

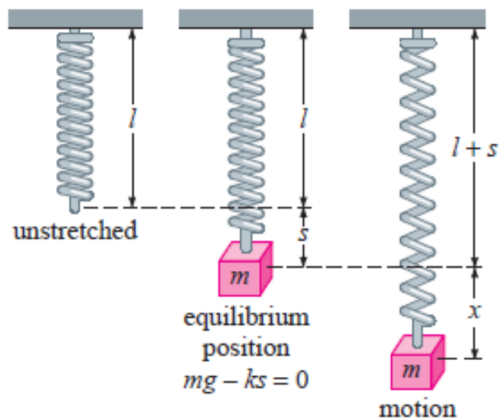
# Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

## Facultad de Ingeniería

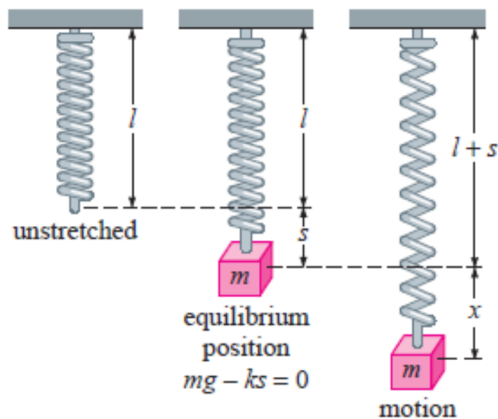
- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
  - PVI y PVF
  - Dependencia e independencia lineal de soluciones
  - Teorema solución general e.d. lineal homogénea
  - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
  - Teoremas
  - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
    - Método de los coeficientes indeterminados
    - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
  - PVI y PVF
  - Dependencia e independencia lineal de soluciones
  - Teorema solución general e.d. lineal homogénea
  - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
  - Teoremas
  - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
    - Método de los coeficientes indeterminados
    - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte

# Movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



# Movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

$$F = ma = F_r + P$$

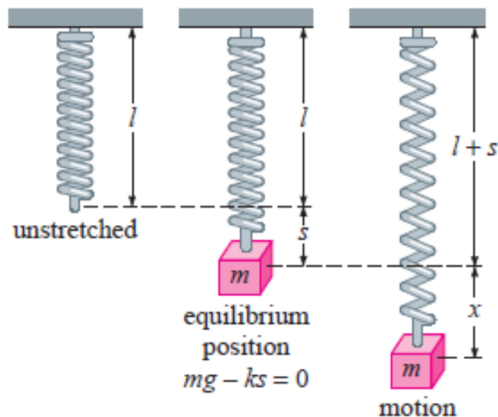
$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

# Movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte.



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

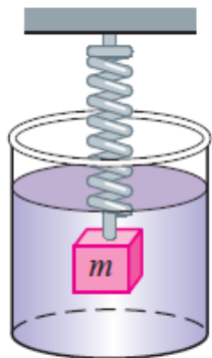
$$F = ma = F_r + P$$

$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

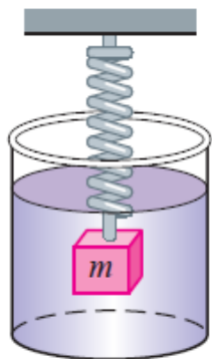
$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

# Movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



# Movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



$\beta > 0$ : constante de amortiguamiento.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

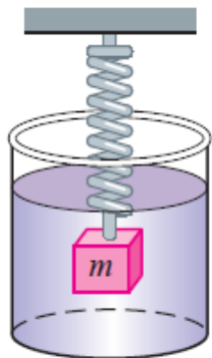
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2x = 0$$



# Movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte.



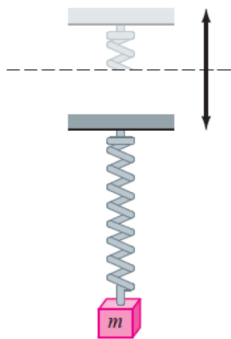
$\beta > 0$ : constante de amortiguamiento.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

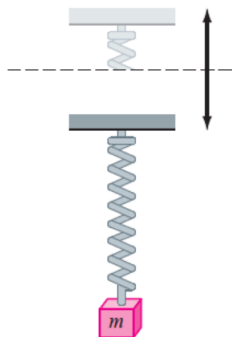
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2x = 0$$

# Movimiento forzado en un sistema masa-resorte



# Movimiento forzado en un sistema masa-resorte



$f(t)$ : fuerza externa.

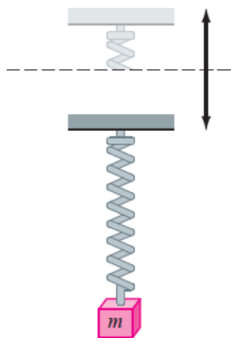
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = f(t)$$

# Movimiento forzado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento forzado en un sistema masa-resorte.



$f(t)$ : fuerza externa.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = f(t)$$

# Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

# Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos:  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  continuas en un intervalo abierto  $I$ .  $P(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

# Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos:  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  continuas en un intervalo abierto  $I$ .  $P(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama **homogénea** y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama **no homogénea** si  $G(x) \neq 0$  para alguna  $x \in I$ .

# Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos:  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  continuas en un intervalo abierto  $I$ .  $P(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama **homogénea** y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama **no homogénea** si  $G(x) \neq 0$  para alguna  $x \in I$ .

La **ecuación homogénea asociada** a

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

es

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0.$$



- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
  - PVI y PVF
  - Dependencia e independencia lineal de soluciones
  - Teorema solución general e.d. lineal homogénea
  - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
  - Teoremas
  - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
    - Método de los coeficientes indeterminados
    - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
  - PVI y PVF
  - Dependencia e independencia lineal de soluciones
  - Teorema solución general e.d. lineal homogénea
  - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
  - Teoremas
  - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
    - Método de los coeficientes indeterminados
    - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte

# Existencia de solución única a un PVI

*Resuelva:* 
$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1)$$

*Sujeta a:* 
$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

## TEOREMA 4.1.1 Existencia de una solución única

Sean  $a_n(x)$ ,  $a_{n-1}(x)$ ,  $\dots$ ,  $a_1(x)$ ,  $a_0(x)$  y  $g(x)$  continuas en un intervalo  $I$ , y sea  $a_n(x) \neq 0$  para toda  $x$  en este intervalo. Si  $x = x_0$  es cualquier punto en este intervalo, entonces una solución  $y(x)$  del problema con valores iniciales (1) existe en el intervalo y es única.

Sin demostrar.

# Problema con valores en la frontera

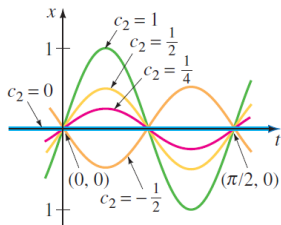
Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general

## Problema con valores en la frontera

Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general  
 $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$ .

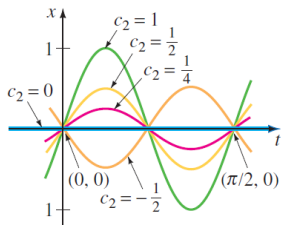
# Problema con valores en la frontera

Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general  
 $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$ .



## Problema con valores en la frontera

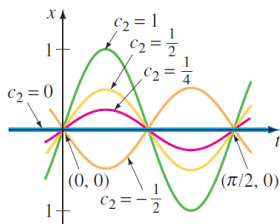
Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general  
 $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$ .



a)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0$ .

# Problema con valores en la frontera

Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general  
 $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$ .

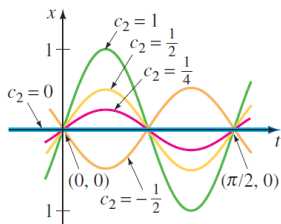


- a)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0$ .  
 $x(0) = c_1 + 0 = 0$ ;



# Problema con valores en la frontera

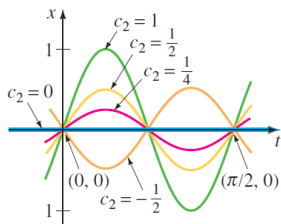
Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general  
 $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$ .



- a)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0$ .  
 $x(0) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$ ;

# Problema con valores en la frontera

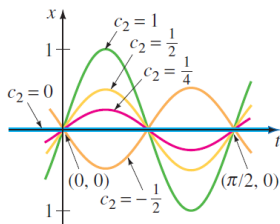
Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general  
 $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$ .



- a)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0$ .  
 $x(0) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(t) = c_2 \sin(4t)$ .

# Problema con valores en la frontera

Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general  
 $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$ .

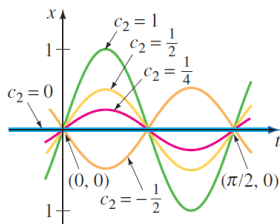


- a)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0$ .      b)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0$ .  
 $x(0) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(t) = c_2 \sin(4t)$ .

Tiene infinitas  
soluciones.

# Problema con valores en la frontera

Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general  
 $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$ .

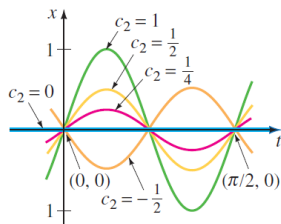


- a)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0$ .  
 $x(0) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(t) = c_2 \sin(4t)$ .
- b)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0$ .  
 $x(0) = c_1 + 0 = 0$ ;

Tiene infinitas  
soluciones.

# Problema con valores en la frontera

Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general  
 $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$ .



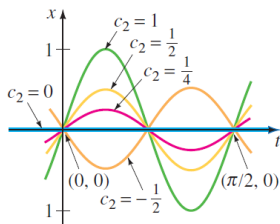
- a)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0$ .  
 $x(0) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(t) = c_2 \sin(4t)$ .
- b)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0$ .  
 $x(0) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0$ .

Tiene infinitas  
soluciones.

# Problema con valores en la frontera

Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general

$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$ .



a)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$

$$x(0) = c_1 + 0 = 0;$$

$$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$$

$$x(t) = c_2 \sin(4t).$$

Tiene infinitas  
soluciones.

b)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0.$

$$x(0) = c_1 + 0 = 0;$$

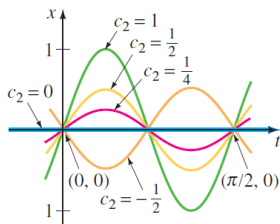
$$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$$

Tiene solución única  
 $x \equiv 0.$

# Problema con valores en la frontera

Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$



a)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$

$$x(0) = c_1 + 0 = 0;$$

$$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$$

$$x(t) = c_2 \sin(4t).$$

Tiene infinitas  
soluciones.

b)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0.$

$$x(0) = c_1 + 0 = 0;$$

$$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$$

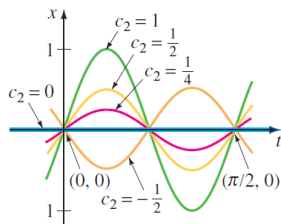
Tiene solución única  
 $x \equiv 0.$

c)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1.$

# Problema con valores en la frontera

Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$



a)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$

$$x(0) = c_1 + 0 = 0;$$

$$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$$

$$x(t) = c_2 \sin(4t).$$

Tiene infinitas  
soluciones.

b)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0.$

$$x(0) = c_1 + 0 = 0;$$

$$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$$

Tiene solución única  
 $x \equiv 0.$

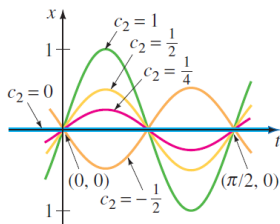
c)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1.$

$$x(0) = c_1 + 0 = 0;$$



# Problema con valores en la frontera

Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general  
 $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$ .



a)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0$ .  
 $x(0) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(t) = c_2 \sin(4t)$ .

Tiene infinitas  
soluciones.

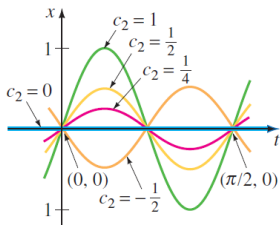
b)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0$ .  
 $x(0) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0$ .

Tiene solución única  
 $x \equiv 0$ .

c)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1$ .  
 $x(0) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1$ ;

# Problema con valores en la frontera

Ejemplo:  $x''(t) + 16x(t) = 0$ ; solución general  
 $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$ .



a)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0$ .  
 $x(0) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(t) = c_2 \sin(4t)$ .

Tiene infinitas  
soluciones.

b)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0$ .  
 $x(0) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0$ .

Tiene solución única  
 $x \equiv 0$ .

c)  $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1$ .  
 $x(0) = c_1 + 0 = 0$ ;  
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1$ ;

No tiene solución.

## Teorema

*Si  $y_1$  y  $y_2$  son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = 0,$$

*entonces la función  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales  $c_1$  y  $c_2$ .*

## Teorema

*Si  $y_1$  y  $y_2$  son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = 0,$$

*entonces la función  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales  $c_1$  y  $c_2$ .*

Demostrar.

## Teorema

*Si  $y_1$  y  $y_2$  son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = 0,$$

*entonces la función  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales  $c_1$  y  $c_2$ .*

Demostrar.

Observaciones:

## Teorema

*Si  $y_1$  y  $y_2$  son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = 0,$$

*entonces la función  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales  $c_1$  y  $c_2$ .*

Demostrar.

Observaciones:

- 1) La solución trivial  $y \equiv 0$  siempre es una solución de cualquier e.d. lineal homogénea.
- 2) Combinaciones lineales.

## Teorema

*Si  $y_1$  y  $y_2$  son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = 0,$$

*entonces la función  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales  $c_1$  y  $c_2$ .*

Demostramos el caso  $n = 2$ ;

## Teorema

*Si  $y_1$  y  $y_2$  son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = 0,$$

*entonces la función  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales  $c_1$  y  $c_2$ .*

Demostramos el caso  $n = 2$ ; veamos que  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  satisface la ED.



# Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

## Teorema

*Si  $y_1$  y  $y_2$  son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = 0,$$

*entonces la función  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales  $c_1$  y  $c_2$ .*

Demostramos el caso  $n = 2$ ; veamos que  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  satisface la ED. Derivando y sustituyendo en la ED:

$$y'(x) = c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x); \quad y''(x) = c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x).$$

$$\begin{aligned} a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) &= \\ &= a_2(x)(c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x)) + a_1(x)(c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x)) + a_0(x)(c_1y_1(x) + c_2y_2(x)) \\ &= c_1(a_2(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)) + c_2(a_2(x)y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
  - PVI y PVF
  - Dependencia e independencia lineal de soluciones
  - Teorema solución general e.d. lineal homogénea
  - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
  - Teoremas
  - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
    - Método de los coeficientes indeterminados
    - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte

- ① La familia de funciones  $\{f_1, \dots, f_n\}$  es **linealmente dependiente** (LD) en  $I$  sii existen  $c_1, \dots, c_n$  **no todos nulos** tales que

$$c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0$$

$$c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0, \quad t \in I.$$

- ② La familia de funciones  $\{f_1, \dots, f_n\}$  es **linealmente independiente** (LI) en  $I$  en otro caso.
- ③ Ejemplo:  $\{f_1, f_2\}$  en  $[0, 1]$ ,  $f_1(x) = x$ ;  $f_2(x) = |x|$ .

- ① La familia de funciones  $\{f_1, \dots, f_n\}$  es **linealmente dependiente** (LD) en  $I$  sii existen  $c_1, \dots, c_n$  **no todos nulos** tales que

$$c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0$$

$$c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0, t \in I.$$

- ② La familia de funciones  $\{f_1, \dots, f_n\}$  es **linealmente independiente** (LI) en  $I$  en otro caso.
- ③ Ejemplo:  $\{f_1, f_2\}$  en  $[0, 1]$ ,  $f_1(x) = x$ ;  $f_2(x) = |x|$ .  $\{f_1, f_2\}$  es LD en  $[0, 1]$ .
- ④ Mismo ejemplo en  $[-1, 1]$ .

- ① La familia de funciones  $\{f_1, \dots, f_n\}$  es **linealmente dependiente** (LD) en  $I$  si existen  $c_1, \dots, c_n$  **no todos nulos** tales que

$$c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0$$

$$c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0, \quad t \in I.$$

- ② La familia de funciones  $\{f_1, \dots, f_n\}$  es **linealmente independiente** (LI) en  $I$  en otro caso.
- ③ Ejemplo:  $\{f_1, f_2\}$  en  $[0, 1]$ ,  $f_1(x) = x$ ;  $f_2(x) = |x|$ .  $\{f_1, f_2\}$  es LD en  $[0, 1]$ .
- ④ Mismo ejemplo en  $[-1, 1]$ .  $\{f_1, f_2\}$  es LI en  $[-1, 1]$ .
- ⑤  $\{f_1, f_2, f_3\}$ ,  $f_1(x) = 1$ ;  $f_2(x) = \text{sen}^2(x)$ ;  $f_3(x) = \text{cos}(2x)$ .

- 1 La familia de funciones  $\{f_1, \dots, f_n\}$  es **linealmente dependiente** (LD) en  $I$  si existen  $c_1, \dots, c_n$  **no todos nulos** tales que

$$c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0$$

$$c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0, t \in I.$$

- 2 La familia de funciones  $\{f_1, \dots, f_n\}$  es **linealmente independiente** (LI) en  $I$  en otro caso.

- 3 Ejemplo:  $\{f_1, f_2\}$  en  $[0, 1]$ ,  $f_1(x) = x$ ;  $f_2(x) = |x|$ .  $\{f_1, f_2\}$  es LD en  $[0, 1]$ .

- 4 Mismo ejemplo en  $[-1, 1]$ .  $\{f_1, f_2\}$  es LI en  $[-1, 1]$ .

- 5  $\{f_1, f_2, f_3\}$ ,  $f_1(x) = 1$ ;  $f_2(x) = \sin^2(x)$ ;  $f_3(x) = \cos(2x)$ . No es LI (en ningún  $I \subset \mathbb{R}$ ).

## Definición

El Wronskiano de una familia  $\{f_1, \dots, f_n\}$  de  $n$  funciones derivables hasta el orden  $n - 1$  al menos, es la función dada por el determinante

$$W_{(f_1, \dots, f_n)}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

# Propiedades del Wronskiano

Si  $\{f_1, \dots, f_n\}$  es una familia LD en  $I$  y las funciones son suficientemente derivables, entonces  $W_{(f_1, \dots, f_n)}(x) = 0$  para toda  $x \in I$ .

Contrarrecíproco: si **existe una**  $x \in I$  tal que  $W_{(f_1, \dots, f_n)}(x) \neq 0$ , entonces  $\{f_1, \dots, f_n\}$  es una familia **LI** en  $I$ .



## Teorema

Sean  $y_1, y_2, \dots, y_n$  *soluciones* de la e.d.

$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$  en  $I$ . Entonces  $\{y_1, \dots, y_n\}$  es LI en  $I$  *si y solo si*  $W_{(y_1, \dots, y_n)}(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

Sin demostrar.

## Teorema

Sean  $y_1, y_2, \dots, y_n$  *soluciones* de la e.d.

$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$  en  $I$ . Entonces  $\{y_1, \dots, y_n\}$  es LI en  $I$  *si y solo si*  $W_{(y_1, \dots, y_n)}(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

Sin demostrar.

**Conjunto fundamental** de soluciones de una e.d. de orden  $n$ : una familia LI de  $n$  soluciones de la e.d. en un intervalo  $I$ .

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
  - PVI y PVF
  - Dependencia e independencia lineal de soluciones
  - **Teorema solución general e.d. lineal homogénea**
  - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
  - Teoremas
  - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
    - Método de los coeficientes indeterminados
    - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte

# Teoremas (e.d. lineal homogénea)

## Teorema (Existencia de conjunto fundamental)

*Para una ecuación  $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ , tal que cada una de las funciones coeficientes  $a_k$  es continua en un intervalo  $I$  y  $a_n(x) \neq 0$  en  $I$ , existe un conjunto fundamental de soluciones en  $I$ ,  $\{y_1, \dots, y_n\}$ .*

*(Sin demostrar.)*

## Teorema (Teorema de solución general de e.d. lineal homogénea)

*Para una ecuación  $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ , tal que cada una de las funciones coeficientes  $a_k$  es continua en un intervalo  $I$  y  $a_n(x) \neq 0$  en  $I$ , si  $\{y_1, \dots, y_n\}$  es un conjunto fundamental de soluciones de la ED en  $I$ , la solución general se puede expresar como*

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n.$$

(Se demuestra: Teorema 4.1.5)

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
  - PVI y PVF
  - Dependencia e independencia lineal de soluciones
  - Teorema solución general e.d. lineal homogénea
  - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
  - Teoremas
  - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
    - Método de los coeficientes indeterminados
    - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte

## E.d. homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

## E.d. homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \quad y'(x) = r e^{rx} \quad y''(x) = r^2 e^{rx}$$

En la e.d.:

$$ar^2 e^{rx} + br e^{rx} + c e^{rx} = 0$$

## E.d. homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \quad y'(x) = r e^{rx} \quad y''(x) = r^2 e^{rx}$$

En la e.d.:

$$ar^2 e^{rx} + br e^{rx} + c e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$



## E.d. homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \quad y'(x) = r e^{rx} \quad y''(x) = r^2 e^{rx}$$

En la e.d.:

$$ar^2 e^{rx} + br e^{rx} + c e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

### ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0$$

## E.d. homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \quad y'(x) = r e^{rx} \quad y''(x) = r^2 e^{rx}$$

En la e.d.:

$$ar^2 e^{rx} + br e^{rx} + c e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

### ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

## Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Probamos que  $y_1 = e^{r_1 x}$  y  $y_2 = e^{r_2 x}$  son soluciones de la ED (solos) y que son LI en  $I = \mathbb{R}$ :

## Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Probamos que  $y_1 = e^{r_1x}$  y  $y_2 = e^{r_2x}$  son soluciones de la ED (solos) y que son LI en  $I = \mathbb{R}$ :

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1 e^{r_1x} & r_2 e^{r_2x} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2)x} (r_2 - r_1) \neq 0.$$

## Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Probamos que  $y_1 = e^{r_1x}$  y  $y_2 = e^{r_2x}$  son soluciones de la ED (solos) y que son LI en  $I = \mathbb{R}$ :

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1 e^{r_1x} & r_2 e^{r_2x} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2)x} (r_2 - r_1) \neq 0.$$

Solución general:

$$y = c_1 e^{r_1x} + c_2 e^{r_2x}$$

es solución general de  $ay'' + by' + cy = 0$ .

## Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de  $4\frac{N}{m}$  y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente  $b$  es  $5\frac{kg}{s}$ ).

- 1 Exprese la ecuación del movimiento:



## Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de  $4\frac{N}{m}$  y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente  $b$  es  $5\frac{kg}{s}$ ).

- 1 Exprese la ecuación del movimiento:  $y'' + 5y' + 4y = 0$ .
- 2 Sabiendo que  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 0$ , interprete estas condiciones iniciales:

## Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de  $4\frac{N}{m}$  y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente  $b$  es  $5\frac{kg}{s}$ ).

- 1 Exprese la ecuación del movimiento:  $y'' + 5y' + 4y = 0$ .
- 2 Sabiendo que  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 0$ , interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
- 3 Resuelva:  $r^2 + 5r + 4 = 0$ ;

## Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de  $4\frac{N}{m}$  y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente  $b$  es  $5\frac{kg}{s}$ ).

- 1 Expresar la ecuación del movimiento:  $y'' + 5y' + 4y = 0$ .
- 2 Sabiendo que  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 0$ , interpretar estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
- 3 Resolver:  $r^2 + 5r + 4 = 0$ ;  $r_1 = -4$ ;  $r_2 = -1$ ;

## Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de  $4\frac{N}{m}$  y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente  $b$  es  $5\frac{kg}{s}$ ).

- 1 Expresar la ecuación del movimiento:  $y'' + 5y' + 4y = 0$ .
- 2 Sabiendo que  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 0$ , interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
- 3 Resuelva:  $r^2 + 5r + 4 = 0$ ;  $r_1 = -4$ ;  $r_2 = -1$ ;  
 $y(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{-t}$ ;

## Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de  $4\frac{N}{m}$  y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente  $b$  es  $5\frac{kg}{s}$ ).

- 1 Expresar la ecuación del movimiento:  $y'' + 5y' + 4y = 0$ .
- 2 Sabiendo que  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 0$ , interpretar estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
- 3 Resolver:  $r^2 + 5r + 4 = 0$ ;  $r_1 = -4$ ;  $r_2 = -1$ ;  
 $y(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{-t}$ ;  $y(0) = c_1 + c_2 = 1$ ;

## Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de  $4\frac{N}{m}$  y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente  $b$  es  $5\frac{kg}{s}$ ).

- 1 Expresar la ecuación del movimiento:  $y'' + 5y' + 4y = 0$ .
- 2 Sabiendo que  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 0$ , interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
- 3 Resuelva:  $r^2 + 5r + 4 = 0$ ;  $r_1 = -4$ ;  $r_2 = -1$ ;  
 $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$ ;  $y(0) = c_1 + c_2 = 1$ ;  
 $y'(t) = -4c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-t}$ ;

## Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de  $4\frac{N}{m}$  y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente  $b$  es  $5\frac{kg}{s}$ ).

- 1 Expresar la ecuación del movimiento:  $y'' + 5y' + 4y = 0$ .
- 2 Sabiendo que  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 0$ , interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.

- 3 Resuelva:  $r^2 + 5r + 4 = 0$ ;  $r_1 = -4$ ;  $r_2 = -1$ ;  
 $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$ ;  $y(0) = c_1 + c_2 = 1$ ;  
 $y'(t) = -4c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-t}$ ;  $y'(0) = -4c_1 - c_2 = 0$ ;

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -4c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

## Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de  $4\frac{N}{m}$  y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente  $b$  es  $5\frac{kg}{s}$ ).

- 1 Expresar la ecuación del movimiento:  $y'' + 5y' + 4y = 0$ .
- 2 Sabiendo que  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 0$ , interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.

- 3 Resuelva:  $r^2 + 5r + 4 = 0$ ;  $r_1 = -4$ ;  $r_2 = -1$ ;  
 $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$ ;  $y(0) = c_1 + c_2 = 1$ ;  
 $y'(t) = -4c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-t}$ ;  $y'(0) = -4c_1 - c_2 = 0$ ;

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -4c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t}.$$



## Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0;$$

## Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0$$

## Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

## Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$  (solos) y  $y_2 = xe^{rx}$  son soluciones de la ED y son LI en  $I = \mathbb{R}$ :

## Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$  (solos) y  $y_2 = xe^{rx}$  son soluciones de la ED y son LI en  $I = \mathbb{R}$ :

$$y_2 = xe^{rx};$$

## Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$  (solos) y  $y_2 = xe^{rx}$  son soluciones de la ED y son LI en  $I = \mathbb{R}$ :

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx};$$

## Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$  (solos) y  $y_2 = xe^{rx}$  son soluciones de la ED y son LI en  $I = \mathbb{R}$ :

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$$

## Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$  (solos) y  $y_2 = xe^{rx}$  son soluciones de la ED y son LI en  $I = \mathbb{R}$ :

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= ((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x) e^{rx} \end{aligned}$$



## Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$  (solos) y  $y_2 = xe^{rx}$  son soluciones de la ED y son LI en  $I = \mathbb{R}$ :

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= ((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x)e^{rx} \end{aligned}$$

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1 + xr)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + xr - xr) = e^{2rx} \neq 0.$$

## Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$  (solos) y  $y_2 = xe^{rx}$  son soluciones de la ED y son LI en  $I = \mathbb{R}$ :

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= ((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x)e^{rx} \end{aligned}$$

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1 + xr)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + xr - xr) = e^{2rx} \neq 0.$$

Solución general:

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

es solución general de  $ay'' + by' + cy = 0$ .

### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0;$$

### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r_1 = \alpha + i\beta; \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r_1 = \alpha + i\beta; \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r_1 = \alpha + i\beta; \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)); \quad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x))$$

### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r_1 = \alpha + i\beta; \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)); \quad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x))$$

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}z_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r_1 = \alpha + i\beta; \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)); \quad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x))$$

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}z_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

Probamos que  $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$  y  $y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$  son soluciones de la ED y que son LI en  $I = \mathbb{R}$ .



### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$y_1' = \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y_1'' = (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\ - 2\alpha\beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$y_1' = \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y_1'' = (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x} \cos(\beta x) - 2\alpha\beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 =$$

$$= (a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c) \cos(\beta x) + (a(-2\alpha\beta) + b(-\beta)) \operatorname{sen}(\beta x)$$

### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$y_1' = \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y_1'' = (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x} \cos(\beta x) - 2\alpha\beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$\begin{aligned} a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c &= \\ &= a \left( \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 =$$

$$\begin{aligned} &= (a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c) \cos(\beta x) + \\ &\quad (a(-2\alpha\beta) + b(-\beta)) \operatorname{sen}(\beta x) \end{aligned}$$

### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$y_1' = \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y_1'' = (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x} \cos(\beta x) - 2\alpha\beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 =$$

$$= (a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c) \cos(\beta x) + (a(-2\alpha\beta) + b(-\beta)) \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c =$$

$$= a \left( \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{2a} + c = 0.$$

$$a(-2\alpha\beta) + b(-\beta) =$$

$$= (2a\alpha + b)(-\beta)$$

$$= \left(-2a \frac{b}{2a} + b\right)(-\beta) = 0.$$

### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$y_1' = \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y_1'' = (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x} \cos(\beta x) - 2\alpha\beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 =$$

$$= (a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c) \cos(\beta x) + (a(-2\alpha\beta) + b(-\beta)) \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$\begin{aligned} a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c &= \\ &= a \left( \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(-2\alpha\beta) + b(-\beta) &= \\ &= (2a\alpha + b)(-\beta) \\ &= \left(-2a\frac{b}{2a} + b\right)(-\beta) = 0. \end{aligned}$$

Luego  $y_1$  es solución de la ED.

### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$y_1' = \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y_1'' = (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x} \cos(\beta x) - 2\alpha\beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c =$$

$$= a \left( \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{2a} + c = 0.$$

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 =$$

$$= (a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c) \cos(\beta x) + (a(-2\alpha\beta) + b(-\beta)) \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$a(-2\alpha\beta) + b(-\beta) =$$

$$= (2a\alpha + b)(-\beta)$$

$$= \left(-2a\frac{b}{2a} + b\right)(-\beta) = 0.$$

Luego  $y_1$  es solución de la ED.

Similarmente se prueba que  $y_2$  es solución (solos).

### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$



### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$W_{(y_1, y_2)}(x) =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \sin(\beta x) & \alpha e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{vmatrix} \\ &= e^{2\alpha x} (\cos(\beta x)(\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)) - \sin(\beta x)(\alpha \cos(\beta x) - \beta \sin(\beta x))) \\ &= e^{2\alpha x} (\beta \cos^2 x + \beta \sin^2 x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \end{aligned}$$

### Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$\begin{aligned} W_{(y_1, y_2)}(x) &= \\ &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \sin(\beta x) & \alpha e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{vmatrix} \\ &= e^{2\alpha x} (\cos(\beta x)(\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)) - \sin(\beta x)(\alpha \cos(\beta x) - \beta \sin(\beta x))) \\ &= e^{2\alpha x} (\beta \cos^2 x + \beta \sin^2 x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \end{aligned}$$

**Solución general:**

$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$  es solución general de  $ay'' + by' + cy = 0$ .

# Ejemplos

$$1) y'' - y' - 6y = 0$$

# Ejemplos

$$1) y'' - y' - 6y = 0$$

$$r^2 - r - 6 = 0; r_1 = 3; r_2 = -2;$$

# Ejemplos

$$1) y'' - y' - 6y = 0$$

$$r^2 - r - 6 = 0; r_1 = 3; r_2 = -2; \text{ solución general:}$$

# Ejemplos

$$1) y'' - y' - 6y = 0$$

$$r^2 - r - 6 = 0; r_1 = 3; r_2 = -2; \text{ solución general: } y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

# Ejemplos

$$1) y'' - y' - 6y = 0$$

$$r^2 - r - 6 = 0; r_1 = 3; r_2 = -2; \text{ solución general: } y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

$$2) y'' + 4y' + 4y = 0$$

# Ejemplos

$$1) y'' - y' - 6y = 0$$

$$r^2 - r - 6 = 0; r_1 = 3; r_2 = -2; \text{ solución general: } y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

$$2) y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0; r = -2;$$



# Ejemplos

$$1) y'' - y' - 6y = 0$$

$$r^2 - r - 6 = 0; r_1 = 3; r_2 = -2; \text{ solución general: } y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

$$2) y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0; r = -2; \text{ solución general:}$$

# Ejemplos

$$1) y'' - y' - 6y = 0$$

$$r^2 - r - 6 = 0; r_1 = 3; r_2 = -2; \quad \text{solución general: } y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

$$2) y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0; r = -2; \quad \text{solución general: } y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

# Ejemplos

$$1) y'' - y' - 6y = 0$$

$$r^2 - r - 6 = 0; r_1 = 3; r_2 = -2; \quad \text{solución general: } y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

$$2) y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0; r = -2; \quad \text{solución general: } y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

$$3) y'' - 4y' + 5y = 0$$

# Ejemplos

$$1) y'' - y' - 6y = 0$$

$$r^2 - r - 6 = 0; r_1 = 3; r_2 = -2; \quad \text{solución general: } y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

$$2) y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0; r = -2; \quad \text{solución general: } y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

$$3) y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$r^2 - 4r + 5 = 0; r_{1,2} = 2 \pm i;$$

# Ejemplos

$$1) y'' - y' - 6y = 0$$

$$r^2 - r - 6 = 0; r_1 = 3; r_2 = -2; \quad \text{solución general: } y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

$$2) y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0; r = -2; \quad \text{solución general: } y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

$$3) y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$r^2 - 4r + 5 = 0; r_{1,2} = 2 \pm i; \quad \text{solución general:}$$

# Ejemplos

$$1) y'' - y' - 6y = 0$$

$$r^2 - r - 6 = 0; r_1 = 3; r_2 = -2; \quad \text{solución general: } y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

$$2) y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0; r = -2; \quad \text{solución general: } y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

$$3) y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$r^2 - 4r + 5 = 0; r_{1,2} = 2 \pm i; \quad \text{solución general: } y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
  - PVI y PVF
  - Dependencia e independencia lineal de soluciones
  - Teorema solución general e.d. lineal homogénea
  - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
  - Teoremas
  - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
    - Método de los coeficientes indeterminados
    - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
  - PVI y PVF
  - Dependencia e independencia lineal de soluciones
  - Teorema solución general e.d. lineal homogénea
  - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden**
  - **Teoremas**
  - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
    - Método de los coeficientes indeterminados
    - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte



## FUNCIÓN COMPLEMENTARIA

Dada una e.d. no homogénea,  $ay'' + by' + cy = G(x)$ , la solución de la e.d. homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0$$

se llama FUNCIÓN COMPLEMENTARIA.

## Teorema

Dada una e.d. lineal  $a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x)$  donde las funciones coeficientes  $a_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , y  $G$  son continuas en algún intervalo abierto  $I$  y  $a_n(x) \neq 0$  en  $I$ , la solución general de la e.d. tiene la forma  $y = y_c + y_p$  donde  $y_c$  es la **función complementaria** y  $y_p$  es **cualquier** solución particular de la ecuación no homogénea.

Demostrar.

## Teorema (Principio de superposición para ED no homogéneas)

Sean las  $k$  ecuaciones diferenciales no homogéneas de  $n$ -ésimo orden

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_1(x),$$

$\vdots$

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_k(x),$$

donde sólo cambian los términos independientes. Supongamos que  $y_{p_1}, \dots, y_{p_k}$  son soluciones particulares de cada una de las ecuaciones anteriores, en un mismo intervalo  $I$ . Entonces,

$$y_p = c_1 y_{p_1} + \dots + c_k y_{p_k}$$

es una solución particular de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = c_1 g_1 + \dots + c_k g_k.$$

Demostración dejada como ejercicio.

## Principio de superposición ecuaciones lineales no homogéneas: caso especial

Sean las  $k$  ecuaciones diferenciales no homogéneas de  $n$ -ésimo orden

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_1(x),$$

$\vdots$

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_k(x),$$

donde sólo cambian los términos independientes. Supongamos que  $y_{p_1}, \dots, y_{p_k}$  son soluciones particulares de cada una de las ecuaciones anteriores, en un mismo intervalo  $I$ . Entonces,

$$y_p = y_{p_1} + \dots + y_{p_k}$$

es una solución particular de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g_1 + \dots + g_k.$$

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
  - PVI y PVF
  - Dependencia e independencia lineal de soluciones
  - Teorema solución general e.d. lineal homogénea
  - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
  - Teoremas
  - **Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes**
    - Método de los coeficientes indeterminados
    - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte

# Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver  $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$ .

# Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver  $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$ .

Rta:

# Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver  $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$ .

Rta:  $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$ .

Resolver  $y'' - y' + y = 2 \operatorname{sen}(3x)$ .



# Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver  $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$ .

Rta:  $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$ .

Resolver  $y'' - y' + y = 2 \operatorname{sen}(3x)$ .

Rta:

# Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver  $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$ .

Rta:  $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$ .

Resolver  $y'' - y' + y = 2 \operatorname{sen}(3x)$ .

Rta:  $y = y_c + \frac{6}{73} \cos(3x) - \frac{16}{73} \operatorname{sen}(3x)$ .

Resolver  $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$ .

# Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver  $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$ .

Rta:  $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$ .

Resolver  $y'' - y' + y = 2 \operatorname{sen}(3x)$ .

Rta:  $y = y_c + \frac{6}{73} \cos(3x) - \frac{16}{73} \operatorname{sen}(3x)$ .

Resolver  $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$ .

Rta:

# Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver  $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$ .

Rta:  $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$ .

Resolver  $y'' - y' + y = 2 \operatorname{sen}(3x)$ .

Rta:  $y = y_c + \frac{6}{73} \cos(3x) - \frac{16}{73} \operatorname{sen}(3x)$ .

Resolver  $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$ .

Rta:  $y = y_c - \frac{8}{3}xe^x$ .

**TABLA 17.1** Método de coeficientes indeterminados para ecuaciones seleccionadas de la forma  $ay'' + by' + cy = G(x)$ .

Si $G(x)$ tiene un término que es un múltiplo constante de ...	Y si	Entonces incluya esta expresión en la función de prueba para $y_p$ .
$e^{rx}$	$r$ no es una raíz de la ecuación característica	$Ae^{rx}$
	$r$ es una raíz simple de la ecuación característica	$Axe^{rx}$
	$r$ es una raíz doble de la ecuación característica	$Ax^2e^{rx}$
$\sin kx, \cos kx$	$ki$ no es una raíz de la ecuación característica	$B \cos kx + C \sin kx$
$px^2 + qx + m$	0 no es una raíz de la ecuación característica	$Dx^2 + Ex + F$
	0 es una raíz simple de la ecuación característica	$Dx^3 + Ex^2 + Fx$
	0 es una doble raíz de la ecuación característica	$Dx^4 + Ex^3 + Fx^2$

## Método de variación de parámetros

Dada  $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$ , con  $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ , se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'$$

$$y_p'' = u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2''$$

## Método de variación de parámetros

Dada  $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$ , con  $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ , se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'$$

$$y_p'' = u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2''$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+ a(u_1''y_1 + u_1'y_1') + a(u_2''y_2 + u_2'y_2') + (au_1'y_1' + bu_1'y_1 + au_2'y_2' + bu_2'y_2)$$

$$= a \frac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + b(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

## Método de variación de parámetros

Dada  $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$ , con  $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ , se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'$$

$$y_p'' = u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2''$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+ a(u_1''y_1 + u_1'y_1') + a(u_2''y_2 + u_2'y_2') + (au_1'y_1' + bu_1'y_1 + au_2'y_2' + bu_2'y_2)$$

$$= a \frac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + b(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$



## Método de variación de parámetros

Dada  $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$ , con  $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ , se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'$$

$$y_p'' = u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2''$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+ a(u_1''y_1 + u_1'y_1') + a(u_2''y_2 + u_2'y_2') + (au_1'y_1' + bu_1'y_1 + au_2'y_2' + bu_2'y_2)$$

$$= a \frac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + b(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases} \quad \text{Resolver por determinantes.}$$

# Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

# Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

# Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \sin(3x)$$

# Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \sin(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12};$$

# Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \sin(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

# Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \sin(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) - \frac{1}{12}x \cos(3x) + \frac{\ln |\sin(3x)|}{36} \sin(3x)$$

$$I = \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \text{ o subintervalos de éste.}$$

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
  - PVI y PVF
  - Dependencia e independencia lineal de soluciones
  - Teorema solución general e.d. lineal homogénea
  - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
  - Teoremas
  - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
    - Método de los coeficientes indeterminados
    - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte



# Ecuación del movimiento libre no amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t) \quad \text{con } b = 0, \text{ y } f(t) = 0, \forall t$$

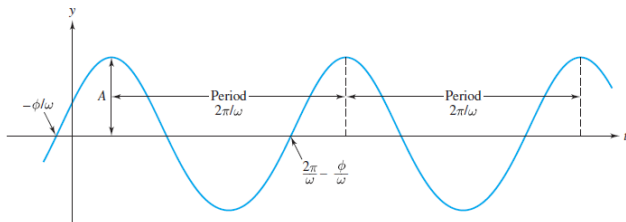
# Ecuación del movimiento libre no amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t) \quad \text{con } b = 0, \text{ y } f(t) = 0, \forall t$$

$$my'' + ky = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \tan \phi = \frac{c_1}{c_2}; \quad \text{Frecuencia natural: } \frac{\omega}{2\pi}$$



# Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

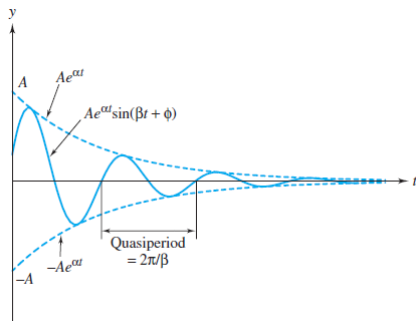
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \quad b > 0$$

# Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \quad b > 0$$

Movimiento **subamortiguado**:  $b^2 < 4mk$        $\alpha = -\frac{b}{2m} < 0$

$$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) \quad \rightarrow \quad y = e^{\alpha t} A \sin(\beta t + \phi)$$



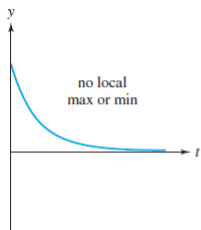
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \quad b > 0$$

# Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

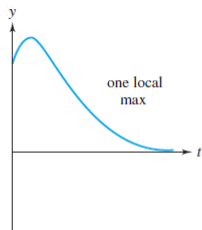
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \quad b > 0$$

Movimiento **sobreamortiguado**:  $b^2 > 4mk$

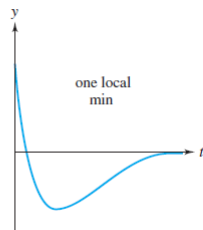
$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad r_1 < 0; \quad r_2 < 0.$$



(a)



(b)



(c)

# Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \quad b > 0$$

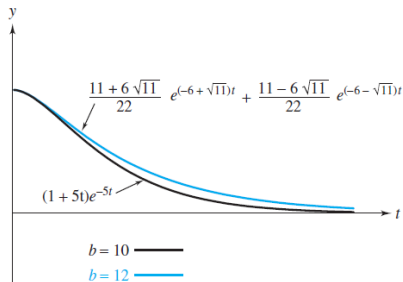
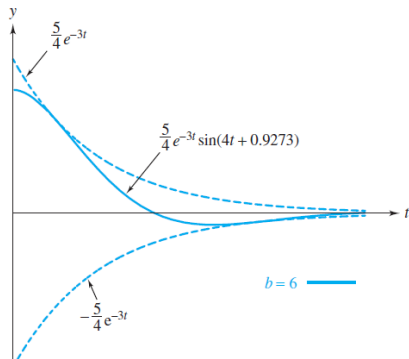
# Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \quad b > 0$$

Movimiento **críticamente amortiguado**:  $b^2 = 4mk$

$$y = c_1 e^{-\frac{b}{2m}t} + c_2 t e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Ejemplo:  $y'' + by' + 25y = 0$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ;  $b = 6, 10, 12$ .





# Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t), \quad 0 < b^2 < 4mk;$$

## Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t), \quad 0 < b^2 < 4mk; \quad f(t) = F_0 \cos(\gamma t)$$

# Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t), \quad 0 < b^2 < 4mk; \quad f(t) = F_0 \cos(\gamma t)$$

$$y = \underbrace{Ae^{-\frac{b}{2m}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t + \phi\right)}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}} \operatorname{sen}(\gamma t + \theta)}_{\text{Estable}}$$

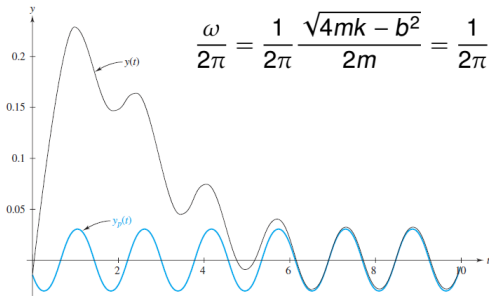


Figure 4.32 Convergence of  $y(t)$  to the steady-state solution  $y_p(t)$  when  $m = 4$ ,  $b = 6$ ,  $k = 3$ ,  $F_0 = 2$ ,  $\gamma = 4$