Momentos de Primer orden y Baricentros de superficies.

En Estabilidad I se estudia la estática de los cuerpos rígidos. Según sea la geometría de los cuerpos, de las acciones sobre ellos, de cómo se vinculan a tierra y entre ellos, se debe elegir el modelo con el cual trabajar.

Cuando se trabaja con estructuras isostáticas, no es necesario conocer la forma de la sección transversal de los elementos que se modelan, pero esas características geométricas y su orientación respecto a las solicitaciones y tipo de material influyen en la respuesta estructural.

En este capítulo se estudian algunas características de las figuras planas que dependen de su geometría.

Momento estático o de Primer orden.

Suponga una superficie plana **A** y un eje cualquiera v en el mismo plano de la superficie. Considere un diferencial de la superficie de área **dA**, ubicada a una distancia w del eje (figura 1):

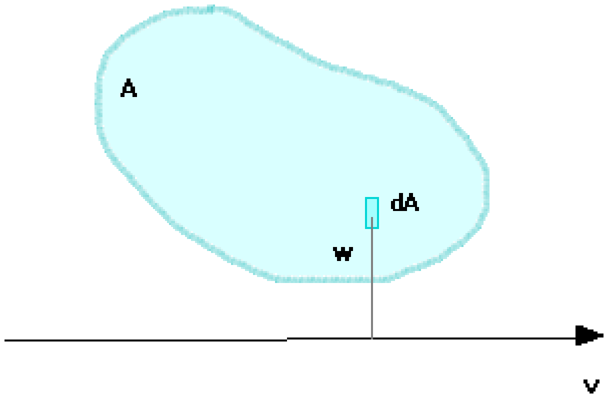


Figura 1.

Se define al momento estático o de primer orden, a la expresión:

$$S_v = \int_A w \, dA$$

El momento estático puede ser positivo, negativo o nulo dependiendo de la ubicación del eje respecto del cual se determina.

Si se considera un sistema de ejes ortogonales x,y (figura 2):

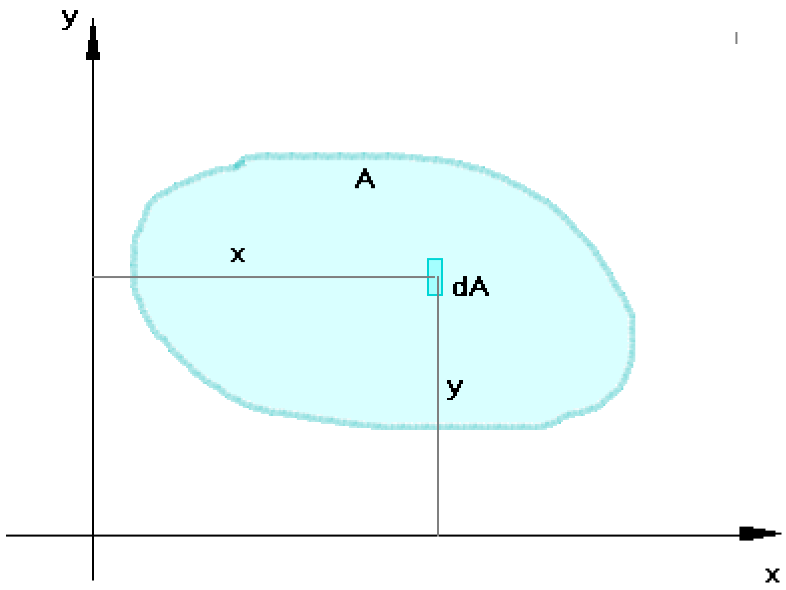


Figura 2.

Los momentos estáticos respecto de cada eje se calculan:

$$S_x = \int y \, dA$$

$$S_y = \int x \, dA$$

Baricentro o centroide

El baricentro, o centroide, de una figura es un punto donde se podría concentrar toda el área de la misma. Esta ubicación es única e independiente del sistema coordenado, es una propiedad de la superficie.

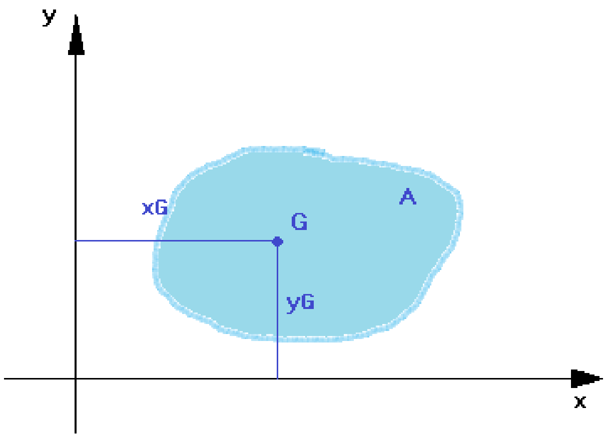


Figura 3.

Se supone que el área total de la figura A se puede concentrar en un punto G del plano. Si se calculan los momentos estáticos o de primer orden del área concentrada en G se tiene:

$$S_x = A.\, y_G$$

$$S_y = A.\, x_G$$

Si se iguala el momento estático de la superficie distribuida con el momento estático de la misma superficie concentrada en G se obtienen las coordenadas del baricentro:

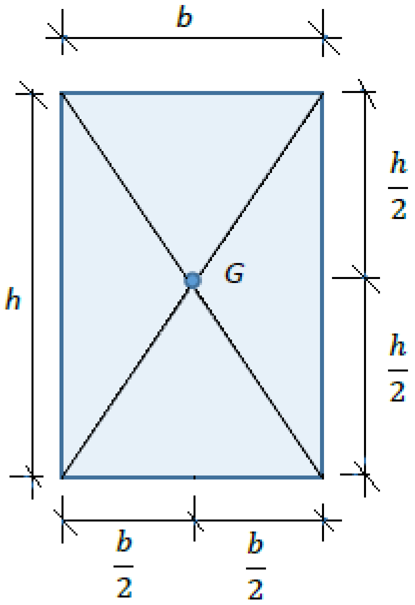
$$y_G = \frac{\int y\, dA}{A} = \frac{S_x}{A}$$

$$x_G = \frac{\int x\, dA}{A} = \frac{S_y}{A}$$

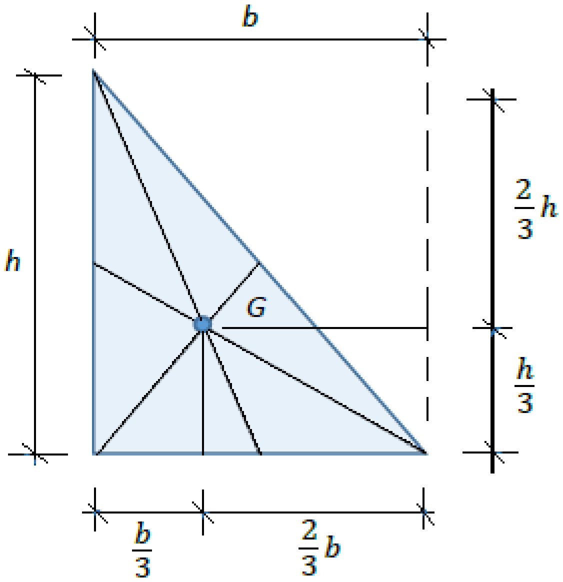
Si un eje pasa por el baricentro la distancia entre éste y el baricentro es nula por lo tanto el momento estático respecto de cualquier eje baricéntrico es nulo: $S_G = 0$.

Si existe un eje de simetría, de manera tal que para cada diferencial de área dA a un lado del eje existe un diferencial de área dA igual pero opuesto al mismo eje, éste será baricéntrico.

Baricentros de figuras simples



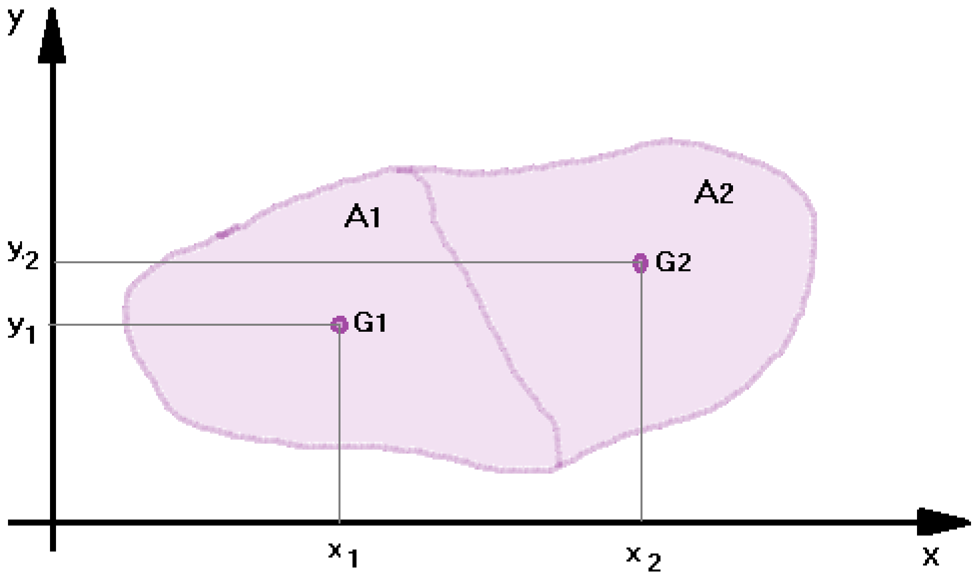
En el rectángulo el baricentro se encuentra en la intersección de las diagonales.



En el triángulo el baricentro se encuentra en la intersección de las mediatrices.

Baricentros de superficies de forma arbitraria

Suponga la superficie mostrada en la figura siguiente:



Si se subdivide la figura en superficies más pequeñas, el momento estático puede calcularse como la suma de los momentos estáticos de las áreas menores:

$$S_x = \int y\, dA = \sum \int y\, dA_i = \sum S_{x_i}$$

$$S_y = \int x\, dA = \sum \int x\, dA_i = \sum S_{y_i}$$

Las coordenadas de los baricentros de las superficies más pequeñas se calculan como:

$$y_{G_i} = \frac{\int y\, dA_i}{A_i} = \frac{S_{x_i}}{A_i}$$

$$x_{G_i} = \frac{\int x\, dA_i}{A_i} = \frac{S_{y_i}}{A_i}$$

Escribiendo los momentos estáticos de cada una de las áreas parciales en función de sus baricentros:

$$S_x = \sum y_{G_i} A_i$$

$$S_y = \sum x_{G_i} A_i$$

Por lo tanto las coordenadas del baricentro del área total se puede calcular como:

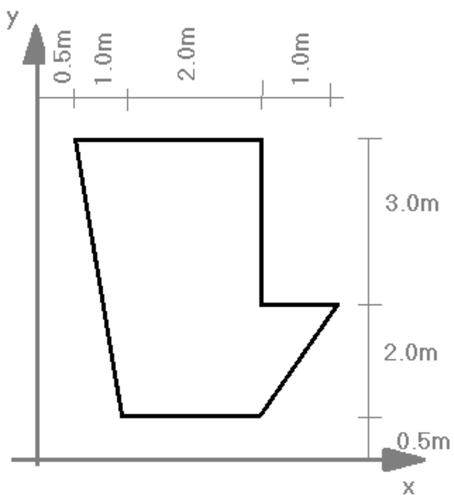
$$y_G = \frac{\sum y_{G_i} A_i}{\sum A_i}$$

$$x_G = \frac{\sum x_{G_i} A_i}{\sum A_i}$$

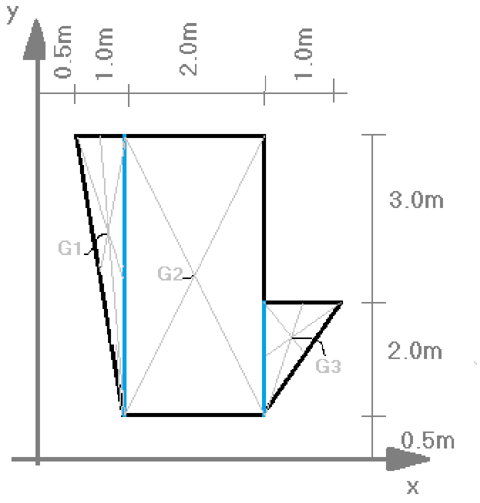
Así, conociendo las coordenadas de los baricentros de las superficies parciales y sus áreas se puede conocer la posición del baricentro de la figura completa.

Ejemplo

Dada la siguiente figura compuesta calcular la posición del baricentro respecto de los ejes x,y.



Dividimos la figura en 3 figuras simples, ubicamos sus baricentros y calculamos sus áreas :



$G_1 = (0.83; 3.83)m \qquad A_1 = 2.5m^2$

$G_2 = (2.5; 3.0)m \qquad A_2 = 10.0m^2$

$G_3 = (3.83; 1.83)m \qquad A_3 = 1.0m^2$

$A_{total} = 13.5\ m^2$

$$y_G = \frac{(3.83\ x\ 2.5\ + 3.0\ x\ 10.0\ + 1.83\ x\ 1.0)m^3}{13.5\ m^2} = 3.07m$$

$$x_G = \frac{(0.83\ x\ 2.5\ + 2.5\ x\ 10.0\ + 3.83\ x\ 1.0)m^3}{13.5\ m^2} = 2.29m$$