Ecuaciones diferenciales ordinarias

EDO de primer orden

12 de mayo de 2020

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales
2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Modelos

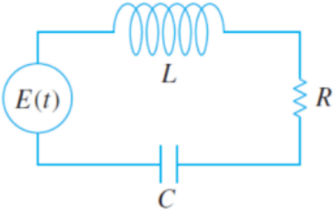
$P(t)$: población en t

Malthus 1798

$$P'(t) = kP(t)$$

Modelos

$$T(t): \text{ temperatura en } t$$
$$T_m: \text{ temperatura del medio}$$
$$T'(t) = k(T(t) - T_m)$$



a) Circuito en serie- *LRC*

$q(t)$: carga, $\quad i(t) = \frac{dq}{dt}(t)$: corriente.

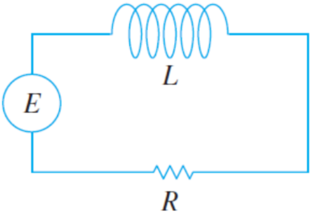
Caídas de potencial: $\quad Li'(t); \quad iR; \quad \frac{1}{C}q(t);$

Segunda Ley de Kirchoff: $E(t) = Li'(t) + iR + \frac{1}{C}q(t)$

$$E(t) = Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t)$$

EJEMPLO 7 **Circuito en serie**

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i, si la corriente inicial es cero.



$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

FIGURA 3.1.7 Circuito en serie *LR*.

Definición

Definición

Se llama ecuación diferencial a la ecuación que contiene derivadas de una o más funciones (variables dependientes) con respecto a una o más variables independientes.

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I.

Ejemplo

- La función $y(x) = -7e^{4\sqrt{x}}$ es una solución explícita de la ecuación diferencial $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = 2y$, en el intervalo $(0, \infty)$.
- $y = xe^y + 5$ es una solución implícita de $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{1+xe^y}$ en el intervalo $(8, +\infty)$.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la solución general de la ecuación es una expresión paramétrica tal que toda solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Distinguir dominio de definición de la función f en cuanto solución y como función.

Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $y' = -\frac{x}{y}$.

Ejemplo 2: dada la ed $y' = x\sqrt{y}$, una familia uniparamétrica de soluciones de la misma es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$. Verificar que $y(x) = 0$ también es solución (singular).

Ejemplo 3: dada la ed $xy' + y = 0$, una solución es $y = \frac{1}{x}$. Estudiar el dominio.

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 5\frac{dy}{dx} - 4y - x^2$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = f(x, y, y', y'', y^{(3)})$$

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

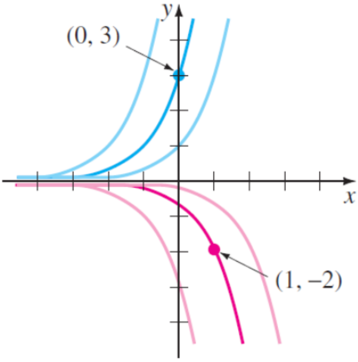
Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

$$y_1(x) = 3\, e^x,$$

$$y_2(x) = -\tfrac{2}{e}\, e^x$$



Soluciones de los dos PVI.

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1\cos(4x) + c_2\operatorname{sen}(4x)$$

$$-2 = C_1\cos(2\pi) + C_2\operatorname{sen}(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

$$y'(x) = -4C_1\operatorname{sen}(4x) + 4C_2\cos(4x)$$

$$1 = -4C_1\operatorname{sen}(2\pi) + 4C_2\cos(2\pi)$$

$$C_2 = \tfrac{1}{4}$$

$$y(x) = -2\cos(4x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)$$

PVI

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
Además $y(x) = 0$ es solución singular de la ED.
Soluciones del PVI:

$$y(x) = \frac{1}{16}x^4 \qquad\qquad y(x) = 0$$

Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Teorema (Teorema de existencia y unicidad de solución para PVI de primer orden)

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, y sea (x_0, y_0) un punto interior a R. Si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son cotinuas en R, entonces existe un intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$ y existe una única función y definida en I que es solución del problema con valores iniciales (1).

SIN DEMOSTRACIÓN

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Ejemplo 1: $y' = \operatorname{sen}(x + y)$

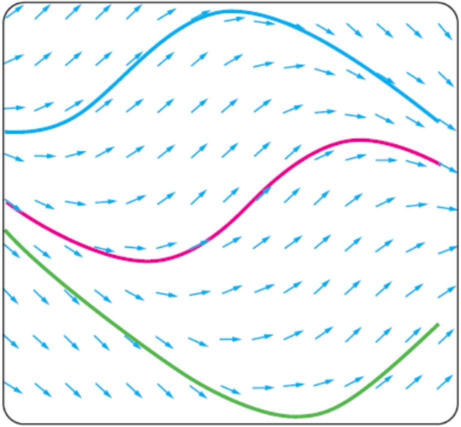
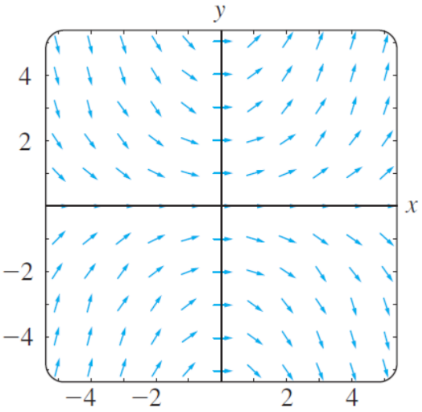
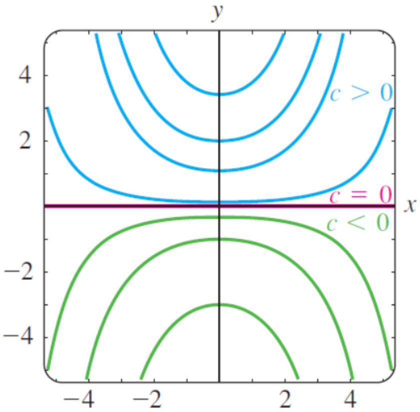


FIGURA 2.1.2 Las curvas solución siguen el flujo de un campo direccional.

Ejemplo 2:



a) Campo direccional para $dy/dx = 0.2xy$.



b) Algunas curvas solución en la familia $y = ce^{0.1x^2}$.

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \qquad \textit{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \rightarrow \quad (1+x)dy = y\,dx \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x}y$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \qquad donde \;\; h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea H una primitiva de h: $H' = h$.

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

$$H(y(x)) = \int g(x)dx + C$$

En la práctica: $h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$, o sea $h(y)dy = g(x)dx$, e integrar ambos miembros:

$$H(y) = \int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Ejemplos

Ejemplo 1: $\quad y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como $y^2\,dy = (x-5)dx$ y luego

$$\int y^2\,dy = \int (x-5)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + C$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} - 15x + k}$$

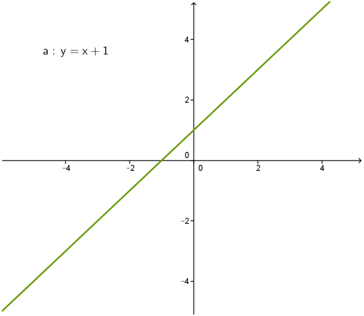
Ejemplos

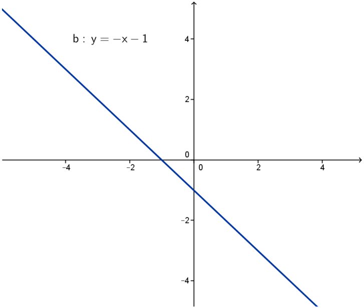
Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad donde\ C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad en\ \mathbb{R} \qquad y = -C(x+1) \qquad en\ \mathbb{R}$$





Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

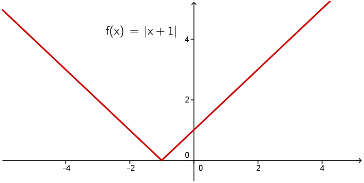
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

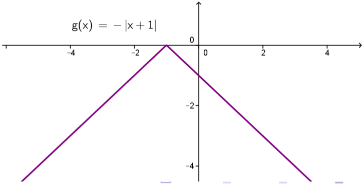
$$|y| = C\,|x+1| \qquad donde\ C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad en\ \mathbb{R} \qquad y = -C(x+1) \qquad en\ \mathbb{R}$$

$$y = C\,|x+1| \qquad en\ ... \qquad y = -C\,|x+1| \qquad en\ ...$$

$$I = (-\infty, -1) \quad o \quad I = (-1, \infty)$$





Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad donde\ C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad en\ \mathbb{R} \qquad y = -C(x+1) \qquad en\ \mathbb{R}$$

$$y = C\,|x+1| \qquad en\ ... \qquad y = -C\,|x+1| \qquad en\ ...$$

$$I = (-\infty, -1) \quad o \quad I = (-1, \infty)$$

$$y = 0(x+1) = 0 \qquad en\ \mathbb{R}$$

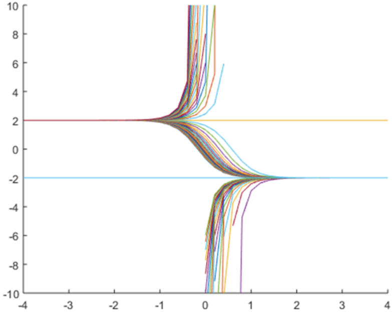
$$y = k(1+x) \qquad en\ \mathbb{R}; \qquad k \in \mathbb{R}$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad \frac{1}{y^2 - 4} dy = dx$$

$$y = 2\frac{ke^{4x} + 1}{1 - ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R}; \;\; \text{si } k > 0,\; x \neq \frac{1}{4} \ln \frac{1}{k}$$

$$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2; \quad y \equiv -2 \text{ es solución singular.}$$



Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5 \qquad\qquad y' + y = x$$

FORMA ESTÁNDAR:

$$y' + P(x)y = f(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

que felizmente resulta ser separable: $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C \qquad y(x)e^{\int P(x)\,dx} = \int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

Ejemplos

Ejemplo 1:

$$xy'(x) + y(x) = x^4 \ln(x)$$

Ejemplo 2:

EJEMPLO 7 **Circuito en serie**

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i, si la corriente inicial es cero.

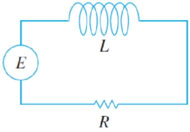


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie LR.

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \qquad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12; \; i(0) = 0.$$

$$\begin{cases} i' = f(t, i) \\ i(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t} \qquad i(0) = 0 \Rightarrow c = -\frac{6}{5} \Rightarrow i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$$

Definición

Definición

Una ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ o $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Una condición suficiente para que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ sea una forma diferencial exacta,en una región abierta, conexa y simplemente conexa, es

$$N_x = M_y$$

Criterio de los componentes para determinar si $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ es exacta

La forma diferencial $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ es exacta en un dominio conexo y simplemente conexo si y sólo si,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Esto equivale a decir que el campo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo.

Definición

Una ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ o $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Para encontrar su solución tenemos en cuenta la definición:

DEFINICIONES Cualquier expresión $M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$ es una **forma diferencial**. Una forma diferencial es **exacta** en un dominio D en el espacio si

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

para alguna función escalar f a través de D.

Método

Dada una edo exacta, $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x, y) = C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \qquad y \qquad \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = N(x, y),$$

$S(x, y) = C$ será una solución implícita de la ED es decir, si S es una función potencial del campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$.

LA SOLUCIÓN DE LA ED ES $S(x, y) = C$.

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1 - x^2)}$$

$$S(x, y) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1 - x^2)}{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1 - x^2)}{2} = C$$

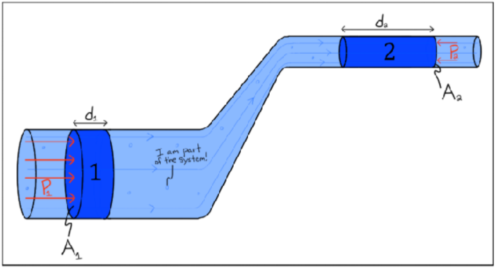
Ejemplo

$$\begin{cases} -y\,\mathrm{sen}(x) - 4 + \cos(x)y' = 0 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

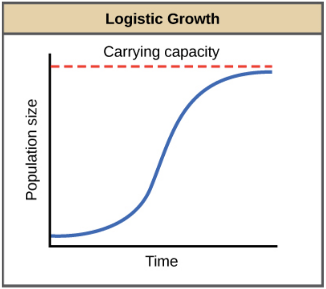
Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)y^n(x)$$



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$



$$\frac{dN}{dT} = r_{max}\frac{(K-N)}{K}N$$

Sustitución sugerida: $v = y^{1-n}$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{(y(x))^3} = (y(x))^{-3} \qquad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dad por $-3y^{-4}$ y hacemos la sustitución

$$v' + 3v = -3$$

Esta ecuación diferencial que obtenemos es lineal, al resolverla obtenemos:

$$v(x) = -1 + Ce^{3x}$$

$$y^{-3}(x) = -1 + Ce^{3x} \qquad \to \qquad y^3(x) = \frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}$$

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}}$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

$$-v' + \frac{v}{x} = x \qquad v' - \frac{v}{x} = -x \qquad \mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c \qquad v = -x^2 + cx = \frac{1}{y} \qquad y = \frac{1}{-x^2 + cx}$$