En esta unidad se estudiará el efecto de las fuerzas que actúan sobre las partículas. En primer lugar se aprenderá a sustituir un conjunto de fuerzas que actúan sobre una partícula por una única fuerza que tenga el mismo efecto que ellas. Esta fuerza se denomina *fuerza resultante* de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.

En primer lugar se estudiarán las fuerzas en un mismo plano y luego se realizará el análisis de las fuerzas en el espacio.

1 FUERZAS EN EL PLANO

1.1 Fuerza sobre una partícula. Resultante de dos fuerzas

Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y se caracteriza por su *punto de aplicación, magnitud o módulo y dirección* (figura 1a y b).

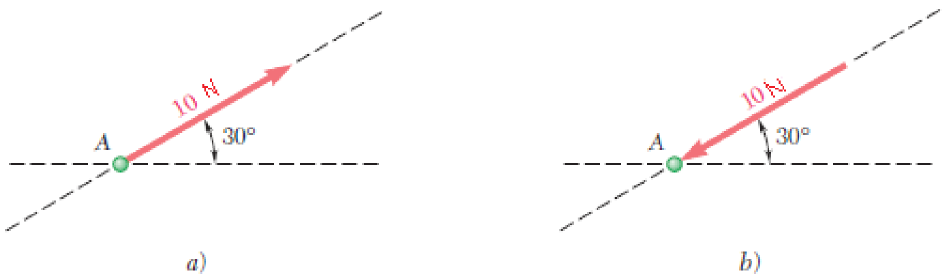


Figura 1.

La fuerza se representa por un segmento de línea mediante una escala apropiada, la dirección se expresa como la inclinación respecto de un eje de referencia (generalmente el eje coordenado *x*-y el sentido indicado con la punta de una flecha. En la figura 1 a y b, se muestran dos fuerzas de igual magnitud, dirección, recta de acción y sentidos contrarios, estas fuerzas tendrán efectos opuestos en la partícula.

Si dos fuerzas P y Q actúan sobre una partícula A (figura 2 a) pueden sustituirse por una única fuerza R que produce el mismo efecto sobre la partícula (figura 2 c), a esta fuerza se la denomina *resultante* de las fuerzas P y Q y puede obtenerse aplicando la regla del paralelogramo (figura 2 b).

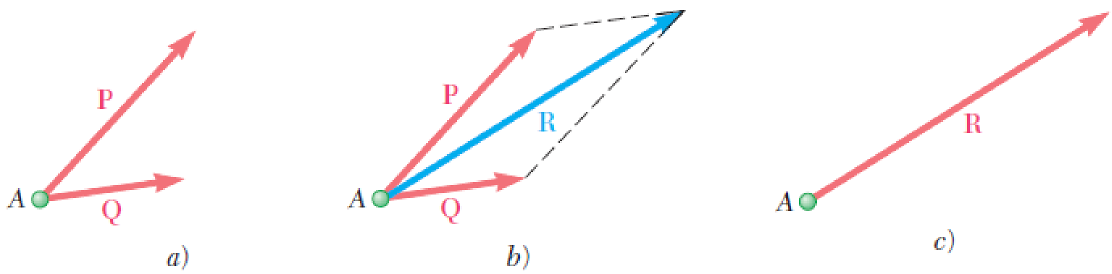


Figura 2.

1.2 Resultante de varias fuerzas concurrentes.

Suponga una partícula A sobre la que actúan varias fuerzas coplanares, es decir, contenidas en un mismo plano (figura 3 a). La resultante de las fuerzas que actúan en A se puede obtener gráficamente aplicando la regla del polígono (figura 3 b) ya que es equivalente al uso sucesivo de la regla del paralelogramo.

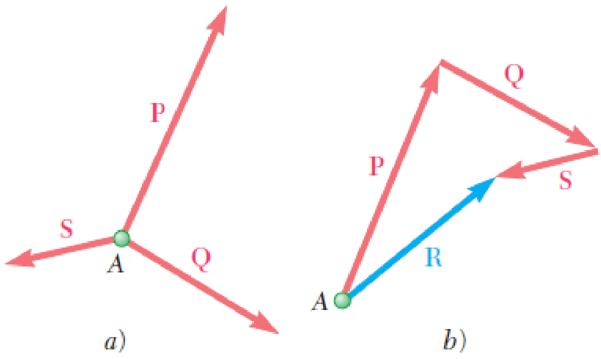


Figura 3.

1.3 Descomposición de una fuerza en sus componentes.

Una fuerza **F** que actúa sobre una partícula puede descomponerse según un par de ejes coordenados, generalmente los ejes coordenados son los pares *x y*. En la figura 4, la fuerza **F** se ha descompuesto en una componente $\mathbf{F}_x$ a lo largo del eje *x* y una componente perpendicular $\mathbf{F}_y$ a lo largo del eje *y*.

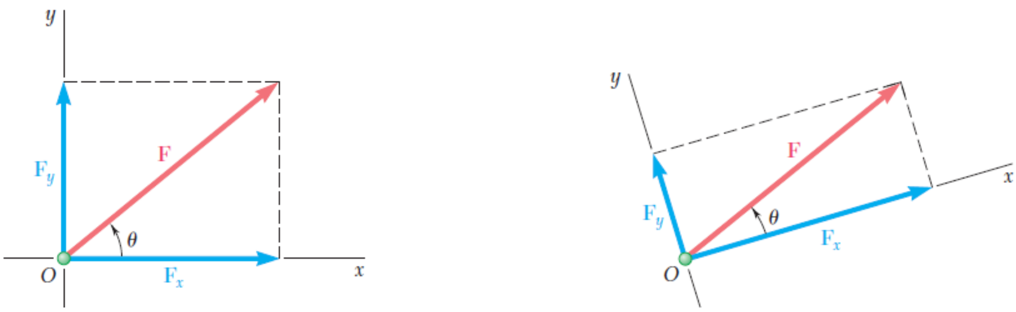


Figura 4.

Esta fuerza **F** y sus componentes pueden representarse en forma vectorial y escalar.

Para la representación vectorial se deben introducir los vectores unitarios **i, j** dirigidos a lo largo de los ejes positivos x e y. (figura 5). De esta forma las componentes rectangulares F_x y F_y se pueden expresar como el producto de un escalar por un vector. Así, se escribe como:

$$\mathbf{F_x} = F_x\,\mathbf{i} \qquad \mathrm{F_y} = F_y\,\mathbf{j} \qquad (1)$$

y

$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} \qquad (2)$$

Los escalares F_x y F_y pueden ser positivos o negativos, dependiendo del sentido de las fuerzas $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$, y sus valores absolutos son las magnitudes de las componentes de estas fuerzas.

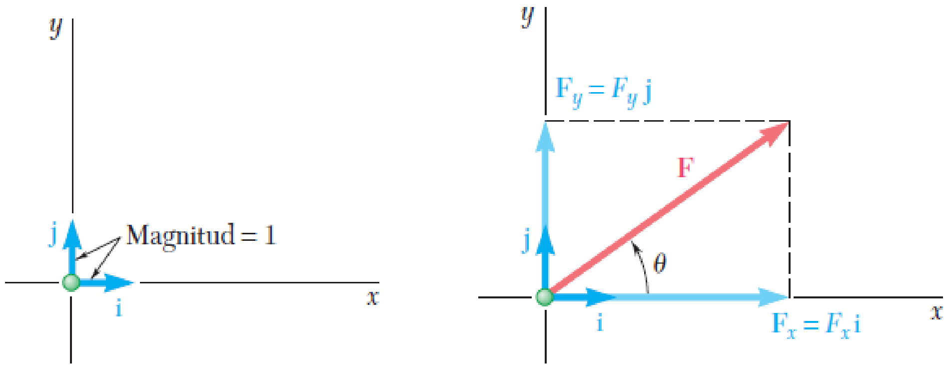


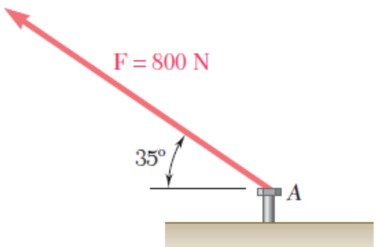
Figura 5.

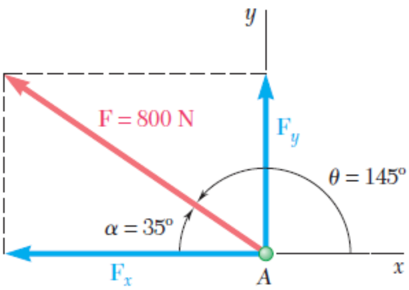
Se observa que la componente escalar F_x es positiva cuando la componente vectorial $\mathbf{F}_x$ tiene el mismo sentido que vector unitario **i**, lo mismo ocurre con la componente en *y*.

Si se representa con *F* a la magnitud de **F** y con θ al ángulo que forma la fuerza con el eje *x* positivo se pueden expresar las componentes escalares de **F** como sigue:

$$F_x = F \cos\theta \qquad\qquad F_y = F \sin\theta \qquad\qquad (3)$$

Ejemplo 1. Una fuerza de 800 N se ejerce sobre un perno *A* como se muestra en la figura. Determínese las componentes horizontal y vertical de la fuerza.





$$F_x = -F \cos\alpha = -(800 \text{ N}) \cos 35° = -655 \text{ N}$$
$$F_y = +F \operatorname{sen}\alpha = +(800 \text{ N}) \operatorname{sen} 35° = +459 \text{ N}$$

Las componentes vectoriales de **F** son entonces

$$\boxed{\mathbf{F}_x = -(655 \text{ N})\mathbf{i}} \qquad \boxed{\mathbf{F}_y = +(459 \text{ N})\mathbf{j}}$$

y **F** se puede escribir en la forma

$$\boxed{\mathbf{F} = -(655 \text{ N})\mathbf{i} + (459 \text{ N})\mathbf{j}}$$

1.4 Determinación analítica de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes.

Considere las tres fuerzas **P, Q** y **S** actuando en una partícula A (figura 3 a). Su resultante se puede obtener haciendo la suma vectorial de los tres vectores:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} \qquad (4)$$

Si se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares se puede escribir:

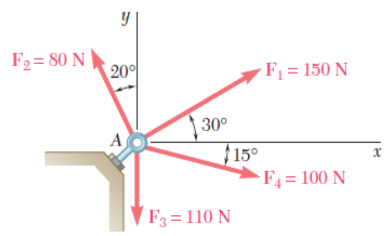
$$\mathbf{R} = R_x\,\mathbf{i} + R_y\,\mathbf{j} = (P_x + Q_x + S_x)\,\mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y)\,\mathbf{j}$$

de donde se puede escribir:

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \qquad R_y = P_y + Q_y + S_y \qquad (5)$$

o en forma resumida:

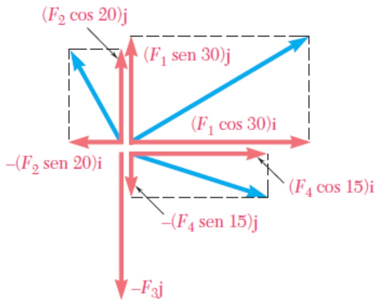
$$R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y \qquad (6)$$



PROBLEMA RESUELTO

Cuatro fuerzas actúan sobre un perno *A* como se muestra en la figura. Determine la resultante de las fuerzas sobre el perno.

SOLUCIÓN



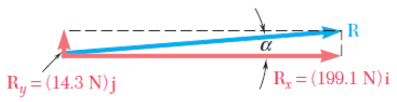
Las componentes *x* y *y* de cada fuerza se determinan por trigonometría, como se muestra en la figura y se escriben en la tabla.

Fuerza	Magnitud, N	Componente *x*, N	Componente *y*, N
$\mathbf{F}_1$	150	+129.9	+75.0
$\mathbf{F}_2$	80	−27.4	+75.2
$\mathbf{F}_3$	110	0	−110.0
$\mathbf{F}_4$	100	+96.6	−25.9
		$R_x = +199.1$	$R_y = +14.3$

En estas condiciones la resultante **R** de las cuatro fuerzas es

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{R} = (199.1\text{ N})\mathbf{i} + (14.3\text{ N})\mathbf{j}$$

La magnitud y la dirección de la resultante ya puede determinarse. Del triángulo mostrado en la figura, se tiene



$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14.3\text{ N}}{199.1\text{ N}} \qquad \alpha = 4.1°$$

$$R = \frac{14.3\text{ N}}{\operatorname{sen}\alpha} = 199.6\text{ N} \qquad \mathbf{R} = 199.6\text{ N} \measuredangle 4.1°$$

1.5 Equilibrio de una partícula.

La primera ley de Newton establece que: *Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento).*

A partir de esta ley se abordarán los problemas concernientes al equilibrio de una partícula.

Un gran número de problemas que tratan de estructuras pueden reducirse a problemas concernientes al equilibrio de una partícula representativa que forma parte de una estructura separando esta partícula y dibujando un diagrama que muestre todas las fuerzas que actúan sobre ella. Este diagrama se conoce como *diagrama de cuerpo libre.*

Por ejemplo suponga el problema mostrado en la figura 6. La caja de madera cuyo peso es de 736 N, está soportada por un cable vertical unido en A a dos cuerdas que pasan por poleas fijas a los edificios en los puntos B y C. Se desea conocer la fuerza en los cables AB y AC.

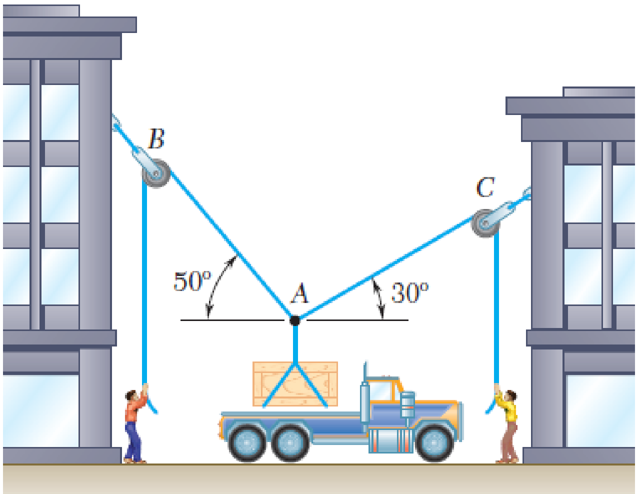


Figura 6.

Para poder resolver el problema se debe construir el diagrama de cuerpo libre. Como se analizarán las fuerzas en los cables el diagrama de cuerpo libre debe incluir ambos cables en lo posible. Por este motivo el punto A es un buen punto del sistema como para construir el diagrama de cuerpo libre.

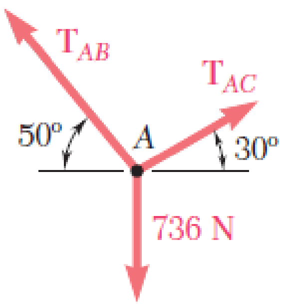


Figura 7.

Cuando la partícula A está en equilibrio bajo la acción de estas tres fuerzas se pueden plantear, a partir de la primera ley de Newton:

$$R_x = \sum F_x = 0 \qquad\qquad R_y = \sum F_y = 0 \qquad\qquad (7)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \therefore \quad -T_{AB}\cos 50° + T_{AC}\cos 30° = 0$$

$$(8)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \therefore \quad -736\,N + T_{AB}\sin 50° + T_{AC}\sin 30° = 0$$

Las ecuaciones 8 forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por lo tanto pueden conocerse las fuerzas en los cables.

$$\boxed{T_{AB} = 647\ N \quad T_{AC} = 480N}$$

De lo anterior se puede decir:

Un sistema coplanar de fuerzas concurrentes está en equilibrio si y sólo si se cumple

$$\boxed{\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0} \qquad\qquad (9)$$

EJEMPLO

Una conexión soldada está en equilibrio bajo la acción de las cuatro fuerzas que se muestran en la figura. Si se sabe que F_A = 8 kN y que F_B = 16 kN, determine las magnitudes de las dos fuerzas restantes.

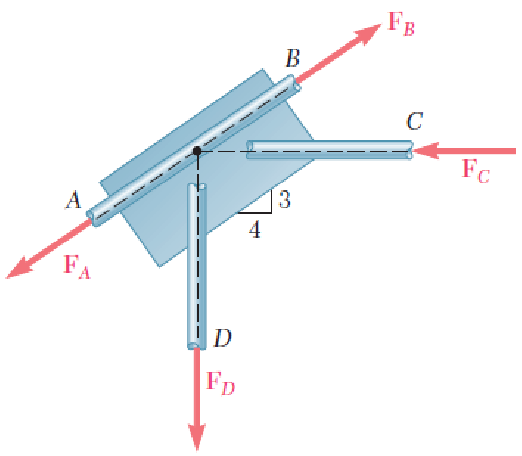
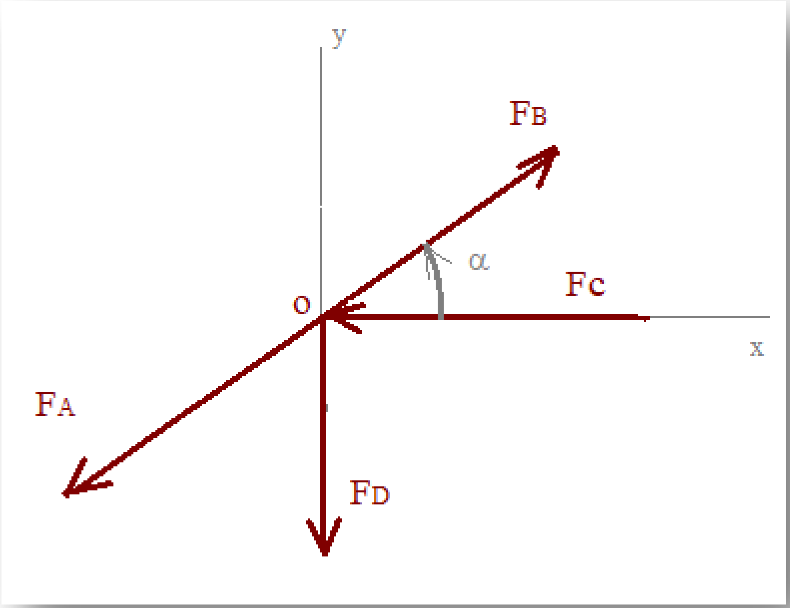


Diagrama de cuerpo libre



$$\tan\alpha = \frac{3}{4} \qquad \sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sum F_x = 0 \quad -F_A\cos\alpha + F_B\cos\alpha - F_C = 0 \qquad \therefore \; F_C = 6.4\ kN$$

$$\sum F_y = 0 \quad -F_D - F_A\sin\alpha + F_B\sin\alpha = 0 \qquad \therefore \; F_D = 4.8\ kN$$

2 FUERZAS EN EL ESPACIO

2.1 Componentes rectangulares de una fuerza en el espacio.

Considere una fuerza **F** que actúa en el origen O del sistema de coordenadas rectangulares *x,y,z*. Para definir la dirección de **F**, se traza un plano vertical OBAC que contiene a **F** como se muestra en la figura 8. Este plano pasa a través del eje *y*, su orientación está definida por el ángulo ϕ que forma con el plano *xy*, mientras que la dirección de **F** dentro del plano está definida por el ángulo θ_y que forma **F** con el eje *y*.

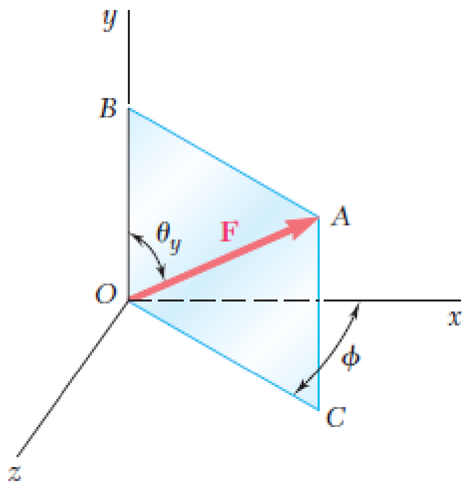


Figura 8.

La fuerza **F** puede descomponerse en una componente vertical $\mathbf{F}_y$ y una componente horizontal $\mathbf{F}_h$ (figura 9). Esta operación se realiza en el plano OBAC.

$$F_y = F \cos\theta_y \qquad F_h = F \sin\theta_y$$

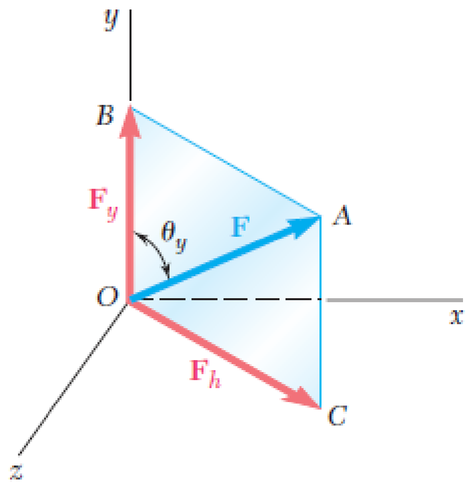


Figura 9.

$\mathbf{F}_h$ puede descomponerse en sus componentes rectangulares en el plano *xz*:

$$F_x = F_h \cos\emptyset = F \sin\theta_y \cos\emptyset$$

$$F_z = F_h \sin\emptyset = F \sin\theta_y \sin\emptyset$$

Se puede observar que la fuerza **F** se ha descompuesto en tres componentes vectoriales rectangulares $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_z$ dirigidas a lo largo de los tres ejes coordenados. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos OAB y OCD de las figuras 9 y 10 se tiene:

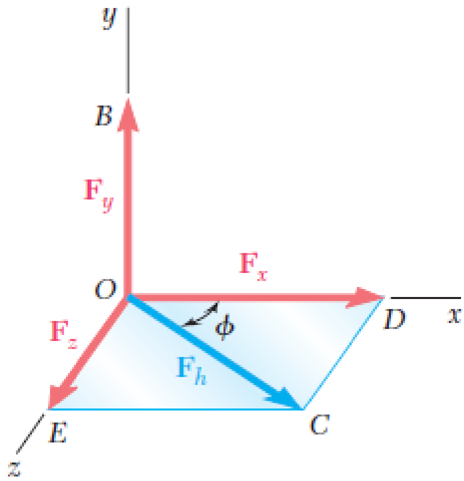


Figura 10

$$F = \sqrt{F^2{}_x + F^2{}_y + F^2{}_z} \qquad (10)$$

La relación que existe entre la fuerza **F** y sus tres componentes se muestra en la figura 11.

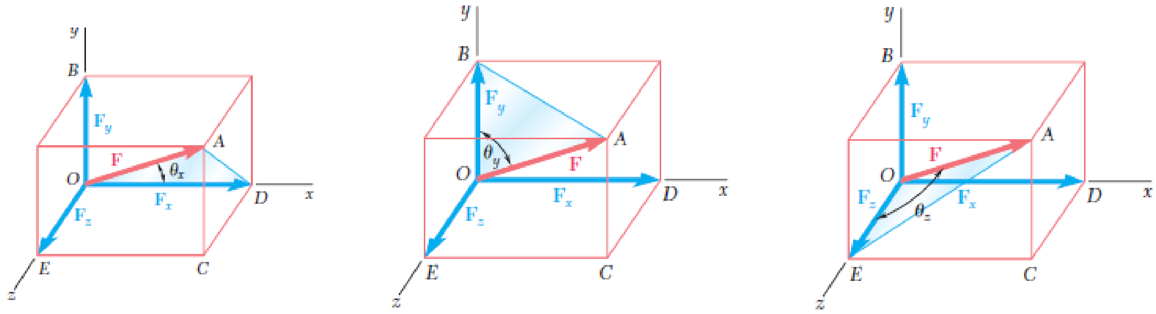


Figura 11.

Los ángulos θ_x, θ_y, θ_z definen la dirección de la fuerza **F**, los cosenos de dichos ángulos se conocen como los *cosenos directores* de la fuerza **F**. Entonces se puede escribir:

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\ \cos\theta_z \qquad (11)$$

Con el uso de los vectores unitarios **i, j** y **k** (figura 12), dirigidos a lo largo de los ejes *x, y* y *z* respectivamente, se puede expresar **F** en forma vectorial como:

$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k} \qquad (12)$$

Ejemplo

Una fuerza de 500N forma ángulos de 60^0, 45^0 y 120^0 con los ejes *x, y* y *z* respectivamente. Encuentre las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza.

$$F_x = 500N\,.\cos 60° = 250N$$

$$F_y = 500N\,.\cos 45° = 354\ N$$

$$F_z = 500N \,.\cos 120° = -250\ N$$

En forma vectorial se tiene:

$$\boxed{\mathbf{F} = (250\text{N})\mathbf{i} + (354\text{N})\mathbf{j} - (250\text{N})\mathbf{k}}$$

Del ejemplo anterior se observa que el ángulo que forma la fuerza con un eje debe medirse desde el lado positivo del eje, y estará comprendido entre 0 y 180^0.

La ecuación 12 podría escribirse también como:

$$\boldsymbol{F} = F\left(\cos\theta_x \boldsymbol{i} + \cos\theta_y \boldsymbol{j} + \cos\theta_z \boldsymbol{k}\right) \qquad (13)$$

Esto muestra que la fuerza ***F*** puede escribirse como el producto de un escalar *F* y del vector

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x \boldsymbol{i} + \cos\theta_y \boldsymbol{j} + \cos\theta_z \boldsymbol{k} \qquad (14)$$

λ es un vector de magnitud 1 y de la misma dirección que ***F*** (figura 12). Como se puede ver en la ecuación (14) las componentes de **λ** son los cosenos directores de la recta de acción de ***F***. Se debe observar que los valores de los tres ángulos no son independientes. Se debe cumplir que:

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = \mathbf{1} \qquad (15)$$

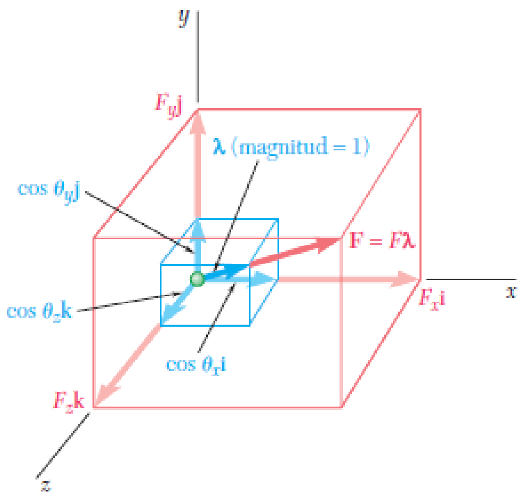


Figura 12.

2.2 Resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en el espacio.

La resultante **R** de dos o más fuerzas concurrentes en el espacio se calcula sumando sus componentes rectangulares.

$$\begin{aligned} R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} &= \Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) \\ &= (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k} \end{aligned} \qquad (16)$$

Por lo tanto se puede expresar:

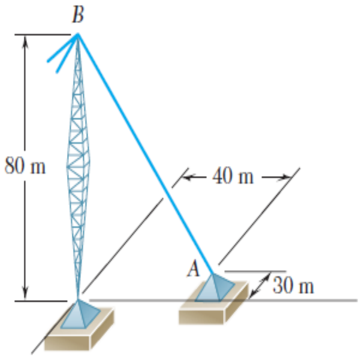
$$R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y \qquad R_z = \sum F_z \qquad (17)$$

La magnitud de la resultante y los ángulos que ésta forma con los ejes coordenados se pueden escribir:

$$R = \sqrt{R^2{}_x + R^2{}_y + R^2{}_z}$$

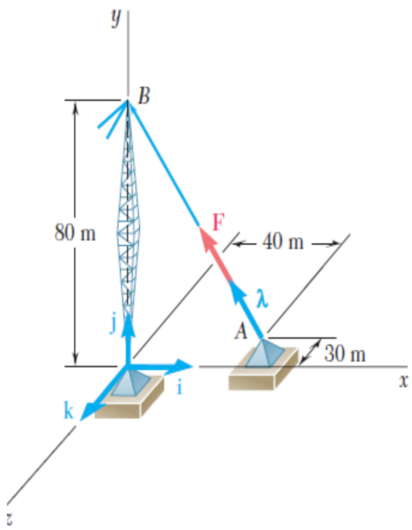
$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} \qquad \cos\theta_z = \frac{R_z}{R} \qquad (18)$$

Ejemplo



El alambre de una torre está anclado en A por medio de un perno. La tensión en el alambre es de 2 500 N. Determine *a*) las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza que actúa sobre el perno y *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que definen la dirección de la fuerza.

Solución



a) **Componentes de la fuerza.** La línea de acción de la fuerza que actúa sobre el perno pasa por A y B y la fuerza está dirigida de A hacia B. Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$, que tienen la misma dirección que la fuerza, son

$$d_x = -40 \text{ m} \qquad d_y = +80 \text{ m} \qquad d_z = +30 \text{ m}$$

La distancia total de A a B es

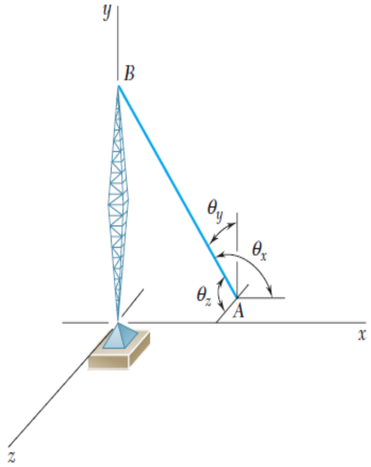
$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94.3 \text{ m}$$

Al representar por **i**, **j** y **k** los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se tiene

$$\overrightarrow{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

Introduciendo el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{AB}/AB$, se escribe

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}}\overrightarrow{AB}$$



Si se sustituye la expresión encontrada para $\overrightarrow{AB}$, se obtiene

$$\mathbf{F} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}}[-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}]$$
$$\mathbf{F} = -(1\,060 \text{ N})\mathbf{i} + (2\,120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$

Por consiguiente, las componentes de **F** son

$$F_x = -1\,060 \text{ N} \qquad F_y = +2\,120 \text{ N} \qquad F_z = +795 \text{ N}$$

b) **Dirección de la fuerza.**

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1\,060 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2\,120 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$
$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

Si se calcula sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 115.1° \qquad \theta_y = 32.0° \qquad \theta_z = 71.5°$$

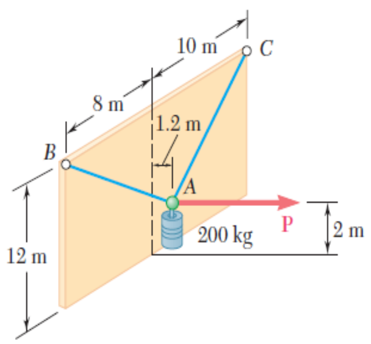
2.3 Equilibrio de una partícula en el espacio

De acuerdo con la Primera ley de Newton, una partícula A está en equilibrio si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre A es cero. Por lo tanto se puede expresar:

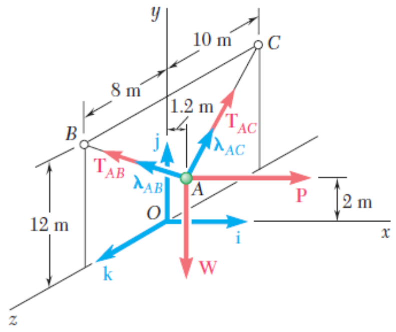
$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0 \qquad (19)$$

Las ecuaciones 19, son condición necesaria y suficiente para lograr el equilibrio de una partícula en el espacio.

Ejemplo



Un cilindro de 200 kg se sostiene por medio de dos cables *AB* y *AC* que se amarran en la parte más alta de una pared vertical. Una fuerza horizontal **P** perpendicular a la pared lo sostiene en la posición mostrada. Determine la magnitud de **P**, T_{AB} y T_{AC}



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el punto A como cuerpo libre, este punto está sujeto a cuatro fuerzas, tres de las cuales son de magnitud desconocida.

Con la introducción de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares.

$$\mathbf{P} = P\mathbf{i}$$
$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(1\,962 \text{ N})\mathbf{j} \quad (1)$$

En el caso de $\mathbf{T}_{AB}$ y $\mathbf{T}_{AC}$, es necesario determinar primero las componentes y las magnitudes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Representando con $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ el vector unitario a lo largo de AB, se escribe

$$\overrightarrow{AB} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} + (8 \text{ m})\mathbf{k} \qquad AB = 12.862 \text{ m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{12.862 \text{ m}} = -0.09330\mathbf{i} + 0.7775\mathbf{j} + 0.6220\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = -0.09330T_{AB}\mathbf{i} + 0.7775T_{AB}\mathbf{j} + 0.6220T_{AB}\mathbf{k} \quad (2)$$

Al representar con $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ el vector unitario a lo largo de AC, se escribe en forma semejante

$$\overrightarrow{AC} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} - (10 \text{ m})\mathbf{k} \qquad AC = 14.193 \text{ m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{14.193 \text{ m}} = -0.08455\mathbf{i} + 0.7046\mathbf{j} - 0.7046\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = -0.08455T_{AC}\mathbf{i} + 0.7046T_{AC}\mathbf{j} - 0.7046T_{AC}\mathbf{k} \quad (3)$$

Condición de equilibrio. Puesto que A está en equilibrio se debe tener

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \qquad \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$

o con la sustitución de (1), (2) y (3) para las fuerzas y factorizando **i**, **j** y **k**,

$$(-0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P)\mathbf{i} + (0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1\,962 \text{ N})\mathbf{j} + (0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC})\mathbf{k} = 0$$

Al hacer los coeficientes de **i**, **j** y **k** iguales a cero, se escriben las tres ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes x, y y z de las fuerzas son, respectivamente, iguales a cero.

$$\Sigma F_x = 0: \qquad -0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P = 0$$
$$\Sigma F_y = 0: \qquad +0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1\,962 \text{ N} = 0$$
$$\Sigma F_z = 0: \qquad +0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC} = 0$$

Con la solución de estas ecuaciones se obtiene

$$P = 235 \text{ N} \quad T_{AB} = 1\,402 \text{ N} \quad T_{AC} = 1\,238 \text{ N}$$

3 SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZAS

3.1 Principio de transmisibilidad.

El principio de transmisibilidad establece que las condiciones de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza **F** que actúa en un punto dado de ese cuerpo se reemplaza por una fuerza **F´** que tiene la misma magnitud y dirección, pero actúa en un punto distinto, siempre y cuando las dos fuerzas tengan la misma recta de acción (figura 13).

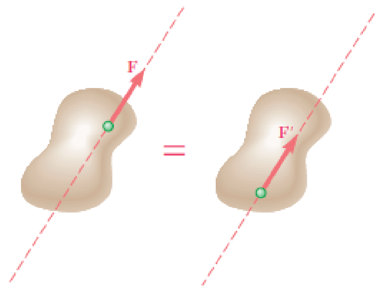


Figura 13.

Las dos fuerzas **F** y **F´** tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido y se dice que son *equivalentes.*

3.2 Momento de una fuerza con respecto a un punto.

Considere una fuerza **F** que actúa en un punto A de un cuerpo rígido (figura 14). La posición de A puede definirse a través de un vector **r** que une el punto de referencia fijo O con A, a este vector se lo conoce como vector posición de A. El vector posición **r** y la fuerza **F** definen un plano.

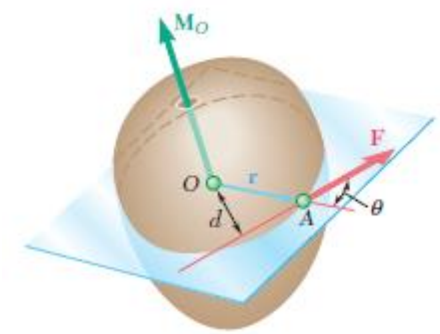


Figura 14.

El momento de **F** con respecto de O se define como el producto vectorial de **r** y **F**:

$$\mathbf{Mo} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (20)$$

De acuerdo con el concepto de de producto vectorial, el momento $\mathbf{M}_O$ debe ser perpendicular al plano que contiene el punto O y a la fuerza **F**. El sentido de $\mathbf{M}_O$ está definido por el sentido de la rotación que haría el vector **r** colineal con **F** siguiendo la regla de la mano derecha (cierre la mano derecha y manténgala de manera que sus dedos estén doblados en el mismo sentido de la rotación que **F** le impartiría al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{M}_O$, su dedo pulgar indicará el sentido del momento $\mathbf{M}_O$. (Figura 15)

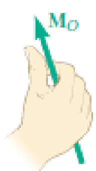


Figura 15.

Por último, representando con θ el ángulo entre las rectas de acción de **r** y **F**, se encuentra que la magnitud del momento de **F** respecto de O es:

$$M_O = r.F\ sen\theta = F.d \qquad (21)$$

donde *d* representa la distancia perpendicular desde O hasta la recta de acción de **F.**

3.3 Teorema de Varignon.

La propiedad distributiva de los productos vectoriales se puede emplear para determinar el momento de la resultante de varias fuerzas concurrentes. Si las fuerzas $\mathbf{F_1}$**,** $\mathbf{F_2}$,… se aplican en el mismo punto A (figura 16) y si se representa con **r** al vector posición de A, se puede escribir:

$$\boldsymbol{r} \text{ x } (\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3} + \boldsymbol{F_4}) = \boldsymbol{r} \text{ x } \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{r} \text{ x } \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{r} \text{ x } \boldsymbol{F_3} + \boldsymbol{r} \text{ x } \boldsymbol{F_4} \qquad (22)$$

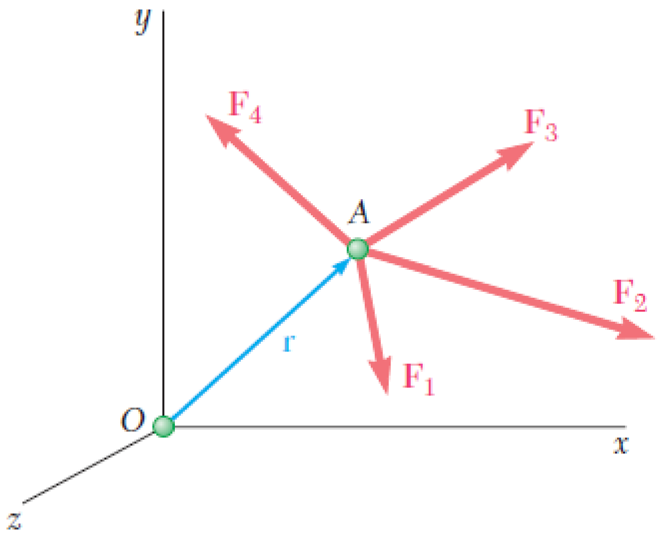


Figura 16.

Es decir, ***el momento con respecto a un punto O de la resultante de las fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de cada fuerza con respecto a O.*** Esto es lo que se conoce como **Teorema de Varignon.**

3.4 Componentes rectangulares del momento de una fuerza.

La determinación del momento de una fuerza en el espacio se simplifica si el vector de fuerza y el vector de posición a partir de un punto de aplicación se descomponen en sus componentes rectangulares *x*, *y* y *z*. Suponga un momento **M**o respecto a O de una fuerza **F** cuyas componentes son *Fx*, *Fy*, y *Fz* que está aplicada en el punto A como lo muestra la figura 17. Se puede escribir:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (23)$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

El momento Mo será:

$$\mathbf{Mo} = \mathbf{r} \text{ x } \mathbf{F} \qquad (24)$$

O expresado en sus componentes:

$$\mathbf{Mo} = M_x\, \mathbf{i} + M_y\, \mathbf{j} + M_z\, \mathbf{k} \qquad (25)$$

Donde las componentes escalares *Mx*, *My* y *Mz* se pueden escribir:

$$Mx = y\, Fz - z\, Fy$$

$$My = z\, Fx - x\, Fz \qquad (26)$$

$$Mz = x\, Fy - y\, Fx$$

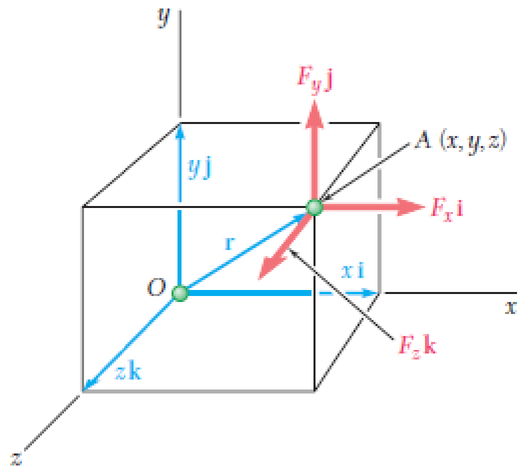


Figura 17.

Las componentes escalares *Mx*, *My* y *Mz* del momento **M**o miden la tendencia de la fuerza **F** a impartirle a un cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes *x*, *y* y *z* respectivamente. El momento **M**o se puede escribir en forma de determinante:

$$M_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (27)$$

Para poder determinar el momento $\mathbf{M}_B$ de una fuerza **F** aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B (figura 18) se debe reemplazar el vector posición r por otro vector trazado desde B hacia A, este vector es el vector posición relativo de A respecto de B y se representa como $\mathbf{r}_{A/B}$ y se escribe:

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \qquad (28)$$

O en forma de determinante:

$$M_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{29}$$

Donde

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B \tag{30}$$

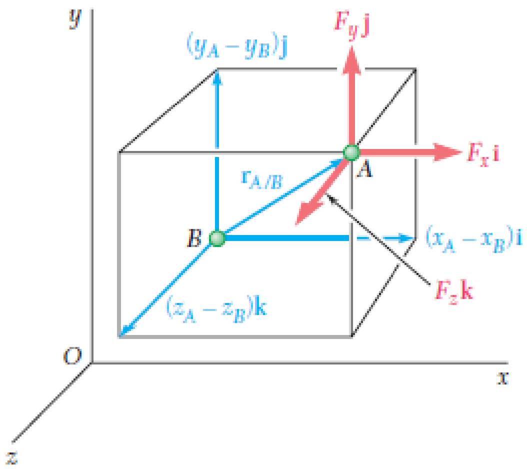
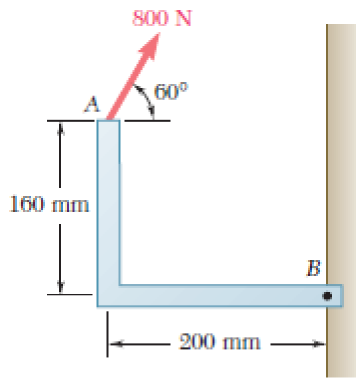


Figura 18.

Ejemplo

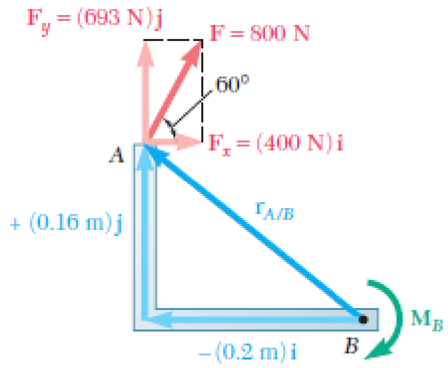
Una fuerza de 800 N actúa sobre una ménsula, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a B.



Solución

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{r}_{A/B} = -(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F} = (800 \text{ N}) \cos 60°\mathbf{i} + (800 \text{ N}) \text{ sen } 60°\mathbf{j}$$
$$= (400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}$$



$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = [-(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j}] \times [(400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}]$$
$$= -(138.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} - (64.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$
$$= -(202.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

$$\boxed{\mathbf{M}_B = 203 \text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowright}$$

3.5 Momento de un par.

Se dice que dos fuerzas **F** y **–F** de igual magnitud, sentidos contrarios y rectas de acción paralelas forman un par (figura 19).

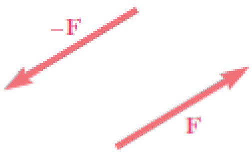


Figura 19.

Aunque las dos fuerzas no tenderán a trasladar el cuerpo sobre el que actúan sí tenderán a rotarlo. Al representar con $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ a los vectores de posición de los puntos de aplicación de **F** y **–F** (figura 20) se encuentra que la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a O es:

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \qquad (31)$$

Si se define $\mathbf{r}_A$ - $\mathbf{r}_B$ = **r**, donde **r** es el vector que une los puntos de aplicación de las dos fuerzas, se concluye que la suma de los momentos de **F** y **–F** con respecto a O está representado por el vector (figura 20):

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (32)$$

M se conoce como momento del par y es un vector perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas y su magnitud está dada por:

$$M = r.F\ sen\theta = F.d \qquad (33)$$

Donde *d* es la distancia perpendicular entre las rectas de acción de **F** y **–F** y el sentido de **M** está dado por la regla de la mano derecha.

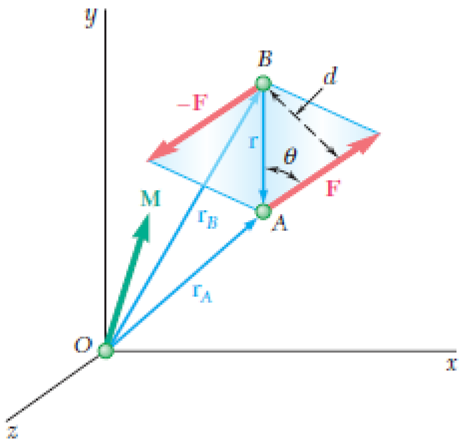


Figura 20.

Como el vector **r** es independiente de la elección del origen O de los ejes coordenados, se observa que se obtendría el mismo resultado si los momentos de **F** y **–F** se hubieran calculado respecto de un punto O' cualquiera. Por tanto, el momento **M** de un par es un *vector libre* que puede ser aplicado en cualquier punto.

3.6 Descomposición de una fuerza dada en una fuerza y un par.

Considere una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido en un punto A definido por el vector posición **r** (figura 21a). Se desea trasladar el punto de aplicación de la fuerza a O. Cuando el nuevo punto de aplicación de la fuerza no pertenece a la misma recta de acción, el efecto que produce la fuerza sobre el cuerpo rígido cambia.

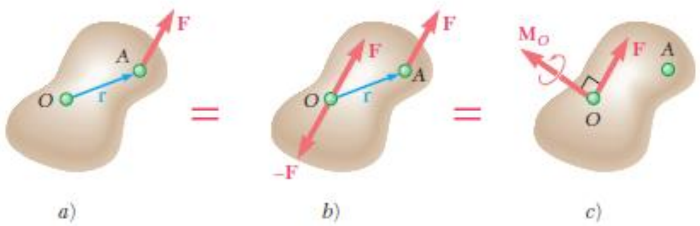


Figura 21.

Sin embargo pueden aplicarse dos fuerzas iguales y de sentido contrario en O sin modificar el efecto que la fuerza original **F** tenía sobre el mismo (figura 21b). Como consecuencia de esta transformación una fuerza F actúa ahora en O mientras que las otras dos fuerzas forman un par con un momento **M**o= **r** x **F** (figura 21c). Por lo tanto cualquier fuerza **F** que actúe sobre un cuerpo rígido puede ser trasladada a un punto arbitrario O siempre y cuando se agregue un par cuyo momento sea igual al momento de **F** respecto de a O.