TRANSFORMACIONES LINEALES

Existen funciones de gran importancia para el álgebra y para numerosas ciencias que usan este lenguaje y sus aplicaciones. Estas funciones sonllamadas *transformaciones lineales o aplicaciones lineales.* Las mismas son de gran utilidad en numerosos procesos industriales y científicos, fundamentalmente cuando se necesitan aplicaciones que funcionen como reglas, de modo que permitan obtener resultados de salida (outputs) a partir de resultados de entradas (inputs). Ejemplos: en procesos productivos, en el caso de estructuras sometidas a un sistema de cargas, para sólidos sometidos a la acción del calor, en la compra de materiales y otros casos. Es importante destacar, además, el hecho de que un circuito eléctrico puede interpretarse como una aplicación lineal. Los ejemplos previamente mencionados son una pequeña muestra de la relevancia que implica el estudio de estas funciones.

Antes de comenzar, es importante destacar que para la comprensión de conceptos en la presente unidad, resulta esencial recordar algunos conocimientos adquiridos en Geometría, tales como: espacio vectorial, subespacio vectorial, combinación lineal, conjunto generador, conjunto linealmente independiente, bases de un espacio vectorial y dimensión del mismo. Por lo que se sugiere la revisión y comprensión de los mismos.

Transformación lineal

Al considerar una función del espacio vectorial IR^2 en IR^2 definida como:

$$T : IR^2 \to IR^2 \text{ tal que}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

a.1. Hallar las imágenes de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mediante la funciónT definida. A continuación, hallar la imagen del vector suma $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

a.2. Encontrar $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ y $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$. Comparar.

b. Hallar la imagen por T, de $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Observar y comparar $T\left(3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ y $3 \cdot T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

c. Interpretar geométricamente.

Definición:
Sean V y W espacios vectoriales definidos sobre el mismo cuerpo de escalares. La función T, definida del espacio vectorial V en el espacio vectorial W, es una transformación lineal de V en W si satisface las dos condiciones siguientes:
1. $T(u+v)=T(u)+T(v)$, siendo *u* y *v* vectores de V;
2. $T(k\cdot u)=k\cdot T(u)$, con *u* de V y *k* un escalar real.

Nota: las condiciones dadas en 1 y en 2 para la determinación de si una función es una transformación lineal, pueden expresarse en una única condición, como sigue:

$$T\underbrace{(k_1u+k_2v)}_{\substack{CL\ en\ V\\(dominio)}}=\underbrace{k_1T(u)+k_2T(v)}_{\substack{CL\ en\ W\\(codominio)}}$$

siendo*u* y *v* vectores de V, k_1 y $k_2$escalares reales.

En general, una transformación lineal T se denota como

T: V →W tal que T(v) = w,

de modo que la función T asigna a cada elemento v de V una imagen w en W. Se dice que w es la imagen del vector v bajo T o el transformado de v. Además, como T es una función, se dice que V es el dominio de T y W es el codominio de T.

Importante:

• observar que las transformaciones lineales *preservan las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar*, ya que se produce el mismo resultado antes o después de aplicar la transformación.

• una transformación lineal definida de un espacio vectorial V en el mismo V, se denomina *operador lineal.*

A continuación se muestran diferentes ejemplos de funciones.

Ejemplo

Dada la función $T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

a. Interpretar geométricamente.
b. Determinar si la función T es una transformación lineal.

Ejemplo

Demostrar que la función $T: IR^2 \to IR^3$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ x-y \end{pmatrix}$

es una transformación lineal.

Prueba

Condición 1: Sean $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ vectores del espacio IR^2 del dominio,

$$T(v_1+v_2) = T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(x+x') \\ -(y+y') \\ (x+x')-(y+y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2x' \\ -y-y' \\ x+x'-y-y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x' \\ -y' \\ x'-y' \end{pmatrix} = T(v_1)+T(v_2)$$

Luego, se cumple que

$$T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2)$$

Condición 2: Sea $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vector del espacio IR^2 del dominio y *k* un escalar real,

$$T(k\cdot v_1) = T\left(k\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(kx) \\ -(ky) \\ kx-ky) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(2x) \\ k(-y) \\ k(x-y) \end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ x-y \end{pmatrix} = k\cdot T(v_1)$$

Es decir, se cumple que

$T(k\cdot v_1) = k\cdot T(v_1)$

Como la función definida satisface las condiciones 1 y 2, se concluye que T es una transformación lineal.

Ejemplo

La función de M_{2x2} en M_{2x2} definida como

$$T: M_{2x2} \to M_{2x2} \text{ tal que}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c+d \end{bmatrix}$$

es una transformación lineal definida en el espacio vectorial de matrices reales de 2x2. Se sugiere realizar la demostración.

Ejemplo

La función

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que

$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+3 \\ y \end{pmatrix}$

no es transformación lineal. Se sugiere corroborar la conclusión.

Algunas transformaciones lineales especiales

Se mencionan a continuación algunas transformaciones lineales particulares.

a**. *Transformación lineal cero o nula.***
Es de la forma

$$T : V \to W \text{ tal que}$$
$$T(v) = \mathbf{0}$$

Un ejemplo de transformación nula es

$$T : M_{2x2} \to IR \text{ tal que } T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & -a_{11} \end{pmatrix}\right) = a_{11} + a_{22}$$

Un ejemplo de operador lineal nulo definido en IR^2 es

$$T : IR^2 \to IR^2 \text{ tal que } T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. ***Operador lineal identidad***
Es de la forma

$$Id : V \to V \text{ tal que}$$
$$T(v) = v$$

Ejemplo 1

$$T : IR^2 \to IR^2 \text{ tal que}$$
$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

$$Id : IR^{2x2} \to IR^{2x2} \text{ tal que}$$
$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(M_{2x2} o bien IR^{2x2})

c. ***Transformación lineal matricialo transformación lineal definida mediante una matriz.***
Es de la forma
$T : IR^n \to IR^m$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}\right) = A_{mxn} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_m \end{pmatrix}$$, siendo A una matriz fija de orden mxn.

Observe que T es transformación lineal ya que cumple con las condiciones de la definición.
1. T(v + w) = T(v) + T(w), siendo v y w vectores de IR^n.

Por definición de la función definida previamente y por la propiedad distributiva del producto de matrices respecto de la suma, se tiene justificado que:

T (v + w) = A .(v + w) = A . v + A . w = T(v) + T(w)

2. T(k v) = k T(v), siendo v de IR^n y k de *IR*.

Esta igualdad se justifica por definición de la función definida previamente y por propiedad del producto de un escalar por una matriz, ya que

T(k v) = A . (k v) = k . (A .v) = k .T(v)

Importante: observar que toda matriz mxn determina una aplicación lineal de IR^n en IR^m y recíprocamente.

Ejemplo de transformación lineal matricial

Sea $T: IR^2 \to IR^3$ la función definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ .Pruebe que T es transformación lineal.

Propiedades de las transformaciones lineales

Propiedad 1 Sea T una transformación lineal de V en W entonces T(**0**) = **0**.

Propiedad 2 Sea T una transformación lineal de V en W y v un vector de V entonces T(-v) = -T(v).

Propiedad 3 Sea T una transformación lineal de V en W, u y v vectores de V entonces T(u - v) = T(u) -T(v).

Propiedad 1

Demostración

Por hipótesis, T es una transformación lineal, es decir, cumple con las condiciones 1 y 2 dadas en la definición. Como v es un vector de V y en todo espacio vectorial V se cumple **0** v = **0** (propiedad de un espacio vectorial), se tiene:

T(**0**)= T(**0**v) = **0** T(v) = **0**, luego queda demostrado que T(**0**) = **0**

Ejercicio(para pensar)

a. Enuncie la afirmación recíproca de la propiedad 1. Determine su valor de verdad.

b. Enuncie la afirmación contrarrecíproca de la propiedad 1. Determine su valor de verdad.

Teorema

Sea T una transformación lineal definida de un espacio vectorial V en otro W. Sea $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ una base de V y sea $\{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k\}$ un subconjunto de vectores arbitrarios de W, donde los w_i no son necesariamente distintos. Entonces existe y es única la transformación T, tal que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$, $T(v_3) = w_3$, ..., $T(v_n) = w_k$.

Es decir, si $w_1 \ldots w_n$ son vectores cualesquiera de W entonces existe una única transformación lineal T de V en W tal que $T(v_i) = w_i$ para todo *i* de 1 a n.

En otras palabras, siempre es posible encontrar una transformación lineal que transforme los vectores de una base de V, previamente determinados, en vectores de W. De modo que una transformación lineal T de un espacio V en otro W queda completamente determinada por su acción sobre una base de V.

Ejemplo de aplicación del teorema

Sea T de IR^2 en IR^2 tal que $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a. Hallar $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$.

b. Encontrar $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$.

Núcleo e imagen de una transformación lineal

Núcleo de una transformación lineal

Definición: Sea T una transformación lineal del espacio V en el espacio W. El núcleo de una transformación lineal es un subconjunto de V definido como sigue

$$N(T) = \{v \in V / T(v) = \mathbf{0}\}$$

Es decir, se llama núcleo de T al conjunto de los vectores del dominio V, tal quesu transformado es el vector nulo del espacio W.

Observación: El conjunto N(T) también es llamado *kernel* (núcleo en inglés) y se denota ker(T).

Ejemplo

Al considerar la transformación lineal nula definida de V en W, es sencillo concluir que su núcleo es el mismo espacio V.

Ejemplo

Sea la transformación lineal $T: IR^2 \rightarrow IR^2$ tal que $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$

Obtención del N(T): $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in N(T) \Leftrightarrow T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Luego, se tiene $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Por lo que es sencillo concluir que el núcleo de T es el conjunto $N(T) = \{(0,k), k \in IR\}$.

Núcleo de la transformación lineal matricial

El núcleo de la transformación lineal matricial, se define como

$$N(T) = \{X \in R^n / A \cdot X = O\}$$

Note que $A \cdot X = O$, es la expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, por lo que el núcleo de T es el espacio solución de dicho sistema. Por lo tanto, para el ejemplo 2 dado previamente se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

lo que permite concluir que la solución del sistema es $S = \{(0,k), k \in IR\} = N(T)$.

Imagen de una transformación lineal

Definición: Sea T una transformación lineal del espacio V en el espacio W. El conjunto imagen de una transformación lineal se simboliza Im(T) y se define simbólicamente como

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W / \exists v \in V \wedge T(v) = w\}$$

Importante : $\mathrm{Im}(T) \subseteq W$

Ejemplo
Al considerar la transformación lineal identidad definida de V en V, es sencillo concluir que el conjunto imagen de T es el mismo V.

Ejemplo
Sea la transformación lineal

$T: IR^2 \rightarrow IR^2$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtención de Im(T): $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathrm{Im}(T) \Leftrightarrow T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Luego, se tiene $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

de donde se deduce que los elementos del conjunto imagen de T son los pares ordenados (*a*, *b*) tal que *b* debe ser cero y *a* cualquier real. Es decir

$$\mathrm{Im}(T)=\{(a,b)/\, a \in IR \wedge b=0\} \text{ o bien } \mathrm{Im}(T)=\{(a,0)/\, a \in IR\}$$

En particular, el conjunto imagen de la transformación lineal matricial es

$$\mathrm{Im}(T)=\{B \in R^m /\, \exists X \in R^n \wedge A\cdot X=B\}$$

Por lo que otra forma de obtener Im(T), consiste en plantear el sistema $A\cdot X=B$ y calcular *B* de modo que el sistema sea compatible. En el ejemplo $\begin{cases} x=a \\ 0=b \end{cases}$, el conjunto imagen de T es $\mathrm{Im}(T)=\{(a,0)/\, a \in IR\}$ lo cual coincide con el resultado obtenido.

Propiedades del núcleo y la imagen de una transformación lineal

Propiedad 1

Sea T una transformación lineal del espacio V en W entonces el conjunto núcleo de T es un subespacio vectorial del dominio V.

Demostración

Para demostrar que el núcleo de T es un subespacio, se debe probar que:

1. *El núcleo de T es un subconjunto de V*. Esto es cierto, puesto que el núcleo de T: V $\rightarrow$W por definición

$$N(T)=\{v \in V/T(v)=\mathbf{0}\}$$

está formado por elementos de V, por lo que está incluido en el dominio V de la función.

2. *El núcleo de T contiene al menos a un vector*. Es decir, es un conjunto distinto del vacío. Esto es cierto, ya que por ser T una transformación lineal, sabemos que T(0) = 0, esto nos permite afirmar que al menos el vector nulo del dominio al tener como imagen al vector nulo, está en el conjunto núcleo. De esta manera, el núcleo no es un conjunto vacío.

3. *El conjunto núcleo de T es cerrado bajo la adición y bajo la multiplicación por un escalar*. Estos requisitos son las condiciones necesarias y suficientes para determinar si un conjunto es un subespacio vectorial de un espacio, para lo cual se usa el teorema correspondiente. Luego,

a. Sean $u_1 \in N(T)$ y $u_2 \in N(T)$. Por lo tanto, $T(u_1) = \mathbf{0}$ y $T(u_2) = \mathbf{0}$.

Para que se verifique la ley de cierre para la suma en el conjunto núcleo de T, debe ser cierto que: $\boxed{(u_1 + u_2) \in N(T)}$, para que ello ocurra, el vector $(u_1 + u_2)$ debe tener por imagen al vector nulo. Buscaremos entonces la imagen que T le da a ese vector suma, es decir calcularemos $T(u_1 + u_2)$.

$$\underbrace{T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)}_{T \text{ transformación lineal}} = \underbrace{\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}}_{en\ un\ E.V.}$$

Es decir, $T(u_1 + u_2) = \mathbf{0}$, con lo cual se concluye que $\boxed{(u_1 + u_2) \in N(T)}$.

b. Sea $u_1 \in N(T)$ y $k \in IR$. De este modo, $T(u_1) = \mathbf{0}$.

Para que se verifique la ley de cierre para el producto en el conjunto núcleo de T, debe ser cierto que: $\boxed{(k \cdot u_1) \in N(T)}$, es decir, el vector $(k \cdot u_1)$ debe tener por imagen al vector nulo. Calcularemos entonces $T(k \cdot u_1)$

$$\underbrace{T(k \cdot u_1) = k \cdot T(u_1)}_{T \text{ transformación lineal}} = \underbrace{k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}}_{en\ un\ E.V.}$$

Es decir, $T(k \cdot u_1) = 0$, con lo cual se concluye que $\boxed{(k \cdot u_1) \in N(T)}$.

Luego, *N(T)* es un subespacio vectorial del espacio V.

Nota: Puesto que el núcleo de T es un espacio vectorial, puede conocerse su dimensión. A la dimensión del núcleo de una transformación lineal se la llama *nulidad* de la transformación lineal. En símbolos: n(T) o nul(T).

Propiedad 2

Sea T una transformación lineal del espacio V en W entonces el conjunto imagen de T es un subespacio vectorial del codominio W.

Nota: Puesto que imagen de T es un espacio vectorial, puede conocerse su dimensión.A la dimensión del conjunto imagen de una transformación lineal se la denomina *rango* de la transformación lineal. En símbolos: $\rho(T)$ o rango(T).

Teorema de la dimensión

Sea T de un espacio V en otro W una transformación lineal, entonces se verifica que

dim(V) = dim(N(T)) + dim(Im(T))

Ejemplo de núcleo e imagen de una transformación lineal. Obtención de bases y dimensión de los espacios

Dada la transformación lineal

$T: IR^2 \to IR^3$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+3y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Núcleo de T

Al resolver el sistema $A \cdot X = 0$, se tiene $\begin{cases} x+3y=0 \\ y=0 \\ 0=0 \end{cases}$

De donde $S = \{(0,0)\}$ es el espacio solución

Por lo tanto: $N(T) = \{(0,0)\}$

- Como el espacio núcleo está formado sólo por el cero, no existe una base para el núcleo.
- La dimensión del núcleo de esta transformación lineal es cero. En símbolos, dim(N(T)) = 0. Luego, n(T) = 0

Imagen de T

Al resolver el sistema $A \cdot X = B$, se tiene $\begin{cases} x+3y=a \\ y=b \\ 0=c \end{cases}$

De donde el conjunto solución para el vector de los términos independientes del sistema es

$$S = \{(a,b,0) \in R^3\}$$

Por lo tanto: $\mathrm{Im}(T) = \{(a,b,0) \in R^3\}$

- Una base de Im(T) es $B_{\mathrm{Im}(T)} = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$, ya que es un conjunto generador de Im(T) y es linealmente independiente.
- La dimensión del conjunto imagen de la transformación lineal dada es dos.

En símbolos: dim (Im(T)) = 2 o bien ρ(T) = 2.

Aplicación del teorema de la dimensión

Como la dimensión de V igual a dos, la dimensión del núcleo de T es cero y la dimensión de la imagen de T es dos, se concluye que se verifica el teorema de la dimensión.

Ejercicios resueltos de transformaciones lineales

1) Dadas las siguientes funciones, determine si son transformaciones lineales.

a) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} / \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{v}|$

b) $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{M}_{nxn} \to \mathbb{R} / \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A})$

c) $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{P}_2 \to \boldsymbol{P}_1 / \boldsymbol{T}((\boldsymbol{ax^2} + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c})) = \boldsymbol{2ax} - \boldsymbol{b}$

d) $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \boldsymbol{M}_{2x2} / \boldsymbol{T}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$

e) $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{T}((\boldsymbol{x}\ , \boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{2y} + \boldsymbol{1}, \boldsymbol{x})$

f) $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{T}\ ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{2y}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

g) $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{M}_{nxn} \to \mathbb{R} / \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{a_{11}})^2 + (\boldsymbol{a_{12}})^2$

Solución

a) $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} / \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{v}|$

Dados *u = (u₁, u₂, u₃)* y *v = (v₁, v₂, v₃)* vectores del dominio y *k* un escalar, analizamos la primera condición:

T (u+v)= T ((u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)) =

$$|(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)| = \sqrt[2]{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 + (u_3 + v_3)^2}$$

$$T(u) + T(v) = T\big((u_1, u_2, u_3)\big) + T\big((v_1, v_2, v_3)\big) = |(u_1, u_2, u_3)| + |(v_1, v_2, v_3)|$$
$$= \sqrt[2]{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2} + \sqrt[2]{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

Teniendo en cuenta que $\sqrt[2]{u + v} \neq \sqrt[2]{u} + \sqrt[2]{v}$, se concluye que T (u + v) ≠ T (u) + T (v).

Por consiguiente, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} / T(v) = |v|$ *no verifica la condición de aditividad.*

Luego, T no es una transformación lineal.

b) $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{M}_{2x2} \to \mathbb{R} / \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A})$

Sean A y B matrices de M_{2x2}, y sea *k* un escalar. Se analiza la primera condición:

T(A + B) = tr(A + B) = tr(A) + tr (B) = T (A) + T(B)

↓ ↓

(por propiedad de (por definición de T)

traza de una matriz)

Por lo tanto, *T(A + B) = T(A) + T (B)*

A continuación, se estudia la segunda condición:

T (k.A) = tr (k. A) = k. tr (A)   (por propiedad de traza de una matriz)

k. T (A) = k. tr (A)

Luego, *T (k. A) = k. T(A)*

Se concluye así que $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{nxn}} \to \mathbb{R}/\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A})$*es una transformación lineal.*

c) T: $\boldsymbol{P_2} \to \boldsymbol{P_1}/\boldsymbol{T}((\boldsymbol{ax^2} + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c})) = \boldsymbol{2ax} - \boldsymbol{b}$

Para comenzar, definimos el espacio vectorial P_2 *de los* polinomios de grado menor o igual a 2 unidos al polinomio nulo y el espacio vectorial P_1 *de los* polinomios de grado menor o igual a 1 unidos al polinomio nulo.

Sean p(x) = ax^2 + bx + c y q(x) = dx^2 + ex + f polinomios del espacio vectorial P_2, y sea *k* un escalar. Por definición de suma de polinomios, se tiene

p(x) + q(x) = (a + d)x^2 + (b + e) x + (c + f),

y según la multiplicación de un escalar *k* por un polinomio p(x), resulta

k. p(x) = *k*.ax^2 + *k*.bx + *k*.c

Primera condición de transformación lineal:

T (p(x) + q(x)) = T((ax^2 + bx + c) + (dx^2 + ex + f)) = T((a + d)x^2 + (b + e) x + (c + f))

= (2. (a + d)x– (b + e) = 2ax + 2dx –b – e

T (p(x)) + T (q(x)) = T((ax^2 + bx + c)) + T((dx^2 + ex + f)) = (2ax –b) + (2dx –e) = 2ax + 2dx –b – e

Por tanto, T (p(x) + q(x)) = T(p(x)) + T(q(x))

Segunda condición:

T (*k*. p(x)) = T(*k*. (ax^2 + bx + c)) = T ((*k*.ax^2 + *k*.bx + *c.k)*) = 2.*k*ax –*k*.b = *k*. (2ax – b)

= *k.* T((ax^2 + bx + c)) = *k*. T(p(x))

Luego, T (k. p(x)) = k. T (p(x))

Por consiguiente, $\boldsymbol{T}$*:* $\boldsymbol{P_2} \rightarrow \boldsymbol{P_1}/\boldsymbol{T}((\boldsymbol{ax^2}+\boldsymbol{bx}+\boldsymbol{c})) = \boldsymbol{2ax}-\boldsymbol{b}$ *es una transformación lineal.*

d) $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{M_{2x2}}/\boldsymbol{T}((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \end{bmatrix}$

Sean $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$ vectores de $\mathbb{R}^2$ y k un escalar.

Primera condición:

T (u + v) = T (($x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$)) = $\begin{bmatrix} (x_1+x_2)+(y_1+y_2) & 0 \\ 0 & (x_1+x_2)+(y_1+y_2) \end{bmatrix}$

T (u) + T (v) = T ((x_1, y_1)) + T ((x_2, y_2)) = $\begin{bmatrix} x_1+y_1 & 0 \\ 0 & x_1+y_1 \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} x_2+y_2 & 0 \\ 0 & x_2+y_2 \end{bmatrix}$ =

$\begin{bmatrix} (x_1+y_1)+(x_2+y_2\,) & 0+0 \\ 0+0 & (x_1+y_1)+(x_2+y_2\,) \end{bmatrix}$=

$\begin{bmatrix} (x_1+x_2)+(y_1+y_2) & 0 \\ 0 & (x_1+x_2)+(y_1+y_2) \end{bmatrix}$

Es posible observar que T (u + v) = T (u) + T (v)

Se estudia, a continuación, la segunda condición:

T(k.u)=T(k.(x_1,y_1))=T((kx_1,ky_1))== $\begin{bmatrix} (kx_1+ky_1) & 0 \\ 0 & (kx_1+ky_1) \end{bmatrix}$ =

$\begin{bmatrix} k.(x_1+y_1) & 0 \\ 0 & k.(x_1+y_1) \end{bmatrix}$=

= k. $\begin{bmatrix} x_1+y_1 & 0 \\ 0 & x_1+y_1 \end{bmatrix}$ = k. (x_1, y_1) = k. T (u)

Luego, T (k. u) = k. T (u)

Por consiguiente, $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{M_{2x2}}/\boldsymbol{T}((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \end{bmatrix}$ *es una transformación lineal.*

e) $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3/\boldsymbol{T}((\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{2y}+\boldsymbol{1}, \boldsymbol{x})$

Sean $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$ vectores de $\mathbb{R}^2$ y k un escalar. Se analiza la primera condición:

T (u + v) = $T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = ((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), 2.(y_1 + y_2) + 1, (x_1 + x_2))$

$= ((x_1 - y_1) + (x_2 - y_2), (2y_1 + 2y_2) + 1, (x_1 + x_2))$

T (u) + T (v) = $T((x_1, y_1)) + T((x_2, y_2)) = (x_1 - y_1, 2y_1 + 1, x_1) + (x_2 - y_2, 2y_2 + 1, x_2)$

$= ((x_1 - y_1) + (x_2 - y_2), (2y_1 + 1) + (2y_2 + 1), (x_1 + x_2))$

$= ((x_1 - y_1) + (x_2 - y_2), (2y_1 + 2y_2) + 2, (x_1 + x_2))$

En consecuencia, T (u + v) ≠ T (u) + T (v)

Luego, $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{T}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{2y} + \boldsymbol{1}, \boldsymbol{x})$ *no es una transformación lineal.*

f) $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{T}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{2y}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

Sean $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$ vectores de $\mathbb{R}^2$ y k un escalar.

Primera condición:

T (u + v) = $T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = ((x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2), (y_1 + y_2), (x_1 + x_2))$

$= ((x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2), (y_1 + y_2), (x_1 + x_2)) = (x_1 - 2y_1 + x_2 - 2y_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2)$

$= (x_1 - 2y_1, y_1, x_1) + (x_2 - 2y_2, y_2, x_2) = T((x_1, y_1)) + T((x_2, y_2))$ = T (u) + T (v)

Por lo tanto, se verifica que T (u + v) = T (u) + T (v)

A continuación, se examina la segunda condición:

T (*k*. u) = $T((kx_1, ky_1)) = (kx_1 - 2ky_1, ky_1, kx_1) = k.(x_1 - 2y_1, y_1, x_1) = k.$ T (u)

Luego, T (*k*. u) = *k*. T (u)

Por consiguiente, $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{T}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{2y}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ *es una transformación lineal.*

g) $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{M_{nxn}} \to \mathbb{R} / \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{a_{11}})^2 + (\boldsymbol{a_{12}})^2$

Sean A y B matrices de M_{nxn}, y sea *k* un escalar. Analizamos la primera condición:

T (A + B) =

$$=T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots \\ b_{n1} & b_{n2}\dots & b_{nn} \end{bmatrix}\right) =$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots\ a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots\ a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\quad\ \vdots \\ a_{n1}+b_{1n} & a_{n2}+b_{2n}\dots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}\right) =$$

$= (a_{11} + b_{11})^2 + (a_{12} + b_{12})^2 = (a_{11})^2 + 2.a_{11}.b_{11} + (b_{11})^2 + (a_{12})^2 + 2.a_{12}.\ b_{12} + (b_{12})^2$

$$T(A) + T(B) = T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots \\ b_{n1} & b_{n2}\dots & b_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$= ((a_{11})^2 + (a_{12})^2) + ((b_{11})^2 + (b_{12})^2)$

Luego, T (A + B) ≠ T(A) + T (B), es decir T no verifica la condición de aditividad.

Por lo cual, $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{M_{nxn}} \to \mathbb{R}/\boldsymbol{T(A)} = (\boldsymbol{a_{11}})^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{a_{12}})^{\mathbf{2}}$ *no es una transformación lineal.*

………

2) Para aquellas funciones que sean transformaciones lineales en el ejercicio 1:

a) Determine N(T), encuentre una base del mismo y la dimensión del espacio del espacio N(T)
b) Determine el conjunto imagen de T, encuentre una base del mismo y la dimensión del espacio Im(T)
c) Verifique el teorema de la dimensión.

Solución

I) La función $T: M_{2x2} \to \mathbb{R}/T(A) = tr(A)$ es una transformación lineal.

a) Para determinar el núcleo de la transformación, por definición

$$N(T) = \{A \epsilon M_{2x2}/T(A) = 0\}$$

Además, T(A) = *tr(A)*. Por lo tanto, estarán en el núcleo aquellas matrices A ϵ M_{2x2} que verifiquen *tr (A)* = 0, y como A ϵ M_{2x2}, *tr (A)* = $a_{11} + a_{22}$, se tiene $a_{11} + a_{22} = 0$

En consecuencia, $a_{11} = -a_{22}$ siendo a_{22} número real.

Por lo tanto, $\boldsymbol{N(T) = \{A \epsilon M_{2x2} / a_{11} = -a_{22},\ a_{22} \epsilon\, \mathbb{R}\}} = \left\{\begin{bmatrix} -a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \epsilon\, M_{2x2}\right\}$

Luego, para determinar una base para el núcleo, se tiene que toda matriz del núcleo de la transformación resulta posible expresarla como combinación lineal del siguiente modo

$$\begin{bmatrix} -a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{22}.\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_{12}.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21}.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde el conjunto $\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ genera a N(T) y además es LI, por lo cual determina una base para el conjunto N(T). Es decir,

$\boldsymbol{B_{N(T)}} = \left\{\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right\}$ y por tanto, **dim(N(T)) = 3**.

b) Por definición, la imagen de la transformación:

$$Im(T) = \{x \,\epsilon\, \mathbb{R} / \exists\, A \,\epsilon\, M_{2x2} \wedge T(A) = x\}$$

Además, T(A) = *tr (A),* por tanto *tr(A) = x*

Por lo que $a_{11} + a_{22} = x$, queda así planteado un sistema de ecuaciones que a continuación se resuelve

$$[1 \quad 1 \quad \mathrm{I}\, x]$$

Este sistema será compatible para cualquier valor real que tome x, por consiguiente

$$\boldsymbol{Im(T) = \{x \,\epsilon\, \mathbb{R}\} = \mathbb{R}}$$

$\boldsymbol{B_{Im(T)}}$ **= {1},** y **dim$\mathbf{I_m}$(T) = 1**

c) Teorema de la dimensión:

dim(V) = dim (N(T)) + dim(I_m(T))

4 = 3 + 1 (según lo concluido)

Es decir, se observa que la transformación lineal verifica el teorema de la dimensión.

II) $T: P_2 \to P_1 / T((ax^2+bx+c)) = 2ax - b$

Por definición, el núcleo de la transformación es

$$N(T) = \{(ax^2+bx+c)\ \epsilon\ P_2 / T((ax^2+bx+c)) = 0x+0\}.$$

Además se sabe que

T $((ax^2+bx+c))$ = *2ax* - *b*. Por lo tanto, estarán en el núcleo aquellos polinomios p(x) ϵ P_2 que verifiquen*2ax* - *b* = 0x + 0, de donde resulta:

$$\begin{cases} 2ax = 0 \\ -b = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, a = 0, b = 0 y c $\epsilon\ \mathbb{R}$. Es decir, $\boldsymbol{N(T) = \{(0x^2+0x+c)\ \epsilon\ P_2\} = \{c\ \epsilon\ P_2\}}$

Por lo que el núcleo de la transformación es el conjunto de todos los polinomios constantes unidos al polinomio nulo.

Para la obtención de una base del N(T) se consideran los elementos de este conjunto, es decir, los polinomios c de $\mathbb{R}$. Los mismos pueden escribirse como combinación lineal de vectores de $\mathbb{R}$, como $\mathrm{c} = \mathrm{c}.1$. Por lo tanto, $\boldsymbol{B_{N(T)}}$ **= {1} y dim N(T) = 1**

b) Por definición, la imagen de la transformación T es

$$Im(T) = \{(mx+n)\ \epsilon\ P_1 / T((ax^2+bx+c)) = mx+n\}.$$

Además, T$((ax^2+bx+c))$ = 2ax – b, por lo cual se tiene que 2ax – b = mx + n.

Luego, por igualdad de polinomios, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a = m \\ -b = n \end{cases}$$

Se resuelve el sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \vdots & m \\ 0 & -1 & \vdots & n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & m/2 \\ 0 & -1 & \vdots & n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & m/2 \\ 0 & 1 & \vdots & -n \end{bmatrix}$$

Este sistema será compatible cualesquiera sean los valores reales que tomen m y n. Por consiguiente, resulta que $\boldsymbol{Im(T) = \{(mx+n)\epsilon\ P_1\} = P_1}$

La imagen de la transformación es el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a 1 unidos al polinomio nulo. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{B}_{\mathbf{Im(T)}} = \{\mathbf{1, x}\} \text{ y } \mathbf{dim(I_m(T)) = 2}$$

c) **dim(V) = dim(N(T)) + dim(I_m(T))**

3 = 1 + 2

3 = 3

III) $T: \mathbb{R}^2 \to M_{2x2} / T((x, y)) = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{bmatrix}$

a) Por definición, el núcleo de la transformación es

$$N(T) = \left\{(x, y) \epsilon\, \mathbb{R}^2 / T((x, y)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Además, por definición de la transformación lineal dada, $T((x, y)) = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{bmatrix}$ de donde resulta:

$$\begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, por igualdad de matrices se obtiene

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 0=0 \\ x+y=0 \\ 0=0 \end{cases},$$

de donde y = - x.

Por lo tanto, **N(T) = {(x, y) $\boldsymbol{\epsilon}$ $\mathbb{R}^2$ / y = - x } =** $\{(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\epsilon}\, \mathbb{R}^{\mathbf{2}}\}$

A los elementos (x, - x) del núcleo de la transformación T se los puede escribir como una combinación lineal de la forma (x, - x) = x. (1, -1). De donde

$$\boldsymbol{B}_{\mathbf{N(T)}} = \{\mathbf{(1, -1)}\} \text{ y } \mathbf{dim(N(T)) = 1}$$

b) Por definición, la imagen de la transformación es

$$Im(T) = \{A \,\epsilon\, M_{2x2} / \exists\, (x, y) \,\epsilon\, \mathbb{R}^2 \wedge T(x, y) = A\}$$

En este caso, $T((x,y)) = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{bmatrix}$. Por lo tanto, $\begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Por igualdad de matrices resulta

$$\begin{cases} x + y = a_{11} \\ 0 = a_{12} \\ 0 = a_{21} \\ x + y = a_{22} \end{cases}$$

de donde $a_{11} = a_{22}$ y $a_{12} = a_{21} = 0$.

Por consiguiente, $\boldsymbol{Im(T)} = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{11}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon\, M_{2x2}} \right\}$. Es decir, la imagen de la transformación es el conjunto de las matrices escalares de orden 2x2.

Además, cada matriz de la forma $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix}$ puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, $\boldsymbol{B_{Im(T)}} = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} \right\}$y**dim($I_m$(T)) = 1**

c) **dim(V) = dim(N(T)) + dim(I_m(T))**

2 = 1 + 1

2 = 2

IV) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T\,((x,y)) = (x - 2y, y, x)$

a) Por definición, el núcleo de la transformación es $N(T) = \{(x,y) \epsilon\, \mathbb{R}^2 / T(x,y) = (0,0,0)\}$.

Por la definición de la transformación, se tiene que $T((x,y)) = (x - 2y, y, x)$.

De donde resulta que (x – 2y, y, x) = (0, 0, 0).

Por igualdad de vectores

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Por tanto, $\boldsymbol{N(T)} = \{(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) \boldsymbol{\epsilon}\, \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}\}$y en consecuencia,**dim(N(T)) = 0**

b) La imagen de la transformación, por definición es

$$Im(T) = \{(a, b, c) \epsilon\ \mathbb{R}^3 / \exists\ (x, y) \epsilon\ \mathbb{R}^3 \wedge T((x, y)) = (a, b, c)\}.$$

Además,T((x, y)) = (x – 2y, y, x). Por lo tanto, (x – 2y, y, x) = (a, b, c) y por igualdad de vectores resulta

$$\begin{cases} x - 2y = a \\ y = b \\ x = c \end{cases}$$

Se resuelve el sistema por el método de Gauss - Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & \vdots\ b \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & \vdots\ b \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & \vdots \quad b \\ 0 & -2 & a-c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 \vdots & b \\ 0 & 0 & a-c+2b \end{bmatrix}$$

El sistema planteado será compatible siempre que

a – c + 2b = 0 es decir, a = c – 2b para c, b números reales cualesquiera.

Por lo tanto,$\boldsymbol{Im(T)} = \{(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{2b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \boldsymbol{\epsilon}\ \mathbb{R}^3\}$.

Además, cada elemento de la imagen puede escribirse como

(c – 2b, b, c) = b. (-2, 1, 0) + c. (1, 0, 1), siendo b y c escalares reales

De donde se concluye que$\boldsymbol{B_{Im(T)}} = \{(\boldsymbol{-2}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}); (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})\}$ y **dim(I_m(T)) = 2**

c) **dim (V) = dim(N(T)) + dim (I_m(T))**

2 = 0 + 2

2 = 2

....

3) Para la siguiente transformación lineal $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{T}\left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$**:**

a) halle T(2, 4) y

b) halle la preimagen de (-1,2,2).

Solución

a) Para hallarT(2,4), se sustituye el vector (2,4) perteneciente al dominio $\mathbb{R}^2$ en la transformación matricial,

$$\boldsymbol{T}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{4}\end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{4}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{4}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{10}\\ \mathbf{12}\\ \mathbf{4}\end{bmatrix}$$

b) Hallar la preimagen, consiste en hallar los vectores del dominio que tengan como imagen al vector (-1,2,2) en el codominio, la transformación entonces es

$$\boldsymbol{T}\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{4}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{-1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{2}\end{bmatrix}$$

Si se opera entre matrices, se observa que se obtiene un sistema de ecuaciones

$$x + 2y = -1$$
$$-2x + 4y = 2$$
$$-2x + 2y = 2$$

Se resuelve el sistema y se obtienen los valores de $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$

Es decir, el vector (-1,0) ϵ $\mathbb{R}^2$ tiene como imagen, bajo la transformación matricial

$$\boldsymbol{T}\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{4}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}\text{,al vector }\begin{bmatrix}\mathbf{-1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{2}\end{bmatrix} \epsilon\ \mathbb{R}^3.$$

……

4) Sea $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{g}: [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \to \mathbb{R}/\boldsymbol{g\ es\ continua}\}$ y sea $\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{f}: [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \to \mathbb{R}/\ \boldsymbol{f}'\ \boldsymbol{es\ continua}\}$.

a) Verifique que la función T definida de W en V que aplica f hacia su derivada, es decir T(f) = f ´, es una transformación lineal.

b) Encuentre el núcleo de la transformación lineal T.

Solución

a) Sean f y g funciones de W y sea *k* un escalar.

1) T(f + g) = (f + g)´ = f´+ g´ = T(f) + T(g)

↓ ↓

(por definición de T) (por propiedad de
la derivada de la suma)

Luego, T(f + g) = T(f) + T(g). Es decir, la función T verifica la condición de aditividad.

2) T (*k*. f) = (*k*. f)´ = *k*. f´ = *k*. T (f)

↓ ↓

(por definición de T) (por propiedad de la derivada del producto de un escalar por una función)

Por tanto, T (*k*. f) = *k*. T (f). Es decir, T cumple la condición de homogeneidad.

En consecuencia, **la función T es una transformación lineal.**

b) Por definición, el núcleo de la transformación es $N(T) = \{f \epsilon W/T(f) = 0\}$, y como $T(f) = f'$, resulta que *f´= 0.* Luego,

$$\boldsymbol{N(T) = \{f \epsilon W/ f' = 0\} = \{f \epsilon W/ f\ es\ constante\}}$$

Por lo tanto, el núcleo de la transformación dada es el conjunto de todas las funciones $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas constantes.

……

5) Sea A una matriz de 6x4 tal que A.X = 0 tiene únicamente la solución trivial y sea $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ tal que T(X) = A. X. Halle el rango y la nulidad de T.

Solución

El núcleo de la transformación está determinado por todos los elementos X de $\mathbb{R}^4$que verifican que *T(X) =* ***0***(***0*** ϵ $\mathbb{R}^6$). Además, por definición de transformación matricial se sabe que T(X) = A.X Por tanto, pertenecen al núcleo de la transformación aquellos elementos que verifican que A.X = **0**.

Por otro lado, A.X = **0** tiene únicamente la solución trivial, de lo cual se deduce que $\boldsymbol{N(T)} = \{\mathbf{0}\ \epsilon\ \mathbb{R}^4\}$, y en consecuencia***nul(T)*** *= 0.*

Luego, por teorema de la dimensión se tiene dim(V) = nul(T) + rango(T)

4 = 0 + rango(T)

4 = rango(T)

....

6) **Para** $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X}$**. Determine el núcleo y la imagen de la transformación matricial dada. Interprete geométricamente.**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Solución

A partir de la definición de transformación lineal matricial, se tiene

$$T(X) = A.X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Por definición, el núcleo de la transformación matricial es

$N(T) = \{X \epsilon\ \mathbb{R}^3 / T(X) = A.X = 0\}$. Es decir, pertenecen al núcleo de la transformación todos los vectores de $\mathbb{R}^3$, para los cuales se verifica que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el SELH por el método de Gauss – Jordan, se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Por el teorema de Rouché- Frobenius resulta $\rho(A) = \rho\ (A') = 2 \neq n = 3$, es decir se trata de un sistema compatible indeterminado con 3 – 2 = 1 variable libre, en este caso, x_3, siendo $x_3\ de\ \mathbb{R}$.

El SELH equivalente es
$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

De donde$x_1 = 2x_3$ y $x_2 = -x_3$,$x_3 \epsilon \mathbb{R}$

Por lo tanto

$$\boldsymbol{N(T) = \{(2x_3, -x_3, x_3)/\ x_3\ \epsilon\ \mathbb{R}\}}$$

El núcleo de la transformación es una recta que pasa por el origen cuya ecuación vectorial es

$$\boldsymbol{(x, y, z) = \ x_3.(2, -1, 1), x_3}\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

Ahora bien, por definición, la imagen de la transformación matricial queda definida como

$Im(T) = \{B\ \epsilon\ \mathbb{R}^3/T(X) = A.X = B\} =$ IR^3. Es decir, pertenecen a la imagen de la transformación todos los vectores de $\mathbb{R}^3$.

Puesto que T(X) = A. X y A. X = B, se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Resolvemos, a continuación, el sistema planteado por el método de Gauss

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \boldsymbol{b_1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \vdots & \boldsymbol{b_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{b_3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \boldsymbol{b_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \vdots & \boldsymbol{b_2 - b_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{b_3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \boldsymbol{b_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \vdots & \boldsymbol{-b_2 + b_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{b_3} \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \boldsymbol{b_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \vdots & \boldsymbol{-b_2 + b_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{b_3 + b_2 - b_1} \end{bmatrix}$$

Analizando la matriz escalonada, y de acuerdo al Teorema de Rouché – Frobenius, el sistema será compatible siempre que se cumpla que

$$b_3 + b_2 - b_1 = 0,$$

es decir,

$b_3 = -b_2 + b_1$, *siendo* b_1*y* b_2 *números reales*

Se concluye que

$$\boldsymbol{Im(T) = \{(b_1, b_2, b_1 - b_2)\epsilon\ \mathbb{R}^3\}}$$

La imagen de la transformación es un plano que pasa por el origen, cuya ecuación vectorial es

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{b_1}.(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) + \boldsymbol{b_2}.(\mathbf{0}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}); b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

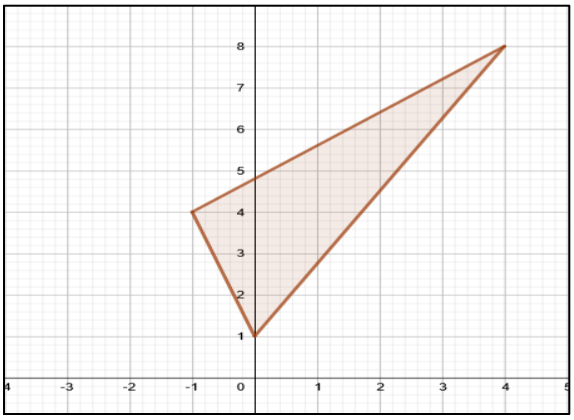
……

7) Dados los vectores (0,1); (4,8); (-1,4)en $\mathbb{R}^2$que determinan los vértices de un triángulo, encuentre la imagen de cada uno de ellos a partir de la transformación

T(x, y)= (x, -y) y luego determine de qué transformación geométrica se trata.

Solución

Se representa el triángulo a partir de los vectores dados.



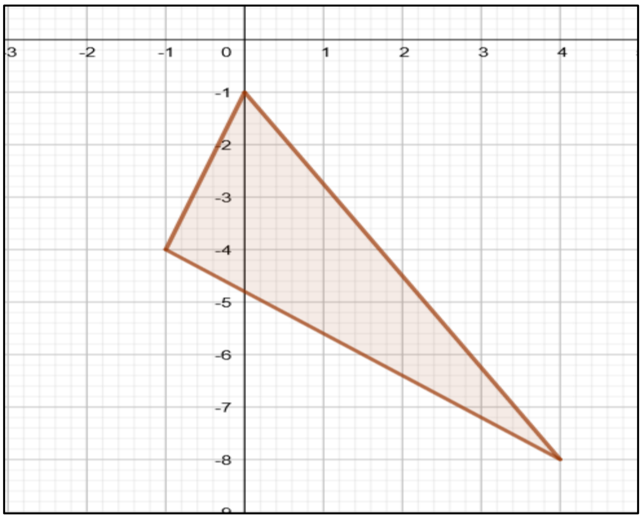
El transformado de cada uno de los vectores dada la ley de transformación

$$T(x, y) = (x, -y)$$

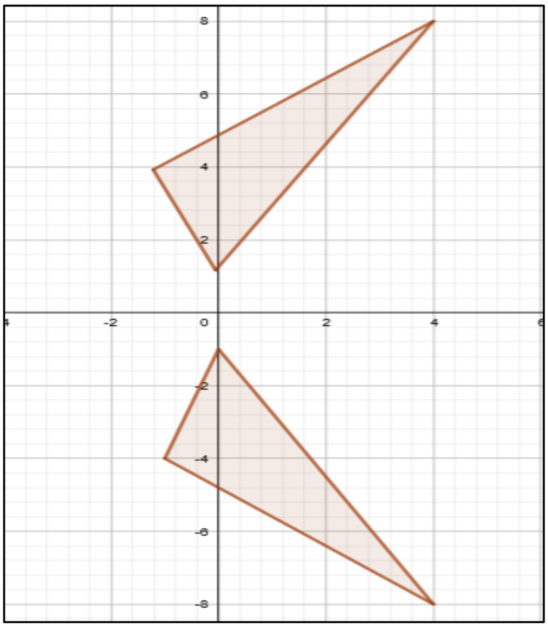
es

$$T(0\,,1) = (0\,,-1)$$
$$T(4\,,8) = (4\,,-8)$$
$$T(-1\,,4) = (-1\,,-4)$$

La representación geométrica de los nuevos vectores es:



Si se considera el triángulo inicial determinado por los vectores dados en $\mathbb{R}^2$, se obtiene luego de la transformación un triángulo con vértices en los puntos (0,-1); (4,-8); (-1,-4).



Se observa que la transformación geométrica es una reflexión respecto al eje x.

……

8) Sea T una aplicación lineal de IR^2 en IR^2 tal que T(1, 0) = (1, 1) y T(0, 1) = (-1,1).

Halle T(-2,1).

Solución

El conjunto de vectores$\{(1{,}0); (0{,}1)\}$ constituye una base de IR^2, por lo tanto el vector

(-2, 1) se puede expresar como combinación lineal de ellos en función de los escalares α y β como sigue

$$(-2, 1) = \alpha\ (1, 0) + \beta\ (0, 1) \qquad (A)$$

De donde resulta

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Reemplazando los valores obtenidos para α y β en (A) se tiene:

$$(-2, 1) = (-2).\ (1, 0) + 1.\ (0, 1)$$

Luego, aplicando la función T a ambos miembros de la igualdad, resulta:

T(-2, 1) = (-2). T(1, 0) + 1. T(0, 1)

T(-2, 1) = (-2). (1, 1) + 1. (-1, 1)

T(-2, 1) = (-2, -2) + (-1, 1)

T(-2, 1) = (-2 – 1, -2 + 1)

T(-2, 1) = (-3, -1)

Por consiguiente, se concluye que

T(-2, 1) = (-3, -1)

………

9) Sea T una aplicación lineal de M_{2x2} en M_{2x2} tal que

$\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$;

$\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

Halle $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{bmatrix}\right)$.

Solución

Se escribe el vector $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ como combinación lineal en función de los vectores de la base de M_{2x2}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \alpha.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \delta.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (A)$$

Resulta:

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 3, \qquad \gamma = -1, \qquad \delta = 4$$

Reemplazando los valores obtenidos en (A) se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 1.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1).\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se aplica la función T a ambos miembros de la igualdad:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right) = 1.T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + 3.T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + (-1).T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + 4.T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right) = 1.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 3.\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + (-1).\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 4.\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

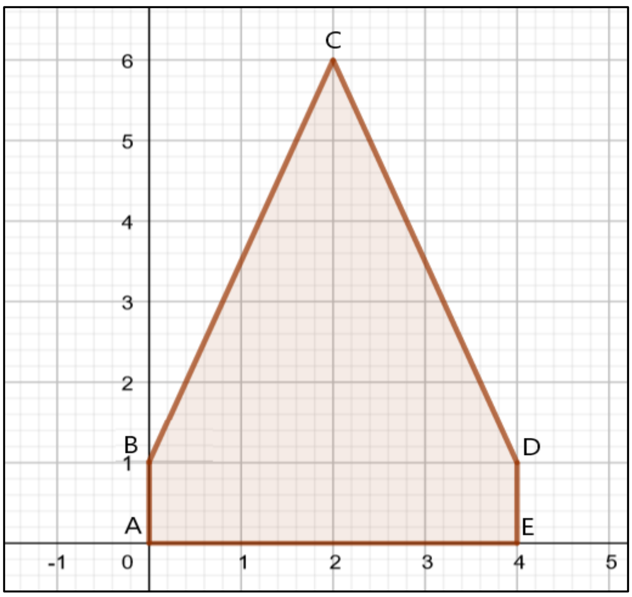
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Luego, se concluye que

$$\boldsymbol{T\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}}$$

……

10) La "casa" que se muestra en la figura, se construyó a partir de los pares ordenados (0,0); (4,0); (4,1); (2,6) (0,1); (0,0) por medio de los segmentos de recta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$



a) Arme una matriz S y calcule la transformación lineal de esta figura siendo$T(S) = A.S$, donde A= $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$. Represente gráficamente.

Solución

a) Con el fin de encontrar simultáneamente los transformados de los puntos del plano que se corresponden con los vértices de la "casa" se ordenan en columnas los pares ordenados dados en una matriz S.

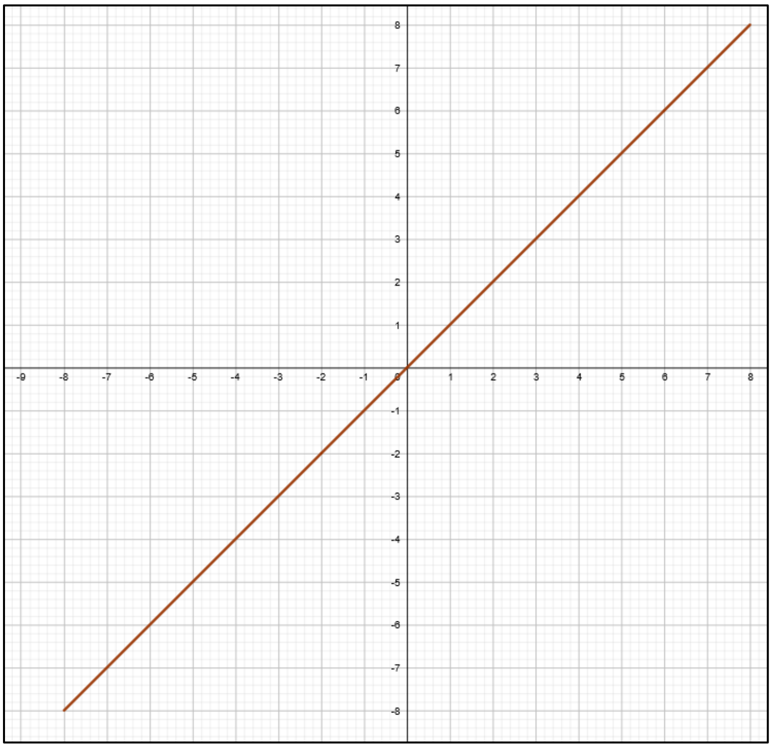
S=$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Para obtener las imágenes por definición de la transformación lineal $T(S) = A.S$, se tiene

$$T(S) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(S) = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 6 & -8 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & -8 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

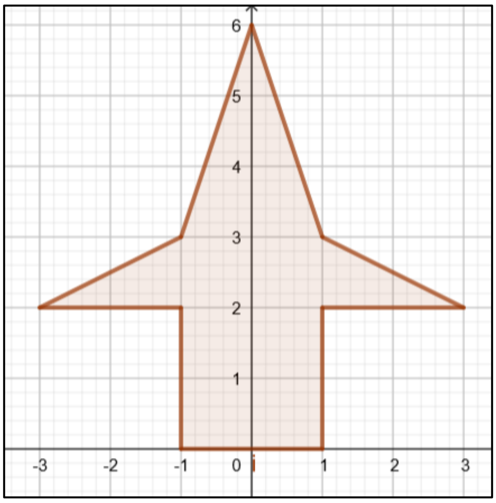
La nueva representación se obtiene a partir de unir los segmentos de recta de los puntos del plano (0,0); (8,8); (6,6); (-8,-8); (-2,-2); (0,0) obtenidos como imagen.



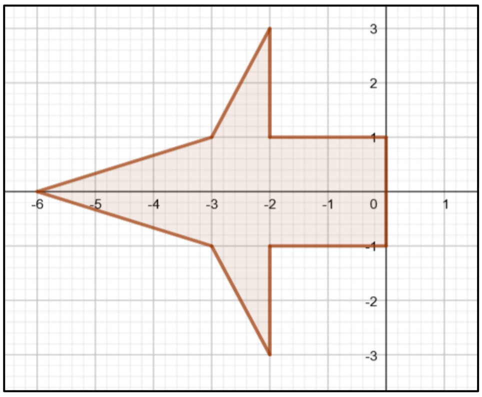
Luego se observa que la transformación geométrica de la figura inicial es una recta que pasa por el origen.

11) **El "avión de combate" que se muestra en la figura se construyó conectando el conjunto de puntos dados por medio de segmentos de rectas**

$$\{(\mathbf{1},\mathbf{0});\ (\mathbf{1},\mathbf{2});(\mathbf{3},\mathbf{2}),(\mathbf{1},\mathbf{3});\ (\mathbf{0},\mathbf{6});(-\mathbf{1},\mathbf{3});(-\mathbf{3},\mathbf{2});(-\mathbf{1},\mathbf{2});(-\mathbf{1},\mathbf{0});(\mathbf{1},\mathbf{0})\}$$



Determine la transformación lineal que, aplicada al "avión de combate", produce la imagen que se muestra en la siguiente figura



Solución

Para hallar la ley de transformación, sabiendo que por definición de transformación matricial , $T(S) = A.S$, es necesario encontrar la matriz A.

Según se puede observar la transformación es una TL en el plano, es decir, definida de $\mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2$.

Es posible hallar cualquier vector del dominio como combinación lineal de los vectores de una base, por lo tanto, al trabajar sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, se consideran dos vectores linealmente independientes de forma arbitraria, en este caso, pueden ser (-1,0) y (0,6).

La combinación lineal de los vectores de una base del dominio, permite hallar cualquier vector perteneciente al mismo. Es decir,

$$\alpha.(-1,0) + \beta.(0,6) = (x, y)\mathit{(1)}$$

A partir de la combinación lineal, es posible obtener $\alpha\ y\ \beta$

$$\alpha = -x$$

$$\beta = \frac{1}{6}y$$

Aplicando el transformado en ambos miembros de *(1)* tenemos:

$$\alpha.T(-1,0) + \beta.T(0,6) = T(x, y)\mathit{(2)}$$

Se observa que el transformado de cada uno de los vectores de la base es

$$T(-1,0) = (0, -1)$$

$$T(0,6) = (-6,0)$$

Si se reemplazan los valores α, β y los transformados de los vectores en la ecuación *(2)*, se tiene

$$-x.(0, -1) + \frac{1}{6}y.(-6,0) = T(x, y)$$

Es decir, $T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -0x - 6.\frac{1}{6}y \\ -1.(-x) + 0.\frac{1}{6}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$

Finalmente, la ley de transformación en forma cartesiana es

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (-y, x)$$

Se observa que es una transformación de rotación en sentido antihorario de ángulo ϴ= 90°.