Ecuaciones diferenciales parciales

Problemas del calor y de onda

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales parciales
   - Generalidades
   - Problema del calor
   - Problema de onda

Recorrido

Recorrido

EDP o PDE

Ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

EDP o PDE

Ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

Discriminante: $B^2 - 4AC$

Clasificación de las EDP

La Ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G,$$

donde A, B, C, D, E, F y G son constantes reales es

$$\begin{array}{cl} \textbf{hiperbólica} & \text{si } B^2 - 4AC > 0, \\ \textbf{parabólica} & \text{si } B^2 - 4AC = 0, \\ \textbf{elíptica} & \text{si } B^2 - 4AC < 0, \end{array}$$

Ejemplos de EDP lineales, tipos

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0$$

Ejemplos de EDP lineales, tipos

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0 \qquad \mathit{ELIPTICA}$$

Ejemplos de EDP lineales, tipos

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0 \qquad ELIPTICA$$

$$u_{xx} - u_{xy} - 3u_{yy} + u_x - u_y = 0$$

Ejemplos de EDP lineales, tipos

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0 \qquad \textit{ELIPTICA}$$

$$u_{xx} - u_{xy} - 3u_{yy} + u_x - u_y = 0 \qquad \textit{HIPERBOLICA}$$

Ejemplos de EDP lineales, tipos

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0 \qquad \textit{ELIPTICA}$$

$$u_{xx} - u_{xy} - 3u_{yy} + u_x - u_y = 0 \qquad \textit{HIPERBOLICA}$$

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x - u_y = 0$$

Ejemplos de EDP lineales, tipos

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0 \qquad \textit{ELIPTICA}$$

$$u_{xx} - u_{xy} - 3u_{yy} + u_x - u_y = 0 \qquad \textit{HIPERBOLICA}$$

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x - u_y = 0 \qquad \textit{PARABOLICA}$$

Ecuaciones clásicas

Ecuación de onda $$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ecuaciones clásicas

Ecuación de onda $$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ (hiperbólica);

Ecuación de calor $$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, k > 0$$

Ecuaciones clásicas

Ecuación de onda $$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ (hiperbólica);

Ecuación de calor $$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, k > 0$$ (parabólica);

Ecuación de Laplace $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Ecuaciones clásicas

Ecuación de onda $$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ (hiperbólica);

Ecuación de calor $$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, k > 0$$ (parabólica);

Ecuación de Laplace $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$ (elíptica).

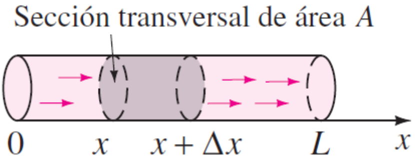
Recorrido

Ecuación del calor unidimensional

Principios físicos involucrados: llamamos u a la función temperatura.

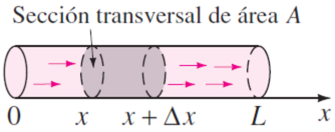
1. El calor fluye en la dirección de temperatura decreciente.
2. El ritmo al que fluye el calor a través de un área es proporcional al área y al ritmo de cambio de la temperatura respecto de la distancia en una dirección perpendicular al área: u_x. (El factor de proporcionalidad es la conductividad térmica K: $Q_t = -KAu_x$.)
3. La cantidad de calor ganado o perdido por un cuerpo cuando su temperatura cambia es proporcional a la masa del cuerpo y al cambio de temperatura. (El factor de proporcionalidad es el calor específico, γ: $Q_t = \gamma m u_t$.)

Ecuación del calor unidimensional



Supuestos:

1. Varilla delgada circular de longitud L, sección transversal A constante, que coincide con el eje x en el intervalo $[0, L]$.
2. El calor solo fluye en la dirección x.
3. La superficie lateral de la varilla está aislada y no fluye calor por ella.
4. No hay calor generado dentro de la varilla.
5. La varilla es homogénea: su densidad ρ, calor específico γ y conductividad K son constantes a lo largo de la misma.



1 Si Δu denota el cambio de temperatura en el punto x en un intervalo de tiempo Δt, por el principio 3, la cantidad de calor almacenado en una fina rodaja de espesor Δx en ese intervalo de tiempo es $\Delta Q = \gamma m \Delta u$:

$$\Delta Q = \gamma m \Delta u = \gamma(\rho A \Delta x)\Delta u;$$

y el “ritmo de almacenamiento” del calor es

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \gamma \rho A \Delta x \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

2 Según los principios 1 y 2, dado que la rodaja solo gana calor por medio del flujo que entra por sus caras, el ritmo al que el calor fluye en la rodaja es la suma de los ritmos de flujo por cada cara:

$$KAu_x(x+\Delta x,t)-KAu_x(x,t)=KA(u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)).$$

Ecuación del calor unidimensional

Tenemos que

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \gamma\rho A\Delta x\frac{\Delta u}{\Delta t}$$

y el ritmo de almacenamiento del calor es

$$KAu_x(x+\Delta x, t) - KAu_x(x,t) = KA(u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)).$$

Igualando:

$$KA(u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)) = \gamma\rho A\Delta x\frac{\Delta u}{\Delta t}$$

y haciendo $\Delta x \to 0$ y $\Delta t \to 0$, obtenemos

$$\frac{K}{\gamma\rho}u_{xx} = u_t$$

$$ku_{xx} = u_t,$$

donde $k > 0$ y se llama **difusividad térmica**.

Problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad 0 < x < L,\; t > 0; \tag{1}$$

Problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad 0 < x < L,\ t > 0; \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t > 0; \tag{2}$$

Problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad 0 < x < L,\ t > 0; \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t > 0; \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L.$$

Problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad 0 < x < L, \; t > 0; \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t > 0; \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L. \tag{3}$$

Hablemos de la solución trivial $u(x,t) = 0, \; 0 < x < L, \; t > 0$.

Problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad 0 < x < L,\ t > 0; \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t > 0; \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L. \tag{3}$$

Hablemos de la solución trivial $u(x,t) = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0$.
SE DESCARTA LA SOLUCIÓN TRIVIAL.

Solución del PFV

Proponemos: $u(x, t) = X(x)T(t)$

Solución del PFV

Proponemos: $u(x,t) = X(x)T(t)$
Obtenemos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda.$$

De donde:

$$X'' + \lambda X = 0$$

Solución del PFV

Proponemos: $u(x,t) = X(x)T(t)$
Obtenemos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda.$$

De donde:

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad\qquad T' + k\lambda T = 0.$$

Las condiciones de borde son:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad u(L,t) = X(L)T(t) = 0, \qquad t > 0.$$

Así:

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Solución del primer problema

$$X'' + \lambda X = 0; \qquad X(0) = X(L) = 0.$$

Casos:

1) $\lambda = 0$ 2) $\lambda = -\alpha^2 < 0$ 3) $\lambda = \alpha^2 > 0$

Solución del primer problema

$$X'' + \lambda X = 0; \qquad X(0) = X(L) = 0.$$

Casos:
1) $\lambda = 0$ 2) $\lambda = -\alpha^2 < 0$ 3) $\lambda = \alpha^2 > 0$

1) $\lambda = 0$

$$X'' = 0; \qquad X = c_1 + c_2 x$$

$$X(0) = c_1 = 0; X(L) = c_2 L = 0; c_2 = 0; X \equiv 0.$$

Caso 1, $\lambda = 0$, se descarta porque conduce a $u \equiv 0$.

Solución del primer problema

$$X'' + \lambda X = 0; \qquad X(0) = X(L) = 0.$$

Casos:

1) $\lambda = 0$ 2) $\lambda = -\alpha^2 < 0$ 3) $\lambda = \alpha^2 > 0$

2) $\lambda = -\alpha^2 < 0$

$$X'' - \alpha^2 X = 0; \qquad r^2 - \alpha^2 = 0 \qquad r^2 = \alpha^2$$

$$X(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

$X(0) = c_1 + c_2 = 0; X(L) = c_1 e^{\alpha L} - c_1 e^{-\alpha L} = c_1 e^{\alpha L}(1 - e^{-2\alpha L}) = 0;$
$c_1 = 0; X \equiv 0.$
Caso 2, $\lambda = -\alpha < 0$, se descarta porque conduce a $u \equiv 0$.

Solución del primer problema

$$X'' + \lambda X = 0; \qquad X(0) = X(L) = 0.$$

Caso 3) $\lambda = \alpha^2 > 0$

$$X'' + \alpha^2 X = 0; \qquad r^2 + \alpha^2 = 0 \qquad r = \pm \alpha i$$

$$X(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \operatorname{sen}(\alpha x)$$

$$X(0) = c_1 = 0; X(L) = c_2 \operatorname{sen}(\alpha L) = 0; c_2 \neq 0; \alpha L = n\pi.$$

Autovalores del problema:

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Autofunciones del problema:

$$X_n(x) = c_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Solución del segundo problema

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < L,\ t > 0;$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t > 0;$$

$$u(x,0) = f(x), 0 < x < L.$$

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$X'' + \lambda X = 0;\ X(0) = X(L) = 0; \qquad T' + k\lambda T = 0.$$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Resolvemos $T' + k\lambda T = 0$ usando separación de variables:

$$\frac{T'}{T} = -k\lambda_n$$

$$T(t) = c_3 e^{-k\lambda_n t} = c_3 e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

Solución del PVF

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$u_n(x,t) = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t},\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

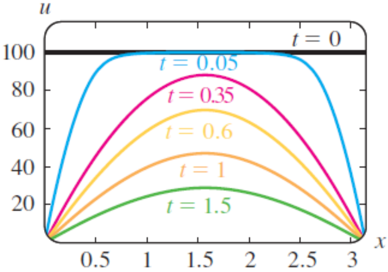
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x),\ 0 < x < L.$$

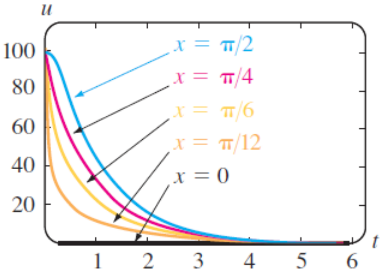
$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Ejemplo

$$u(x,0) = 100;\ L = \pi,\ k = 1$$





Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales parciales
   - Generalidades
   - Problema del calor
   - Problema de onda