones, si $f(x,y) = x^2+xy+y^2$, $P_0(-1,1)$.

40. Dada $f(x,y) = x^2+y^2$, grafique la curva $f(x,y) = 4$ junto con ∇f en el punto $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ y la recta tangente a la dicha curva de nivel en el punto $(\sqrt{2},\sqrt{2})$. Luego escriba la ecuación para la recta tangente.

41. Sea $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - y$. Obtenga las direcciones $\vec{\mathbf{u}}$ y los valores de $D_u f(1,-1)$ para los cuales:

    a) $D_u f(1,-1)$ es el más grande

    b) $D_u f(1,-1)$ es el más pequeño

    c) $D_u f(1,-1) = 0$

    d) $D_u f(1,-1) = 4$

    e) $D_u f(1,-1) = -3$

42. ¿Cuál es la relación entre la derivada de una función derivable $f(x,y,z)$ en un punto P_0 en la dirección de un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ y el componente escalar de $(\nabla f)_{P_0}$ en la dirección de $\hat{\mathbf{u}}$? Justifique su respuesta.

43. Pruebe que la función dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    es continua y tiene derivadas parciales pero no es diferenciable en $(0,0)$.

    Sugerencia: para probar que f no es diferenciable en $(0,0)$ puede probar que la derivada direccional de f en $(0,0)$ en ciertas direcciones $\mathbf{u}$ no es igual a $\nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u}$.

44. Verifique que la función g definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x+y}, & x+y \neq 0; \\ 0, & x+y = 0. \end{cases}$$

    es diferenciable en $(0,0)$ aunque sus derivadas parciales de primer orden no son continuas en $(0,0)$. Para ello:

    a) calcule las derivadas parciales de primer orden de g en $(0,0)$ y en (x,y) para (x,y) tal que $x+y \neq 0$.

    b) Compruebe que g_x no es continua en $(0,0)$ verificando que no existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_x(x,y)$.

    c) Verifique que g es diferenciable en $(0,0)$ aplicando la definición. (Sugerencia: plantee $\Delta g(0,0)$ y desarrolle la potencia que aparece en la expresión.)

Planos tangentes y diferenciales

45. Encuentre la ecuación para el plano tangente y la recta normal en los puntos indicados en la superficie dada: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $P_0(1,1,1)$, $P_1(\sqrt{3},0,0)$, $P_2(0,0,\sqrt{3})$.

46. Obtenga una ecuación para el plano tangente a la superficie $z = e^{-(x^2+y^2)}$ en el punto $(0,0,1)$.

47. *a*) ¿Alrededor de cuánto cambiará $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ si el punto $P(x,y,z)$ se mueve desde $P_0(3,4,12)$ una distancia $ds \approxeq 0,1$ unidades en la dirección de $3\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$?

    b) Estime el cambio de $f(x,y,z) = e^x \cos(yz)$ cuando el punto $P(x,y,z)$ se mueve desde el origen una distancia $ds = 0{,}1$ unidades en la dirección $2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$.

48. Obtenga la aproximación lineal $L(x,y)$ y la diferencial de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ en el punto $(0,0)$. Repita el ejercicio para el punto $(1,1)$.

49. Obtenga la aproximación lineal $L(x,y,z)$ y la diferencial de la función $f(x,y,z) = xy + yz + xz$, en cada punto: $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, y $(1,0,0)$.

50. La lata cilíndrica de un refresco tiene $12cm$ de alto y $3cm$ de radio. El fabricante planea reducir la altura de la lata en $0,2cm$ y el radio en $0,3cm$. Utilizando diferenciales estime cuánta bebida menos encontrarán los consumidores en cada nueva lata.

Ejercicios integradores

51. Este ejercicio admite más de un planteo posible. Elija uno. Dada la siguiente ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,

    a) exprese $z = f(x,y)$;
    b) Determine y grafique el dominio de f.
    c) Indique la imagen de f.
    d) Halle las ecuaciones de las trazas del gráfico de f y grafique.
    e) Encuentre las ecuaciones de tres curvas de nivel y grafique.

52. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$:

    a) Halle la ecuación de la curva de nivel $f(x,y) = z$ para $z = f(1,2)$ y grafique.
    b) Encuentre el gradiente de f en el punto $(1,2)$ y represente el gradiente en el gráfico anterior.
    c) Calcule la derivada direccional de f en el mismo punto, en la dirección del vector $\vec{\mathbf{u}} = (-1,1)$.
    d) Calcule la derivada de f en la dirección que forma un ángulo $\alpha = \pi/6$ con el semieje positivo de las x.
    e) Calcule la derivada de f en el punto $(1,2)$ en la dirección que va del punto $P(2,1)$ al punto $Q(1,3)$.
    f) Determine la dirección y el valor de la máxima derivada direccional en el punto $(1,2)$.
    g) Determine la dirección y el valor de la mínima derivada direccional en el punto $(1,2)$.
    h) Determine la dirección en la que se anula la derivada en dicho punto e interprete por qué.

i) Determine en qué dirección la derivada en dicho punto toma el valor 1.

53. *a*) Se desea estudiar si la ecuación $2x - 3y^2 + xz = 1$ define a z implícitamente como una función de x y de y. Para ello, considere la función $F(x, y, z) = 2x - 3y^2 + xz$ y, analizando las condiciones correspondientes, verifique que $F(x, y, z) = 1$ define a z implícitamente como función de x y de y en un entorno de $(1, -1, 2)$. (Ayuda: página 781 del libro de Thomas.)

    b) A la luz de lo concluido en el ítem anterior, calcule la derivada de f en la dirección de $\vec{\mathbf{v}} = (2, -1)$ en el punto $(1, -1)$. (Ayuda: página 780 del libro de Thomas.)

54. Analice si existe el plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el punto $P(1, 1, 1)$. En caso afirmativo:

    a) Determine la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie en P.

    b) Determine la derivada direccional en P en la dirección dada por $\vec{\mathbf{v}} = (-1, 1)$.

55. Dada la función $f(x, y) = x^2 - y^2$

    a) Calcule el incremento de la función al pasar de $P(-1, -1)$ a $Q(-0,98; -1,01)$

    b) Calcule el valor de la diferencial de la función en P y utilícelo para aproximar el incremento de la función.

    c) Determine si es buena la estimación. Justifique.

    d) Halle la aproximación lineal y utilícela para determinar el valor de la función en Q.

Fórmula de Taylor para dos variables

56. Use la fórmula de Taylor para $f(x, y)$ en el origen para obtener aproximaciones cuadráticas y cúbicas cerca del origen, siendo $f(x, y) = xe^y$.

57. Use la fórmula de Taylor para encontrar una aproximación cuadrática de $f(x, y) = \cos x \cos y$ en el origen. Calcule el error en la aproximación si $|x| \leq 0,1$ y $|y| \leq 0,1$.

Valores extremos y puntos silla

58. Determine los máximos y mínimos locales y puntos silla de las siguientes funciones:

    a) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

    b) $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

    c) $f(x, y) = y \operatorname{sen} x$

    d) $f(x, y) = e^{-y}(x^2 + y^2)$

59. Encuentre los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ en una placa triangular cerrada y acotada por las rectas $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$ en el primer cuadrante.

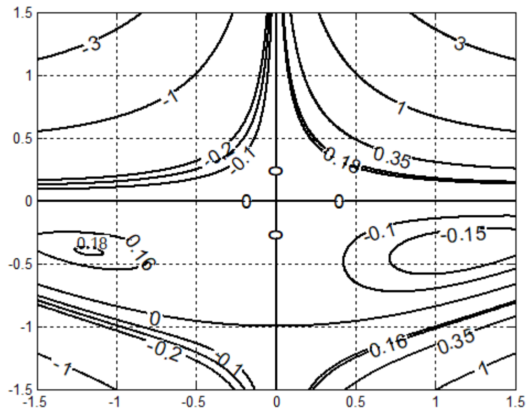
60. Una placa circular plana tiene la forma de la región $x^2 + y^2 \leqslant 1$. La placa incluyendo la frontera donde $x^2 + y^2 = 1$, se calienta de manera que la temperatura en el plano (x, y) es $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Determine las temperaturas en los puntos más caliente y más frío de la placa.

61. El discriminante $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ se anula en el origen para $f(x, y) = x^2y^2$, de manera que el criterio de la segunda derivada falla. Determine qué presenta la función en el origen imaginando la apariencia de la superficie $z = f(x, y)$.

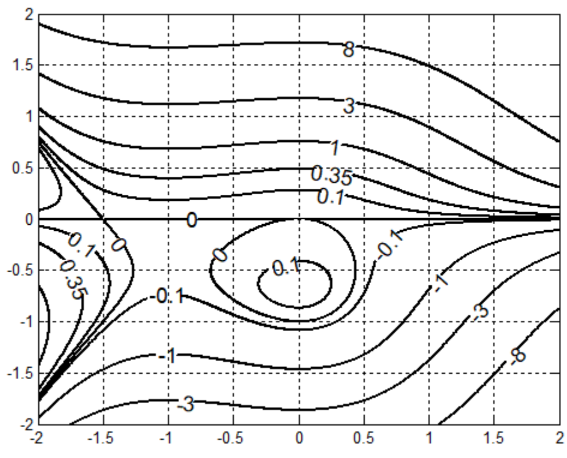
62. Determine tres números cuya suma sea 9 y cuya suma de cuadrados sea un mínimo.

63. Obtenga las dimensiones de la caja rectangular de máximo volumen que puede inscribirse dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

64. El siguiente diagrama de curvas de nivel corresponde a cierta función f, de la que se conoce que los puntos críticos son $(-1,2; -0,4)$, $(1,2; -0,4)$ y $(0, 0)$. Basándose en la información que le da el gráfico y justificando cada caso, indique para cada uno de esos puntos críticos si la función presenta allí un máximo local, un mínimo local o un punto de silla.

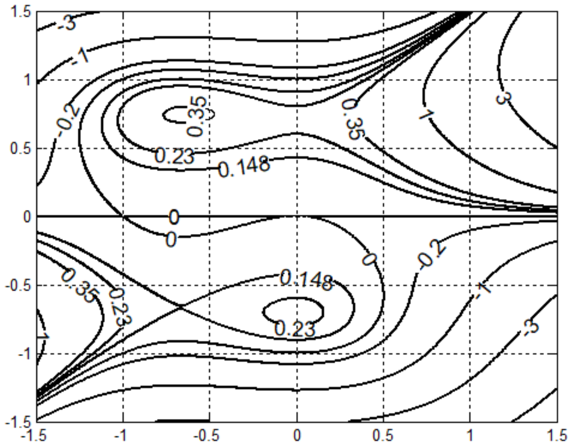


65. Sea la función diferenciable f dada por $f(x, y) = \frac{2}{3}x^3y + y^3 + x^2y + y^2$. El siguiente gráfico representa algunas curvas de nivel de f.



Se sabe que ∇f se anula para cada uno de los puntos $P_0(0, 0)$ y $P_1(0, -\frac{2}{3})$ (no son los únicos). Indique si f presenta un máximo local, un mínimo local o un punto de silla en P_0 y en P_1. Justifique su respuesta.

66. Sea la función diferenciable f dada por $f(x, y) = x^3y + y^2 + x^2y - y^4$. El siguiente gráfico representa algunas curvas de nivel de f.



Se sabe que ∇f se anula para cada uno de los puntos $P_1(0, 0)$ y $P_2(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ (no son los únicos). Indique si f presenta un máximo local, un mínimo local o un punto de silla en P_1 y en P_2. Justifique su respuesta.

Multiplicadores de Lagrange

67. Dado el problema de hallar los valores extremos de la función $f(x, y) = x + 2y$ sujeta a la restricción $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$,

    a) represente gráficamente la restricción y algunas curvas de nivel de la función cuyos valores extremos se buscan. Dé una estimación de las coordenadas de los posibles puntos críticos.

    b) Resuelva el problema analíticamente y compare el resultado obtenido con la respuesta del ítem anterior.

    c) ¿Cómo resultan los vectores gradientes de la función objetivo f y de la función restricción en los puntos encontrados?

68. Calcule los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a la condición $x^2 + y^2 = 1$, para ello:

    a) represente en un mismo gráfico la superficie dada por el gráfico de f y la curva que es la proyección sobre el gráfico de f de la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

    b) Grafique la restricción junto con algunas curvas de nivel de f y los vectores gradiente en los puntos de tangencia.

69. Determine los puntos sobre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ donde $f(x, y) = xy$ asume valores extremos.

70. Obtenga las dimensiones de una lata cilíndrica circular recta y cerrada con menor área superficial cuyo volumen sea $16\pi cm^3$.

71. Determine los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z) = x - 2y + 5z$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

72. Determine las dimensiones de la caja rectangular cerrada con mayor volumen que puede inscribirse en una esfera unitaria.

73. Maximice la función $f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2$ sujeta a las restricciones $2x - y = 0$ y $y + z = 0$.

74. Haga un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange para hallar la mínima distancia entre los puntos de la recta de ecuación $y = x - 2$ y los de la parábola dada por $y = x^2$

75. Un problema de **programación matemática** (lineal o no lineal) consiste en hallar los extremos de una función f sujeta a un conjunto de restricciones dadas por igualdades y/o desigualdades $g_i = 0$, $1 \leq i \leq k$, $h_j \leq 0$, $1 \leq j \leq m$, tal como:

$$\begin{array}{ll} (P) & \min f(x,y) \\ s.a & g_i(x,y) = 0 \quad (1 \leq i \leq k); \\ & h_j(x,y) \leq 0 \quad (1 \leq j \leq m). \end{array}$$

Si todas las funciones involucradas f, g_i, $1 \leq i \leq k$ y h_j, $1 \leq j \leq m$, son lineales, entonces el problema se llama lineal.

Ejemplo: se desea hallar la máxima temperatura que experimenta un móvil que se desplaza por la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, cuando la temperatura en el plano viene dada por $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$, por el método de multiplicadores de Lagrange. Para ello se hace el siguiente planteo:

$$\begin{array}{ll} (P) & \max f(x,y) \\ s.a & f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y); \\ & f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y); \\ & g(x,y) = 0. \end{array} \quad \text{que en este caso es} \quad \begin{array}{ll} (P) & \max 3x^2 + 4y^2 \\ s.a & 6x = \lambda 2x; \\ & 8y = \lambda 2y; \\ & x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{array}$$

En este ejemplo concreto, se está frente a un sistema de ecuaciones no lineales (dado que la tercera ecuación es no lineal) y un problema no lineal (dado que el sistema es no lineal y la función que se maximiza es no lineal). Si, en cambio, la curva por la que se desplaza el móvil viene dada por $x + y = 1$, y la temperatura en el plano es la misma $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$, por el método de multiplicadores de Lagrange se plantea:

$$\begin{array}{ll} (P) & \max f(x,y) \\ s.a & f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y); \\ & f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y); \\ & g(x,y) = 0. \end{array} \quad \text{que ahora es} \quad \begin{array}{ll} (P) & \max 3x^2 + 4y^2 \\ s.a & 6x = \lambda 1; \\ & 8y = \lambda 1; \\ & x + y - 1 = 0. \end{array}$$

En este caso, se está frente a un sistema de ecuaciones lineales y un problema no lineal (dado que la función que se maximiza es no lineal).

Tarea: analice los planteos de los ejercicios 67 a 74 e identifique en cuál se ha generado un sistema o un problema lineal y en cuál, no.

Más ejercicios integradores

76. Dada la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

    a) Defina z como alguna función continua f de x y de y, en forma explícita.

b) Determine y grafique el dominio de f.

c) Indique el conjunto imagen de f.

d) Halle las ecuaciones de las trazas de f y grafique.

e) Encuentre las ecuaciones de tres curvas de nivel de f y grafique.

f) Calcule la derivada direccional de f en el punto $P(1,1)$ en la dirección dada por $\vec{\mathbf{v}} = (1,-2)$.

g) Halle la ecuación de la recta normal y del plano tangente a la superficie que es el gráfico de f en el punto P.

h) Determine y clasifique los extremos de f.

77. Encuentre el punto $P(x,y,z)$ del plano $2x + y - z - 5 = 0$ que esté mas cercano al origen. Utilice el Criterio de la segunda derivada para valores extremos locales y luego verifique el resultado utilizando el Método de multiplicadores de Lagrange.

78. Para obtener la distancia mínima en el plano xy de la recta $y = x+1$ a la parábola $y^2 = x$, minimice la función $f(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$ sujeta a las restricciones $x = y+1$ y $u = v^2$.

Ejercicios tomados en exámenes

79. Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z$.

    a) Describa la superficie de nivel $f(x,y,z) = 0$.

    b) Calcule el gradiente de f en el punto $(2,1,3)$. Interprete en una representación gráfica.

    c) Calcule la derivada direccional de f en el punto $(2,1,3)$ en la dirección $u = (0,2,0)$. Interprete esta derivada.

    d) Halle el valor mínimo de f cuando solo se consideran los puntos que cumplen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

    e) Indique si f es o no diferenciable en $\mathbb{R}^3$, justificando su respuesta. Interprete.

    f) Halle, si existe, la aproximación lineal de f en el punto $(2,1,3)$. Interprete.

80. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - y^2 + 4$.

    a) Represente gráficamente la función f.

    b) Marque en su gráfico el punto $(0,2,f(0,2))$.

    c) Represente en otro gráfico la curva de nivel $f(x,y) = 0$.

    d) Calcule el gradiente de f en el punto $(0,2)$. Represéntelo en alguno de sus gráficos e interprete.

    e) Calcule la derivada direccional de f en el punto $(0,2)$ en la dirección $u = (1,1)$. Interprete esta derivada.

    f) Halle, si existen, los extremos de f. Justifique.

    g) Halle los valores extremos de f cuando solo se consideran los puntos que cumplen $x^2 + y^2 = 1$.

81. Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$.

    a) Describa las superficies de nivel $f(x,y,z) = k$, para $k = 1, 0$ y -1.

b) Halle los valores extremos de f, si solo se consideran los puntos de la superficie dada por la ecuación $y^2 + z^2 = 1$.

c) Halle, si existe, la diferencial (total) de f en el punto $(1, 0, 0)$.

d) Calcule $\iiint_E f dV$, cuando E es el sólido comprendido entre el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = 2$.

82. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{1}{\ln(9 - x^2 - y^2)}$.

a) Indique cuál es el el dominio D de f (el máximo en el sentido de la inclusión). Represéntelo gráficamente.

b) Calcule el gradiente de f en el punto $(0, 1)$; represéntelo gráficamente e interprete.

83. Se desea conocer los valores extremos de la función dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre los puntos del plano xy que cumplen $x + y = 2$.

a) Haga un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

b) Resuelva, indicando claramente el valor extremo alcanzado y el o los puntos donde se alcanza.

84. Se desea conocer los valores extremos (máximo y mínimo) de la función dada por $f(x, y) = 3x^2 - y^2$ sobre los puntos del plano tales que $x^2 + y^2 = 1$.

a) Haga un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

b) Resuelva el problema: halle los valores extremos e indique en qué puntos se presentan dichos valores extremos.

85. Se desea conocer el valor mínimo de la función dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre los puntos del plano xy que cumplen $x + y = 2$.

a) Haga un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

b) Resuelva, indicando claramente el valor mínimo alcanzado y el o los puntos donde se alcanza.

86. Una caja de cartón sin tapa debe tener un volumen de $32\, dm^3$. Encuentre las dimensiones que hagan mínima la cantidad de cartón utilizado. Indique también cuál es esa cantidad mínima de cartón necesaria.

87. Indique qué condiciones se deben cumplir para aplicar el método de multiplicadores de Lagrange en la resolución de un problema, en general.

88. Se desea conocer los valores extremos (máximo y mínimo) de la función dada por $f(x, y, z) = xyz$ sobre los puntos del espacio que cumplen $x^2 + y^2 = 1$ y $y = x^2 + z^2$. Haga un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

89. Dé la definición de derivada direccional de una función de varias variables en un punto de su dominio.

90. Sea la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ definida en $\mathbb{R}^3$. Indique para cada afirmación si es verdadera o falsa. Debe justificar todas sus respuestas.

a) $\boxed{}$ No existe un plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = 0$ en el punto $P(0, 0, 0)$.

b) ☐ La función f es diferenciable en $(0,0,0)$.

c) ☐ Al buscar los valores extremos de f se encuentra un único punto crítico.

d) ☐ La divergencia del gradiente de f toma valores negativos en algunos puntos (que se llaman *sumideros*).

91. Sea la función $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ definida en $\mathbb{R}^3$. Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si son verdaderas o falsas, justificando sus respuestas.

a) ☐ No existe un plano tangente a la superficie de nivel $f(x,y,z) = 0$ en el punto $P(0,0,0)$.

b) ☐ La función f es diferenciable en $(1,2,3)$.

c) ☐ La función f es continua en $(1,2,3)$.

d) ☐ Si se busca el máximo de f sujeto a la restricción $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ se encuentra un valor máximo que se realiza en un único punto.

e) ☐ La linealización de f en $(1,2,3)$ es la función dada por $L(x,y,z) = 6 + 2(x-1) - 4(y-2) + 6(z-3)$.

f) ☐ La linealización de f en $(1,2,3)$ coincide con el polinomio de Taylor de grado 1 de f alrededor de $(1,2,3)$.

g) ☐ A partir del punto $(1,2,3)$ los valores de f disminuyen más rápidamente en la dirección del vector $(-1,2,-3)$.

h) ☐ La integral de línea $\int_C \nabla f(x,y,z) \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de una curva suave cerrada y simple C incluida en el dominio de f puede no ser 0, dependiendo de la curva C.

92. Indique en cada caso si la afirmación dada es verdadera (V) o falsa (F), **justificando** su respuesta.

a) ☐ La derivada direccional en un punto P de una función f diferenciable, en la dirección de un vector $\mathbf{u}$, se puede calcular como $D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}$.

b) ☐ Si todas las derivadas direccionales de una función f están definidas en un punto P del dominio de f, entonces f es diferenciable en P.

c) ☐ Para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por $f(0,0) = 0$ y $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, se cumple $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

d) ☐ Para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por $f(0,0) = 0$ y $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, se cumple $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

e) ☐ Si f es una función diferenciable en (a,b,c), entonces $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c)$.

f) ☐ La función f dada por $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ tiene un mínimo absoluto en el punto $(0,0,0)$.

g) ☐ Si (a,b,c) es un punto del dominio de f y f tiene derivadas parciales continuas en (a,b,c), entonces la linealización de f en (a,b,c) da una buena aproximación de f en un entorno de (a,b,c).

h) ☐ La derivada direccional en un punto P de una función f diferenciable, se anula en la dirección opuesta a la dirección del gradiente de f en P.

i) ☐ Sea la función vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ definida en $[a,b]$ una representación paramétrica de una curva suave y sea f un campo escalar definido en $\mathbb{R}^3$. Si f presenta un valor extremo en un punto (a,b,c), entonces el gradiente de f en (a,b,c) es normal a la derivada $\mathbf{r}'(t)$.

j) $\square$ Si f es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y en el punto (a,b) se tiene $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$, necesariamente f presenta en dicho punto un extremo o un punto de silla.

k) $\square$ Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ entonces $f(a,b) = L$.

l) $\square$ Si f es una función diferenciable en un punto P, las derivadas cruzadas de segundo orden en P coinciden.

m) $\square$ Supongamos que F es una función que tiene al punto (a,b,c) en su dominio y que $F_x(a,b,c) = F_y(a,b,c) = 0$. Entonces, si S es la superficie de nivel de F que contiene al punto (a,b,c), necesariamente existe una recta normal a S que pasa por (a,b,c).

n) $\square$ Si una función f está definida en $\mathbb{R}^2$ y es continua en (a,b), entonces es diferenciable en (a,b).

ñ) $\square$ Sea $f(x,y)$ una función diferenciable en D que tiene 2 máximos relativos en D, entonces debe tener por lo menos un mínimo relativo en D.

o) $\square$ Sea (a,b) un punto del dominio de f tal que $\nabla f(a,b) = (0,0)$; si en (a,b) f presenta un máximo, éste es máximo absoluto de f.

p) $\square$ Si en el punto (a,b,c), se tiene que $F_x(a,b,c) = F_y(a,b,c) = 0$, en dicho punto la función F presenta un extremo relativo o un punto de silla.

q) $\square$ La función f dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$ tiene un mínimo relativo y absoluto en el punto $(0,0)$.

r) $\square$ Si (a,b,c) es un punto del dominio de f y f tiene derivadas parciales en (a,b,c), entonces la linealización de f en (a,b,c) está definida por $L(x,y,z) = f(a,b,c) + f_x(a,b,c)(x-a) + f_y(a,b,c)(y-b) + f_z(a,b,c)(z-c)$.

s) $\square$ Sea f una función diferenciable en un punto P. El valor de f en un punto Q cercano a P es aproximadamente igual al valor de la diferencial de f en el punto P, evluada en Q.

Selección: 2 3 4 5c 7abcd 8 10b 11a 13ac 14 15 16 17b 20abc 21b 23 24 29 30 34 36a 38 41 43 45 48 49 50 51 56 58abc 60 61 63 64 68 70