

Trabajo Práctico 4

PARTE A: Integrales de Línea

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro “Cálculo de varias variables” de Thomas, décimosegunda edición, Ed. Pearson.

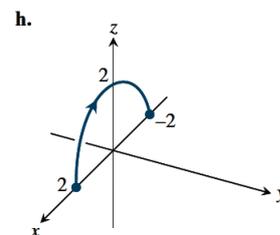
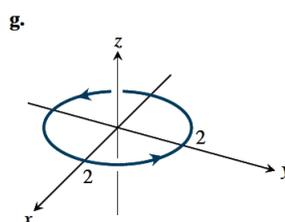
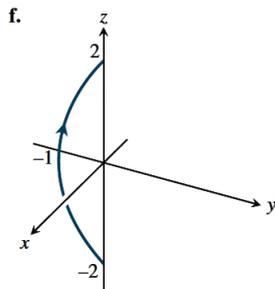
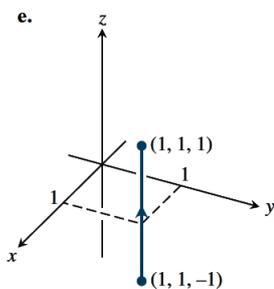
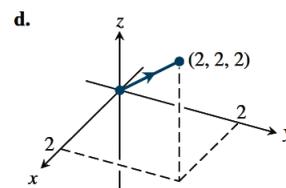
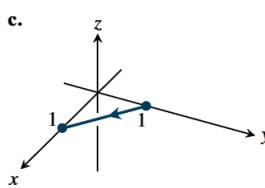
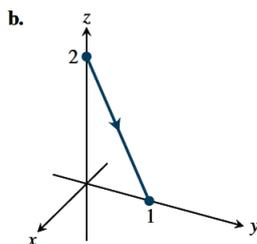
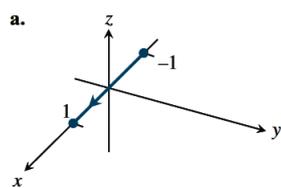
$$\int_C f(x, y, z) dr = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad \text{Integral de línea de campo escalar}$$

$$\int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad \text{Integral de línea de campo vectorial}$$

Curvas

1. Relacione la ecuaciones vectoriales con los gráficos dados:

- a) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1.$
- b) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, -1 \leq t \leq 1.$
- c) $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi.$
- d) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}, -1 \leq t \leq 1.$
- e) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2.$
- f) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + (2-2t)\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1.$
- g) $\mathbf{r}(t) = (0, t^2 - 1, 2t), -1 \leq t \leq 1.$
- h) $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 0, 2 \sin t), 0 \leq t \leq \pi.$



Integrales de línea de campos escalares

2. Calcule:

a) $\int_C (x + y) ds$, donde C es el segmento de recta $\mathbf{r}(t) = (t, 1 - t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$.

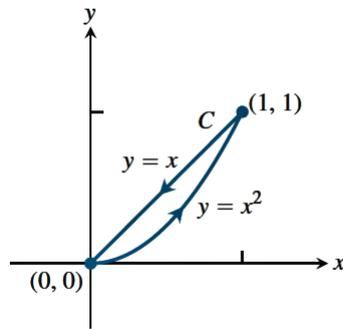
b) $\int_C (xy + y + z) ds$, donde C es el segmento de recta $\mathbf{r}(t) = (2t, t, 2 - 2t)$, $0 \leq t \leq 1$.

c) $\int_C x ds$, donde C es el segmento de recta $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{t}{2})$, $0 \leq t \leq 4$.

d) la integral de $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{3}}{x^2 + y^2 + z^2}$ sobre la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (t, t, t)$, $1 \leq t \leq \infty$.

e) la integral de $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$, sobre la trayectoria que va de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$, por $C = C_1 \cup C_2$, con $C_1: \mathbf{r}_1(t) = (t, t^2, 0)$, $0 \leq t \leq 1$ y $C_2: \mathbf{r}_2(t) = (1, 1, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

f) $\int_C (x + \sqrt{y}) ds$, donde C está dada en la figura.



g) la integral de $f(x, y, z) = -\sqrt{x^2 + z^2}$, sobre la circunferencia $C: \mathbf{r}(t) = (0, a \cos t, a \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

h) la integral de línea de $f(x, y) = ye^{x^2}$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j}$, $-1 \leq t \leq 2$.

i) $\int_C f(x, y) ds$ donde $f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{x}$ y C viene dada por $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^4\mathbf{j}$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

j) la integral de $f(x, y) = x^2 - y$ sobre la parte de C dada por $x^2 + y^2 = 4$ en el primer cuadrante, desde $(0, 2)$ hasta $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

k) el área de uno de los lados de la “pared” que es ortogonal a la curva $2x + 3y = 6$, $0 \leq x \leq 6$, y está sobre la curva y bajo la superficie $f(x, y) = 4 + 3x + 2y$.

3. Un alambre curvo de densidad $\delta(x, y, z) = 15\sqrt{y + 2}$ está colocado sobre la curva $C: \mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $-1 \leq t \leq 1$.

a) Calcule la masa del alambre.

b) Calcule el centro de masa del alambre.

c) Represente el alambre y su centro de masa juntos.

4. Encuentre la masa de un alambre delgado, colocado a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t, \sqrt{2}t, 4 - t^2)$, $0 \leq t \leq 1$, si la densidad es $\delta = 3t$.

Campos vectoriales, Gradientes e Integrales de Campos Vectoriales

5. Represente gráficamente cada uno de los siguientes campos vectoriales en \mathbb{R}^2 .

- $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$
- $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$
- $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} - \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$

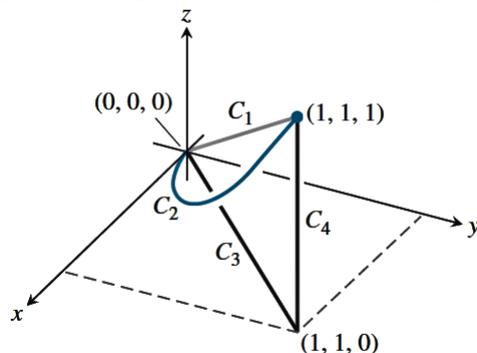
6. Determine el campo gradiente generado por:

- $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$
- $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $g(x, y, z) = e^z - \ln(x^2 + y^2)$
- $g(x, y, z) = xy + yz + xz$

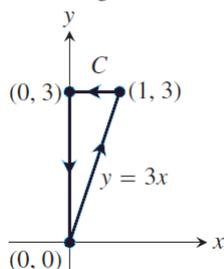
7. Encuentre las integrales de línea de \mathbf{F} desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ sobre cada una de las siguientes trayectorias (vea la figura), donde $\mathbf{F}(x, y, z)$ viene dado por

- $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$

- La trayectoria es el segmento C_1 que va de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$.
- La trayectoria C_2 , dada por $\mathbf{r}_2(t) = (t, t^2, t^4)$, $0 \leq t \leq 1$.
- La trayectoria $C_3 \cup C_4$, donde C_3 es el segmento de recta desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 0)$ y C_4 , el segmento de recta desde $(1, 1, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$.



8. Evalúe: $\int_C \sqrt{x+y} dx$, sobre la trayectoria que muestra la figura:



9. Calcule las siguientes integrales a lo largo de la curva C dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, -\cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

- a) $\int_C xz \, dx$
- b) $\int_C xz \, dy$
- c) $\int_C xz \, dz$

10. Dado el campo vectorial \mathbf{F} de la figura 1 (abajo):

- a) Si C es una circunferencia unitaria centrada en el origen recorrida en sentido antihorario, la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ¿es positiva, negativa o nula? (Debe responder sin hacer cálculos).
- b) Marque en el gráfico una curva suave C_1 tal que $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sea nula.

11. Sea \mathbf{F} dado por el gráfico de la figura 2 (abajo). Indique si cada una de las integrales de línea de \mathbf{F} a lo largo de C_1 y C_2 es positiva, nula o negativa.

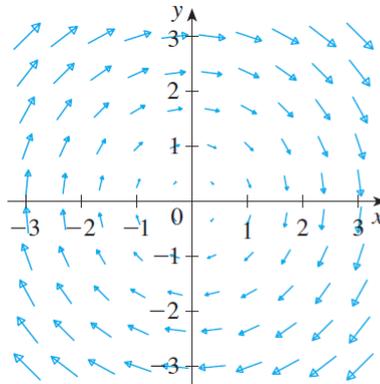


figura 1

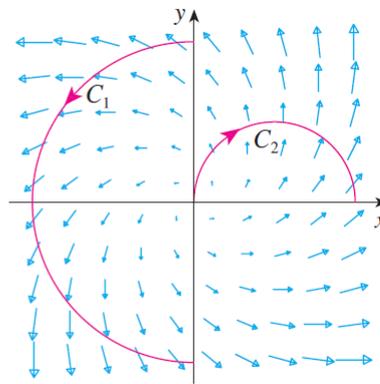
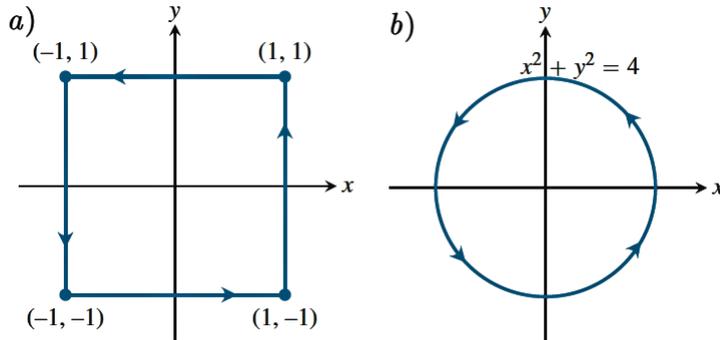


figura 2

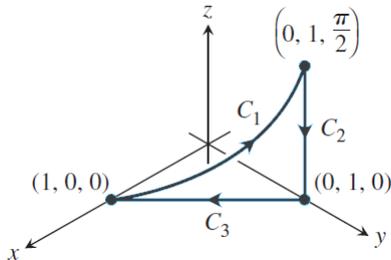
- 12. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F} = (xy, y, -yz)$ a lo largo de $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t)$, $0 \leq t \leq 1$, cuando t crece.
- 13. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F} = (z, x, y)$ a lo largo de $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, cuando t crece.
- 14. Evalúe: $\int_C (x - y)dx + (x + y)dy$, sobre la trayectoria en sentido contrario a las manecillas del reloj, a lo largo del triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.
- 15. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (xy, y - x)$ en la trayectoria recta desde $(1, 1)$ hasta $(2, 3)$.
- 16. Calcule la circulación y el flujo de los campos $\mathbf{F}_1(x, y) = (x, y)$ y $\mathbf{F}_2(x, y) = (-y, x)$ alrededor y a través hacia fuera de las curvas C_1 y C_2 , dadas respectivamente por $\mathbf{r}_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y $\mathbf{r}_2(t) = (\cos t, 4 \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- 17. Calcule el flujo del campo de velocidades $\mathbf{F} = (x + y, -x^2 - y^2)$ a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias desde $(1, 0)$ hasta $(-1, 0)$ en el plano xy :
 - a) la parte superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$;
 - b) el segmento de recta desde $(1, 0)$ hasta $(-1, 0)$;
 - c) el segmento de recta desde $(1, 0)$ hasta $(0, -1)$, seguido por el segmento de recta desde $(0, -1)$ hasta $(-1, 0)$.

18. Obtenga la circulación del campo $\mathbf{F} = (y, x + 2y)$ alrededor de cada una de las siguientes trayectorias cerradas:



c) Use una trayectoria diferente de las de los incisos *a* y *b*, que sea cerrada y simple.

19. Trace el campo radial dado por $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ junto con sus componentes horizontales y verticales, en un conjunto representativo de puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
20. Trace el campo de rotación dado por $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}$ junto con sus componentes horizontales y verticales en un conjunto representativo de puntos del disco $x^2 + y^2 = 4$.
21. Encuentre un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ en el plano xy con la propiedad de que en cada punto $(x, y) \neq (0, 0)$, \mathbf{F} sea un vector unitario que apunta hacia el origen. (El campo no está definido en el origen.)
22. Calcule la circulación de $\mathbf{F} = (2x, 2z, 2y)$ a lo largo de la curva C que es la unión de $C_1: \mathbf{r}_1(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $C_2: \mathbf{r}_2(t) = (0, 1, (\frac{\pi}{2})(1-t))$, $0 \leq t \leq 1$ y $C_3: \mathbf{r}_3(t) = (t, (1-t), 0)$, $0 \leq t \leq 1$.



Campos conservativos

23. ¿Cuáles de los siguientes campos son conservativos? En caso de serlo halle la función potencial.
- a) $\mathbf{F} = (y \operatorname{sen} z, x \operatorname{sen} z, xy \cos z)$
- b) $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
- c) $\mathbf{F} = (y + z, x + z, x + y)$
24. Encuentre una función potencial para el campo vectorial $\mathbf{F} = e^{y+2z}(\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2x\mathbf{k})$.
25. Encuentre una función potencial para el campo vectorial

$$\mathbf{F} = \frac{y}{1+x^2y^2}\mathbf{i} + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}} + \frac{1}{z} \right)\mathbf{k}$$

26. Compruebe que el integrando es una forma diferencial exacta y calcule la integral.

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xydx + (x^2 - z^2)dy - 2yzdz.$$

27. Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2, \frac{z^2}{y}, 2z \ln y)$.

- Dé el dominio de definición D de \mathbf{F} (el mayor posible, en el sentido de la inclusión). Verifique que se trata de una región abierta, conexas y simplemente conexas.
- Mediante el criterio de componentes, compruebe que $3x^2 dx + \frac{z^2}{y} dy + 2z \ln y dz$ es una forma diferencial exacta en D .
- Encuentre una función potencial para \mathbf{F} .
- Evalúe la integral de línea de \mathbf{F} desde el punto $(1, 1, 1)$ hasta el punto $(1, 2, 3)$, por algún camino.

28. Demuestre que el valor de la integral $\int_A^B z^2 dx + 2y dy + 2xz dz$ no depende de la trayectoria desde A hasta B , con A y B , puntos en \mathbb{R}^3 .

29. Determine el trabajo realizado por $\mathbf{F} = (x^2 + y, y^2 + x, ze^z)$ para las siguientes trayectorias desde $(1, 0, 0)$ hasta $(1, 0, 1)$:

- El segmento de recta $x = 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1$.
- La hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, (\frac{t}{2\pi}))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- El eje x desde $(1, 0, 0)$ hasta $(0, 0, 0)$, seguido de la parábola $z = x^2, y = 0$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 0, 1)$.

30. Sea $\mathbf{F} = \nabla f$, con $f(x, y) = x^3 y^2$, y sea C la trayectoria en el plano xy , que va desde $(-1, 1)$ hasta $(1, 1)$, y que consiste en el segmento de recta desde $(-1, 1)$ hasta $(0, 0)$, seguido del segmento de recta desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$. Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de dos maneras:

- Encuentre parametrizaciones para los segmentos que forman a C y evalúe la integral.
- Use f como una función potencial para \mathbf{F} .

Aplicaciones

31. Demuestre que el trabajo realizado por un campo de fuerza constante $\mathbf{F} = (a, b, c)$ al mover una partícula a lo largo de cualquier trayectoria desde A hasta B es $W = \mathbf{F} \cdot \overline{AB}$.

32. a) Encuentre una función potencial para el campo gravitacional

$$\mathbf{F} = -GmM \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

(G, m y M son constantes).

- Sean P_1 y P_2 puntos que se encuentran a distancias s_1 y s_2 desde el origen. Demuestre que el trabajo realizado por el campo gravitacional del inciso anterior, para mover una partícula desde P_1 hasta P_2 , es

$$GmM \left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} \right).$$

33. En algunas ramas de las ciencias naturales, como climatología, mecánica de fluidos, magnetismo, es usual encontrarse con campos vectoriales que representen fuentes de energía, sumideros, vórtices, y combinaciones de los anteriores. Es por ello que resulta de gran interés contar con modelos matemáticos que permitan estudiar estos fenómenos de manera adecuada.

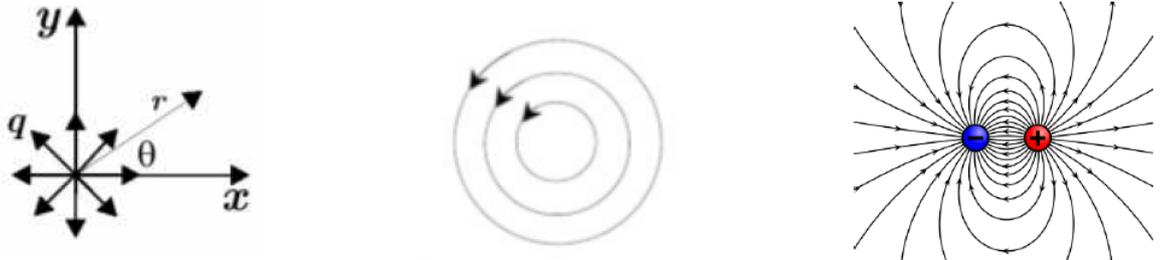


Figura 1. Fuente, vórtice y dipolo (superposición de fuente y sumidero separados una distancia dada).

Para modelar una fuente bidimensional consideramos un campo vectorial que a cada punto del plano le asigne el vector posición de dicho punto, es decir:

$$\mathbf{F}_1(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Para modelar un vórtice en sentido anti horario, tomamos un campo que a cada punto del plano le asigne su vector posición, pero rotado 90° en sentido anti horario:

$$\mathbf{F}_2(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

- Calcule la circulación del campo fuente \mathbf{F}_1 a lo largo de la curva C_1 , que es el cuarto de circunferencia con centro en el origen y radio $r = 2$ en el primer cuadrante (en sentido anti horario). Interprete el resultado.
 - Calcule la circulación del vórtice \mathbf{F}_2 a lo largo de la curva C_2 , que es el segmento de recta en el primer cuadrante entre las circunferencias de radios $r = 1$ y $r = 4$, a 45° de inclinación con respecto al semieje x positivo. Interprete el resultado.
34. El campo eléctrico generado por un dipolo formado por dos cargas opuestas, q y $-q$, ubicadas respectivamente en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$, viene dado por

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x-1}{((x-1)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x+1}{((x+1)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{((x-1)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{((x+1)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

- Halle la función potencial electrostático V en cada punto del plano.
- Superponga un gráfico de curvas de nivel de V con un gráfico del campo vectorial \mathbf{E} . Encuentre una relación entre las líneas de flujo del campo \mathbf{E} y las líneas equipotenciales (es decir, las curvas de nivel de la función potencial V).
- Repita este ejercicio para el campo eléctrico generado por una única carga puntual (fuente).

Teorema de Green

- Verifique el teorema de Green para: $\mathbf{F} = (-y, x)$ con dominio en el disco R dado por $x^2 + y^2 \leq a^2$ y su circunferencia frontera C dada por $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con $a > 0$.
- Verifique el teorema de Green para: $\mathbf{F} = (-x^2y, xy^2)$ con dominio en el disco R dado por $x^2 + y^2 \leq a^2$ y su circunferencia frontera C dada por $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con $a > 0$.

37. Utilice el teorema de Green para calcular la circulación en sentido antihorario y el flujo hacia fuera para cada uno de los siguientes campos \mathbf{F} y curvas C .

a) $\mathbf{F} = (x^2 + 4y, x + y^2)$; C , frontera del cuadrado acotado por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$.

b) $\mathbf{F} = (xy + y^2, x - y)$; C , dada en la figura 1.

c) $\mathbf{F} = (x + 3y)\mathbf{i} + (2x - y)\mathbf{j}$; C , es la elipse dada en la figura 2.

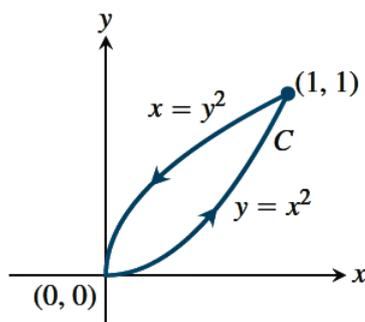


figura 1

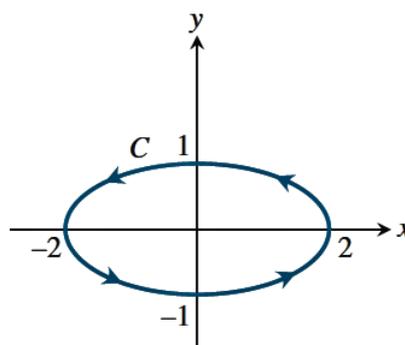


figura 2

38. Calcule la circulación en contra de las manecillas del reloj y el flujo hacia fuera del campo $\mathbf{F} = (xy, y^2)$ alrededor y sobre la frontera de la región encerrada por las curvas $y = x^2$ y $y = x$ en el primer cuadrante.

39. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = (2xy^3, 4x^2y^2)$ al mover una vez una partícula en sentido antihorario, a lo largo de curva C que es la frontera de la región en el primer cuadrante encerrada por el eje x , la recta $x = 1$ y la curva $y = x^3$.

40. Aplicando el teorema de Green calcule:

a) $\oint_C (y^2 dx + x^2 dy)$, donde C es la frontera del triángulo delimitado por $x = 0$, $x + y = 1$ e $y = 0$.

b) El área de la región encerrada por la elipse parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Recuerde que si una curva suave por partes, cerrada simple en el plano, C , encierra una región plana R , el área de R se puede hallar como $\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$.

c) El área de la región encerrada por la astroide $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

41. Sea C la frontera de una región sobre la cual se cumple el teorema de Green. Use el mismo para calcular

a) $\oint f(x) dx + g(y) dy$

b) $\oint ky dx + hx dy$, k y h son constantes.

42. Sea A el área y \bar{x} la coordenada x del centroide de la placa plana que se encuentra en la región R acotada por la curva suave por partes C , simple y cerrada en el plano xy . Demuestre que

$$\frac{1}{2} \oint_C x^2 dy = - \oint_C xy dx = \frac{1}{3} \oint_C x^2 dy - xy dx = A\bar{x}.$$

43. Suponiendo que todas las derivadas necesarias existen y son continuas, demuestre que si $f(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace

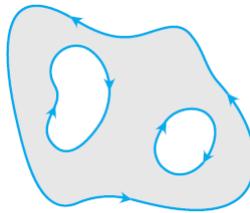
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

entonces

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0$$

para todas las curvas cerradas C , a las cuales se aplica el teorema de Green.

44. El teorema de Green se cumple para una región R con un número finito de agujeros, siempre que las curvas de la frontera sean simples cerradas y suaves, y que integremos sobre cada componente de la frontera en la dirección en que R se mantiene a izquierda mientras avanzamos.



- a) Sean $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ y C la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Evalúe la integral de flujo

$$\oint_C \nabla f \cdot \mathbf{n} ds.$$

- b) Sea K una curva arbitraria suave simple cerrada en el plano, que no pase por el punto $(0, 0)$. Utilice el teorema de Green para demostrar que

$$\oint_K \nabla f \cdot \mathbf{n} ds$$

tiene dos posibles valores, dependiendo de que $(0, 0)$ esté adentro o afuera de K .

Ejercicios tomados en exámenes

45. Enuncie en forma completa y demuestre el Teorema de Green (un caso particular).
46. Dados el campo escalar $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ y el campo vectorial $\mathbf{F} = \nabla f$, indique justificando cada respuesta:
- cuáles son los dominios de f y \mathbf{F} .
 - Calcule la integral $\int_C \nabla f \cdot \mathbf{T} ds$ donde C es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ recorrida en sentido positivo.
 - Indique si \mathbf{F} es o no conservativo en su dominio.
47. a) Calcule el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$ a lo largo de la curva C que es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $x + y + z = 1$.
- b) Indique, justificando su respuesta, si el campo vectorial \mathbf{F} es o no conservativo.

c) Halle la divergencia de \mathbf{F} en el punto $(0, 0, 0)$ e interprete.

48. Sea $f(x, y, z) = x - y^2 - z^2$ una función que representa la densidad de un material en cada punto del alambre fino cuyos puntos se encuentran sobre la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (t + 1, \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$. Calcule la masa del mismo.

Selección de ejercicios: 1, 2afk, 5ad, 6ab, 7ac, 8, 11, 12, 18, 23, 26, 35, 37ac, 39.