Valores y Vectores Propios o Valores y Vectores Característicos o Autovalores y Autovectores o Eigenvalores y Eigenvectores

El problema del eigenvalor o valor propio es uno de los más importantes del álgebra lineal, se puede plantear como sigue. Si A es una matriz de nxn, ¿hay vectores $\boldsymbol{x}$ diferentes de cero en IR^n tales que A$\boldsymbol{x}$ sea un múltiplo escalar de $\boldsymbol{x}$?
Los autovalores y autovectores se utilizan principalmente en la solución de sistemas dinámicos, esto es, en sistemas que son función del tiempo.
Los términos *eigenvalor* y *eigenvector* provienen del término alemán *eigenwert*, que significa valor propio.

Definición Sea A una matriz real de nxn. El escalar λ es un **autovalor** de A si existe un vector $\boldsymbol{x} \in IR^n$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ tal que

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

Al vector $\boldsymbol{x}$ se lo llama un **autovector** de A correspondiente a λ.

Observaciones

1) A es la matriz asociada estándar del operador lineal T sobre IR^n, pues verifica que

   A$\boldsymbol{x}$ = T($\boldsymbol{x}$), por lo tanto, se habla indistintamente de autovalores y autovectores de la matriz A o del operador lineal T.

2) A$\boldsymbol{x}$ es múltiplo escalar de $\boldsymbol{x}$.

3) La ecuación $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ tiene dos incógnitas, λ y $\boldsymbol{x}$.

4) En el plano IR^2 y en el espacio geométrico IR^3, los autovectores de A son los vectores de IR^2 o (excluyente) de IR^3 que bajo la acción de A no cambian de dirección, es decir, son los vectores paralelos (en la misma dirección) a $\lambda \boldsymbol{x}$. La multiplicación por A dilata ($\lambda > 1$), contrae ($0 < \lambda < 1$), o cambia el sentido ($\lambda < 0$) del vector $\boldsymbol{x}$, dependiendo del valor de λ.

Ejemplo 1 Muestre que $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es un autovector de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y encuentre el autovalor correspondiente.

Solución
Calculamos

$$A\,\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 5\,\boldsymbol{x},$$

de donde se sigue que $\boldsymbol{x}$ es un autovector de A.

Ejemplo 2 Muestre que 4 es un autovalor de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y encuentre todos los autovectores correspondientes a este autovalor.

Solución

Se debe demostrar que existe un vector $\boldsymbol{x} \neq 0$ tal que A$\boldsymbol{x}$ = 4$\boldsymbol{x}$, esta ecuación es equivalente a (A – 4I) $\boldsymbol{x}$ = **0.** Por lo tanto, se debe encontrar el espacio solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo anterior, es decir,

$$(A - 4I)\, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se sigue que el espacio solución es $E_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \in IR^2 \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in IR \right\}$, sin embargo, este espacio contiene todos los autovectores correspondiente a $\lambda = 4$ más el vector nulo que no es un autovector de A por definición.

Luego, los autovectores pedidos son de la forma $\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$ con $t \neq 0$, o equivalentemente, son los múltiplos distintos de cero del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Una base del espacio E_λ es el conjunto

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ y dim } (E_\lambda) = 1.$$

Cálculo de autovalores y autovectores

Teorema (cálculo de autovalores) Si λ es valor propio de la matriz A de nxn, entonces

$$\det (A - \lambda I) = 0.$$

Demostración

Por hipótesis, si λ es valor propio de la matriz A de nxn, por definición se tiene

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

Utilizando el álgebra matricial

$$A\boldsymbol{x} - \lambda I\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

o bien

$$(A - \lambda I)\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

La expresión (1) representa un sistema de ecuaciones lineales homogéneo compatible indeterminado, pues por definición, los autovectores $\boldsymbol{x}$ satisfacen $\boldsymbol{x} \neq 0$. Luego, la matriz de coeficientes del sistema, (A - λ I) de nxn es no inversible o singular. Por lo tanto,

det (A - λ I) = 0 que es la tesis o, equivalentemente, det (λ I - A) = 0.

.

Notas

La ecuación anterior se denomina **ecuación característica de A** y es de grado n en λ.

La expresión det(A - λ I) es un polinomio de grado n en λ y P(λ) se denomina **polinomio característico de A**, es decir, P(λ) = det (A - λ I)**.**

Según el **Teorema Fundamental del Álgebra**, cualquier polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos, tiene exactamente n raíces contando multiplicidades.

Se observa que los n escalares λ (raíces repetidas o distintas) que satisfacen la ecuación característica, son los autovalores de A. En otras palabras, cada matriz A de nxn con coeficientes reales o complejos, tiene n valores propios complejos contando multiplicidades.
El conjunto de todos los autovalores de A recibe el nombre de **espectro de A** y el autovalor λ de mayor valor absoluto recibe el nombre de **radio espectral**, es el radio de un círculo centrado en el origen del plano complejo que incluye todos los autovalores de A.

Ejemplo Determinar los autovalores de la matriz A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución
Utilizando la ecuación característica det(A - λ I) = 0, se tiene

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

o bien

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, son los autovalores de A.

Observar que la **multiplicidad algebraica** de cada autovalor en el ejemplo anterior es 1, se anota $M_{alg}(\lambda_1) = 1$, $M_{alg}(\lambda_2) = 1$. Recordar que la multiplicidad algebraica de cada raíz en una ecuación algebraica, es el número de veces que aparece dicho valor como raíz de la ecuación.

Cálculo o determinación de autovectores

Para cada valor propio λ encontrado, se resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéno

$$\mathbf{(A - \lambda I)}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

obtenido en (1), siendo **(A - λ I)** la matriz de coeficientes de nxn**,** ***x*** el vector de las incógnitas de nx1 y **0** el vector de términos independientes de nx1.
El espacio solución del sistema anterior, que contiene todos los vectores propios ***x*** correspondientes a λ, más el vector cero (no es vector propio de A por definición) se denomina **espacio propio** o **espacio característico** o **eigenespacio** o **autoespacio** y se anota E_λ, es decir,

$$E_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathrm{IR}^n \,/\, (A - \lambda I)\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

La base de este espacio vectorial (no es única) es útil porque contiene un número finito de vectores propios linealmente independientes y generadores de los infinitos autovectores correspondientes a un mismo valor λ.
La dimensión del espacio E_λ se denomina en este contexto, **multiplicidad geométrica de λ y** se anota $M_{geo}(\lambda)$**.** Se observa que

$$\dim(E_\lambda) = g,$$

donde g denota los grados de indeterminación o de libertad del sistema lineal homogéneo

$$(A - \lambda I)\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

siendo $g \geq 1$ pues E_λ no es un espacio vectorial nulo. También, $\dim(E_\lambda)$ = g representa la nulidad de la matriz A - λ I (dimensión del núcleo del operador lineal T(***x***) = (A - λ I) ***x***).
Además se verifica que

$$0 < M_{geo}(\lambda) \leq M_{alg}(\lambda)$$

Ejemplo Calcular los vectores propios de A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Solución
Se resuelve la ecuación característica

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

siendo las raíces: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ y $\lambda_3 = 5$.
Se observa que $M_{alg}(\lambda_1 = 1) = 1$, $M_{alg}(\lambda' = 5) = 2$, la traza(A) es igual a la suma de los valores propios, tr(A) = 1 + 5 + 5 = 11 y determinante de A es igual al producto de los valores propios, det(A) = 1 · 5 · 5 = 25.
Para obtener los autovectores, se resuelve el sistema (A - λ I) ***x*** = **0** para cada valor de λ.

Para $\lambda' = 5$, se tiene el sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando el teorema de Rouché - Frobenius y resolviendo, se obtienen los grados de libertad g = 2 y el espacio característico

$$E_{\lambda'} = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ t \\ s \end{bmatrix} \in IR^3 \right\}$$

Como

$$\begin{bmatrix} -t \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ para } s, t \in IR;$$

una base del espacio característico es

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Luego,

$$\dim(E_\lambda) = 2 = M_{geo}(\lambda' = 5) = g$$

Se observa que

$$M_{geo}(\lambda' = 5) = M_{alg}(\lambda' = 5) = 2$$

(La multiplicidad algebraica y geométrica de $\lambda' = 5$ coinciden).

Análogamente, se resuelve el sistema (A - λ I) $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ para $\lambda_1 = 1$ y se obtiene el siguiente espacio propio

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \in IR^3 \right\}.$$

Una base es

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

siendo

$$\dim (E_{\lambda_1}) = 1 = M_{geo}(\lambda_1 = 1) = g$$

(La multiplicidad algebraica y geométrica de $\lambda_1 = 1$ coinciden).

Propiedades de valores y vectores propios

1) Los valores propios de una matriz A y su transpuesta son iguales.

2) Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.

3) La suma de los valores propios de una matriz es igual a la traza de la matriz.

4) El producto de los valores propios de una matriz es igual al determinante de la matriz.

5) Si λ es valor propio de la matriz A de nxn inversible, $\lambda^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1}.
Equivalentemente, la matriz A es singular si, y sólo si $\lambda = 0$ es autovalor de A.

6) Si λ es valor propio de la matriz A de nxn, entonces $k\lambda$, con el escalar $k \neq 0$, es valor propio de kA (los vectores propios no cambian).

7) Si λ es valor propio de la matriz A de nxn, entonces λ^r, siendo r una potencia natural (r = 1, 2, 3, …), es valor propio de A^r (los vectores propios no cambian).

8) Si A es una matriz simétrica, entonces los autovalores son números reales y los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

9) Si la matriz A de nxn tiene n autovalores distintos (la multiplicidad algebraica de cada autovalor es 1), entonces tiene un conjunto de n autovectores linealmente independiente.

Ejercicio obligatorio Demostrar las propiedades 1), 2), 5), 6) y 7).

Diagonalización

Se acostumbra hacer referencia a la diagonalización de una matriz cuadrada A o también a la diagonalización del operador lineal T de matriz asociada estándar A.
La diagonalización, si es posible, es una transformación de semejanza de una matriz A a su forma diagonal, conservando los valores propios de A.
La ventaja de la transformación, es la sencillez que tendría la matriz A en su forma diagonal.
La mejor situación posible se logra cuando una matriz cuadrada es **semejante** a una matriz diagonal.

Definición Una matriz A de nxn es **diagonalizable**, si existe una matriz diagonal D tal que A sea semejante a D; es decir, si existe una matriz P inversible o no singular de nxn tal que

$$P^{-1}AP = D$$

Se dice que la matriz P **diagonaliza** a A.

Forma diagonal de una matriz o diagonalización de matrices

El teorema siguiente es una herramienta básica en el estudio de la diagonalización, pues revela la técnica para que algunas matrices se transformen en una matriz diagonal, conservando los autovalores.

Teorema Sea A una matriz de nxn con n vectores propios linealmente independientes. Si se colocan estos vectores como columnas de una matriz P, entonces

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \lambda_n \end{bmatrix}$$

donde λ_i con $i = 1, 2, \ldots, n$ es autovalor de A.

Demostración

Sea P la matriz nxn cuyas columnas son los vectores propios $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ linealmente independientes de A, es decir

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots\ldots\ldots & v_n \end{bmatrix}$$

Luego, el producto AP es la matriz nxn cuyas columnas son $A\boldsymbol{v_1}, A\boldsymbol{v_2}, \ldots, A\boldsymbol{v_n}$,

$$AP = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \ldots & Av_n \end{bmatrix}$$

Por definición de vector propio, remplazamos $A\boldsymbol{v_1}, A\boldsymbol{v_2}, \ldots, A\boldsymbol{v_n}$, por $\lambda_1\boldsymbol{v_1}, \lambda_2\boldsymbol{v_2}, \ldots, \lambda_n\boldsymbol{v_n}$

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \ldots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

Escribiendo de manera conveniente

$$AP = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & .... & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

Multiplicando por P^{-1} ambos miembros, se tiene

$$P^{-1}AP = D,$$

siendo D la matriz diagonal con los valores propios de A en la diagonal.

Observaciones

. La expresión $P^{-1}AP = D$ equivale a las expresiones $A = PDP^{-1}$ y también $AP = PD$, la ventaja de la última expresión es que no necesita del cálculo de la matriz inversa.

. La expresión $A = PDP^{-1}$ es una factorización de la matriz A muy útil en aplicaciones prácticas, como por ejemplo cuando se pretende calcular una potencia natural de A, es decir, si $r \in IN$, $A^r = (PDP^{-1})^r = P\,D^r\,P^{-1}$, siendo Dr un cálculo sencillo pues D es diagonal.

. La matriz P es inversible porque sus columnas (vectores propios de A) son linealmente independientes.

. La matriz P que diagonaliza a A no es única, porque un vector propio x puede multiplicarse por una constante no nula y seguir siendo vector propio y, en consecuencia, D tampoco es única.

. Si la matriz A de nxn tiene n valores propios distintos, entonces los n vectores propios correspondientes a valores propios distintos son automáticamente linealmente independientes. Por lo tanto, cualquier matriz nxn con n valores propios distintos es diagonalizable.

. No todas las matrices cuadradas poseen n vectores propios linealmente independientes, por lo tanto, no todas las matrices son diagonalizables.

. Una condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable se desprende del teorema anterior: la matriz A de nxn es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios linealmente independientes.

Ejemplo Diagonalizar, si es posible, las matrices

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución

a) La matriz P tiene como columnas los vectores propios de A calculados anteriormente, se acostumbra a colocar los vectores que están en las bases de los espacios característicos, es decir

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(Matriz que diagonaliza a A)}$$

Luego, calculando P^{-1} y resolviendo el producto matricial indicado debajo, queda la matriz diagonal D con los valores propios de A en la diagonal, es decir

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$$

Se dice que **A se ha diagonalizado** (es semejante a una matriz diagonal), en otras palabras, D es la forma diagonal de A conservado los valores propios de A. Observar que las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada λ son iguales, es decir

$$M_{alg}(\lambda_1 = 1) = M_{geo}(\lambda_1 = 1) = 1 \quad \text{y} \quad M_{alg}(\lambda' = 5) = M_{geo}(\lambda' = 5) = 2.$$

b) Para diagonalizar B, comenzamos calculando los valores propios. Como se trata de una matriz triangular, los autovalores son los elementos de la diagonal, es decir

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$$

La multiplicidad algebraica de λ es 2, $M_{alg}(\lambda = 0) = 2$. Además

$$\text{traza (B)} = \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{y} \quad \det(B) = \lambda_1\,\lambda_2 = 0$$

B es una matriz no inversible o singular.

Se observa que **cualquier matriz cuadrada con al menos un valor propio nulo, no es inversible y, recíprocamente.**

Para obtener los vectores propios, resolvemos el sistema $(B - \lambda I)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ con $\lambda = 0$, es decir, $B\boldsymbol{x} = 0$; su espacio propio es

$$E_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \in IR^2 \right\}$$

Se observa que la dimensión de este espacio es 1, o sea que la multiplicidad geométrica de $\lambda = 0$ es 1, en símbolos

$$M_{geo}(\lambda = 0) = 1,$$

es decir, hay un sólo vector propio linealmente independiente para la matriz B, entonces la matriz P de 2x2 que diagonalizaría a B **no existe** (se deberían tener dos vectores propios linealmente independientes para formar las columnas de P). Luego, **B no es diagonalizable**.

Observar que la multiplicidad geométrica de λ no coincide con su multiplicidad algebraica. Este hecho permite dar una **condición necesaria y suficiente** de diagonalización que se enuncia en el siguiente criterio.

Criterio de diagonalización de matrices

Una matriz A de nxn es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad algebraica y geométrica de cada valor propio son números iguales.

Diagonalización ortogonal

Teorema espectral Si la matriz A de nxn es **simétrica**, entonces existe la matriz Q **ortogonal** de nxn cuyas columnas son los autovectores de A tal que

$$Q^TAQ = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \lambda_n \end{bmatrix}$$

donde λ_i con i = 1, 2, …, n es autovalor de A y Q es la matriz que **diagonaliza ortogonalmente** a A**.**

Observaciones

. Una matriz Q de nxn es **ortogonal** si sus columnas forman una base ortonormal del espacio IR^n.

. Recordar que una interesante propiedad de las matrices ortogonales es que satisfacen: si Q es ortogonal, $Q^{-1} = Q^T$.

. Una matriz simétrica A siempre es semejante a su forma diagonal D con los valores propios de A en la diagonal.

. Toda matriz simétrica es diagonalizable ortogonalmente. En otras palabras, que una matriz cuadrada sea simétrica, es una condición necesaria y suficiente para que dicha matriz sea diagonalizable ortogonalmente. O bien, A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica.

Ejemplo Diagonalizar ortogonalmente la matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Solución

Como la matriz es simétrica, se podrá diagonalizar ortogonalmente, es decir, existe la matriz Q ortogonal que diagonaliza ortogonalmente a A.

Resolviendo la ecuación característica, det(A - λ I) = 0, se obtienen los valores propios λ_1 = 0 y λ_2 = 5 que verifican tr(A) = 5 y det(A) = 0.

Los espacios característicos son $E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} \in IR^2 \right\}$ y $E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{t}{2} \\ t \end{bmatrix} \in IR^2 \right\}$(observar que los espacios propios son ortogonales, pues el producto escalar de los vectores propios es cero) y las bases ortonormales son B$_1$ = $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\}$ y B$_2$= $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\}$, respectivamente. Luego, la matriz Q ortogonal que diagonaliza ortogonalmente a A es

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \text{(no es única).}$$

Por lo tanto,

$$Q^T A Q = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Se dice que la matriz A se ha diagonalizado ortogonalmente.

Observación

Una descomposición usada en las aplicaciones para la matriz A simétrica es

$$A = Q D Q^T = \lambda_1 \, q_1 \, q_1^{\,T} + \lambda_2 \, q_2 \, q_2^{\,T} + \ldots + \lambda_n \, q_n \, q_n^{\,T} = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \, q_i \, q_i^{\,T},$$

donde λ_i es valor propio de A y q_i es vector columna de Q para cada i = 1, 2, …, n.
Esta descomposición se conoce como teorema espectral y expresa que A es una combinación lineal de las proyecciones unidimensionales $q_i \, q_i^{\,T}$, que descomponen a cualquier vector ***w*** en sus proyecciones o componentes ***p*** = $q_i\,(q_i^{\,T}\,\boldsymbol{w})$ en las direcciones de los vectores propios unitarios q_i que constituyen un conjunto de ejes mutuamente ortogonales. Estas proyecciones individuales ***p*** están ponderadas por λ_i.

Ejemplo Realizar la descomposición espectral de A = $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

Solución

Resolviendo la ecuación característica de A simétrica, se obtienen los valores propios λ_1 = 4 y λ_2= 9.

Resolviendo los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos para cada λ, se obtiene la matriz ortogonal Q = $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

Luego,

$$A = \lambda_1\, q_1\ q_1^{\,T} + \ \lambda_2\, q_2\ q_2^{\,T} \ = \ 4 \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

que es la descomposición espectral de A.

Se verifica, realizando los cálculos que

$$4\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = A$$

Propiedad de matrices semejantes

Si A y B son dos matrices de nxn semejantes, entonces tienen los mismos valores propios o, equivalentemente tienen el mismo polinomio característico.

Demostración

det(B - λ I) = det (P^{-1}AP - λ I) *pues A y B son matrices semejantes por hipótesis*

= det(P^{-1}AP – P^{-1} λ IP) *por álgebra de matrices*

= det(P^{-1} (A - λ I) P) *por álgebra matricial*

= det (P^{-1}) det(A - λ I) det(P) *por propiedad de determinantes*

= det(A - λ I) *pues det(P^{-1}) es el inverso multiplicativo de det(P)*

Luego

$$\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$$

Es decir, A y B tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos valores propios. El enunciado recíproco es falso.

Teorema importante

Sea A una matriz de nxn. Las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes:

a) A es inversible.
b) A es un producto de matrices elementales.
c) A es equivalente por filas a la matriz identidad I.
d) La forma escalonada reducida de A es la identidad I.
e) rango (A) = n
f) det (A) $\neq$ 0
g) El sistema de ecuaciones lineales A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{b}$ es compatible determinado para todo vector b de IR^n.
h) El sistema de ecuaciones lineales homogéneo A$\boldsymbol{x}$ = $\mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial.
i) Los vectores fila de A son linealmente independientes.
j) Los vectores columna de A son linealmente independientes.
k) Los vectores fila de A generan IR^n.
l) Los vectores columna de A generan IR^n.
m) Los vectores fila de A forman una base de IR^n.
n) Los vectores columna de A forman una base de IR^n.
o) El operador T de matriz asociada estándar A es un isomorfismo.
p) La nulidad del operador T es 0.
q) El rango del operador T es n.
r) 0 no es un autovalor de A.