EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS

1.1 Cinemática de la chapa rígida. Grados de libertad

Se entiende por chapa al plano de simetría de una estructura en la cual actúan las resultantes de fuerzas iguales y simétricas, respecto de dicho plano de simetría (figura 1).

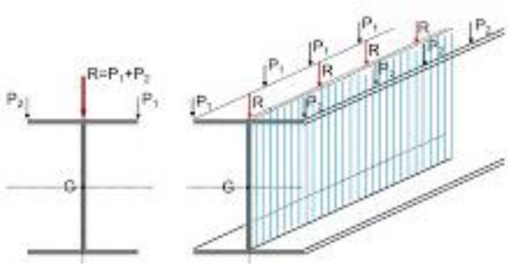


Figura 1.

A partir de este concepto se puede definir *Chapa rígida* como aquella que no sufre deformaciones bajo la acción de las fuerzas exteriores. La distancia entre dos puntos cualesquiera de la chapa permanece constante bajo la acción de las fuerzas externas.
Una chapa rígida libre se puede desplazar en cualquier dirección, pudiendo ocupar cualquier posición en el plano. Cualquier punto de la chapa tiene libertad de moverse en cualquier dirección y sentido. Los movimientos de una chapa rígida pueden ser de traslación y rotación.
Si se consideran los ejes coordenado *x* e *y*, una chapa rígida puede trasladarse según la dirección de ambos ejes y en sentido positivo o negativo (figura2).

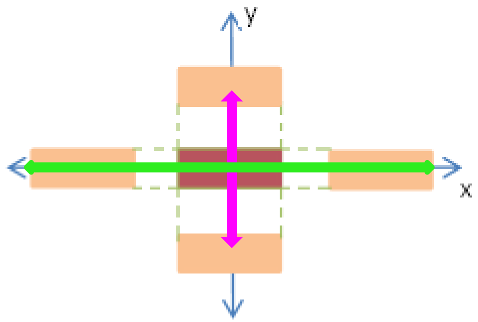


Figura 2.

Otro movimiento posible de la chapa rígida es la rotación alrededor de un eje perpendicular al plano *xy* con dos sentidos posibles (figura 3).

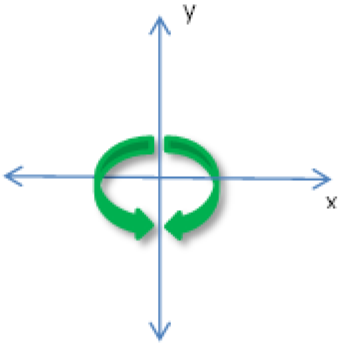


Figura 3.

Una chapa en el plano tiene tres grados de libertad: dos desplazamientos y una rotación.

1.2 Equilibrio de un cuerpo rígido

Las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido pueden reducirse a un sistema de fuerzas-par en un punto arbitrario O. Cuando la fuerza y el par son iguales a cero, las fuerzas externas forman un sistema equivalente a cero y se dice que el cuerpo rígido se encuentra en equilibrio.
Por lo tanto, las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido se pueden obtener igualando a cero a **R** y a $\mathbf{M}^{\mathbf{R}}_{\mathbf{o}}$**:**

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{1}$$

Si se descompone cada fuerza y cada momento en sus componentes rectangulares, se pueden expresar las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido por medio de las seis ecuaciones escalares:

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = 0 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 & \Sigma M_y = 0 & \Sigma M_z = 0 \end{array} \tag{2}$$

Estas ecuaciones se pueden emplear para determinar fuerzas desconocidas que están aplicadas sobre el cuerpo rígido o reacciones desconocidas ejercidas sobre éste en sus puntos de apoyo. Se puede observar que las ecuaciones (2) expresan que las componentes de las fuerzas externas en las direcciones x, y, z están en equilibrio y que los momentos de esas fuerzas con respecto a los ejes x, y, z también están en equilibrio. Por lo tanto, para un cuerpo rígido en equilibrio el sistema de fuerzas externas no le impartirán un movimiento traslacional o rotacional.

1.3 Diagrama de cuerpo libre

Para resolver un problema relacionado con el equilibrio de un cuerpo rígido es muy importante considerar todas las fuerzas que actúan sobre éste, omitir o agregar una fuerza podría destruir las condiciones de equilibrio. Por lo tanto el primer paso en la solución del problema es esquematizar un *diagrama de cuerpo libre* (*DCL*) del cuerpo rígido en consideración. A continuación se resumen los pasos a seguir para construir un diagrama de cuerpo libre:

- Se debe aislar el cuerpo del suelo y de todos los demás elementos existentes y se realiza un croquis del cuerpo aislado.
- Se deben indicar todas las fuerzas externas que actúan en el cuerpo. Estas fuerzas representan las acciones ejercidas sobre el cuerpo libre por el suelo y por los cuerpos que han sido separados del mismo, también se debe incluir el peso del cuerpo aislado.
- Las magnitudes y direcciones de las fuerzas externas que son conocidas deben indicarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre. Cuando se indiquen las direcciones de dichas fuerzas, se debe recordar que éstas son las ejercidas sobre el cuerpo y no por él.
- Las fuerzas externas desconocidas consisten en las reacciones a través de las cuales el suelo y otros cuerpos se oponen a un posible movimiento del cuerpo libre.
- El diagrama de cuerpo libre también debe incluir dimensiones ya que se usarán para calcular momentos de fuerzas. Sin embargo, cualquier otro detalle debe omitirse.

1.4 Equilibrio en dos dimensiones. Condiciones de vínculos.

Si un cuerpo se encuentra en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas generalizadas (fuerzas y momentos), se pueden distinguir dos sistemas de fuerzas; las fuerzas activas, que son las acciones sobre el cuerpo, y las reactivas, que son aquéllas que vinculan el cuerpo a tierra. Se cumple que la resultante de fuerzas reactivas es opuesta a la resultante de fuerzas activas.

1.4.1 Vinculaciones

Para que un cuerpo permanezca en reposo, independientemente de las acciones que actúen, es necesario imponer, al menos, la misma cantidad de restricciones al movimiento que los grados de libertad que posee. Siempre se debe cuidar que las restricciones correspondan a movimientos independientes. Estas restricciones al movimiento en coordenadas independientes se llaman condiciones de vínculo (CV).

Si la cantidad de condiciones de vínculo, en coordenadas independientes, impuestas es mayor o igual que los grados de libertad, el cuerpo se encontrará en reposo independientemente de las acciones, siempre y cuando no haya vínculos que restrinjan en mismo movimiento.

Si la cantidad de CV impuestas es igual a los grados de libertad, la vinculación se llama ***isostática***.

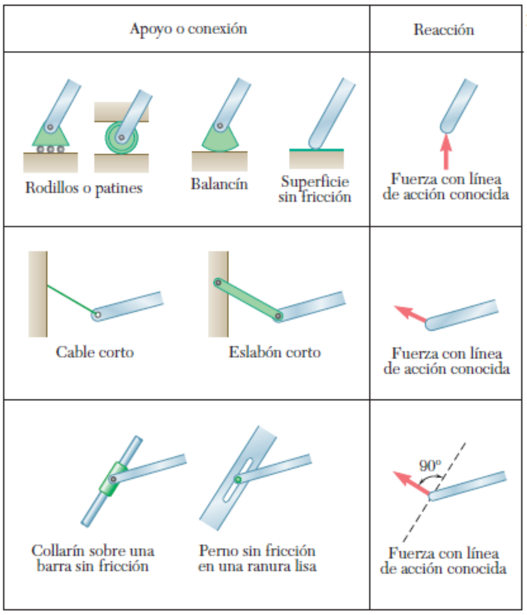
Si la cantidad de CV impuestas es superior a los grados de libertad, la vinculación se llama ***hiperestática***, y a la cantidad de CV que superen los grados de libertad se le denomina grado de *hiperestaticidad*.

Si por el contrario, la cantidad de CV es menor a los grados de libertad, el cuerpo tendrá igual cantidad de posibilidades de movimiento como grados de libertad sin restringir, el sistema estructural se transforma en un mecanismo y la vinculación se denomina ***hipostática***.

1.4.2 Vínculos externos

Las reacciones ejercidas sobre una estructura bidimensional pueden dividirse en tres grupos que corresponden a tres tipos de apoyos o conexiones:

a) *Reacciones equivalentes a una fuerza con una recta de acción conocida.* Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen rodillos, balancines, superficies sin fricción, bielas, collarines sobre barras sin fricción y pernos sin fricción en ranuras lisas. Cada uno de estos apoyos y conexiones pueden impedir el movimiento sólo en una dirección (figura 4). Se les llama vínculos de ***primera especie, apoyo simple o móvil***.



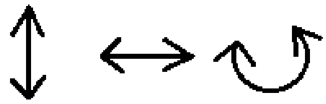
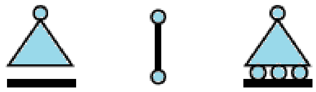
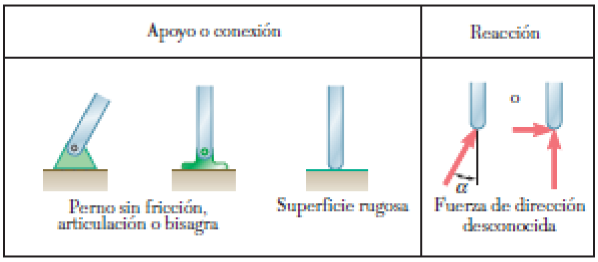
Especie	Representación	Nombre	Desplazamientos posibles 		
De 1ra especie		Apoyo simple o móvil	No	Si	Si

Figura 4.

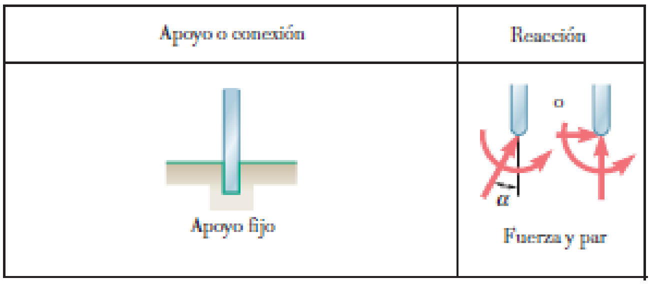
b) *Reacciones equivalentes a una fuerza de magnitud y dirección desconocidas.* Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen pernos sin fricción en orificios ajustados, articulaciones o bisagras y superficies rugosas. Éstos pueden impedir la traslación del cuerpo rígido en todas direcciones pero no pueden impedir la rotación del mismo respecto a la conexión. Las reacciones de este tipo involucran dos incógnitas que generalmente se representan por sus componentes en *x* e *y* (figura 5). Se los llama vínculos de ***segunda especie***, ***apoyo fijo o articulación***.



Especie	Representación	Nombre	Desplazamientos posibles ↕	↔	↻
De 2da especie		Apoyo fijo o articulación	No	No	Si
		Carrito guiado	No	Si	No

Figura 5.

c) *Reacciones equivalentes a una fuerza y un par.* Estas reacciones se originan por apoyos fijos, los cuales se oponen a cualquier movimiento del cuerpo libre, es decir, restringen por completo el movimiento. Los soportes fijos producen fuerzas sobre toda la superficie de contacto, estas fuerzas forman un sistema que se puede reducir a una fuerza y un par. Las reacciones de este grupo involucran tres incógnitas compuestas por dos componentes de la fuerza y en el momento del par (figura 6). Se los llama vínculo de ***tercera especie o empotramiento***.



Especie	Representación	Nombre	Desplazamientos posibles		
De 3ra especie		Empotramiento	No	No	No

Figura 6.

En los vínculos, cada restricción en coordenada independiente se puede reemplazar por una fuerza o momento en esa dirección, a éstas se las llaman reacciones de vínculo. Si un vínculo impide la traslación del cuerpo en una dirección determinada, entonces se desarrolla una fuerza sobre el cuerpo en esa dirección. De igual modo, si el vínculo impide la rotación, sobre el cuerpo se ejerce un momento.

Las condiciones establecidas por las ecuaciones (2) se vuelven más simples en el caso del equilibrio de un cuerpo rígido en dos dimensiones. Las condiciones de equilibrio se reducen a:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \tag{4}$$

donde A puede ser un punto cualquiera de la estructura.

1.5 Constricción total, parcial o impropia

La constricción total de una chapa se logra colocando tantos vínculos como grados de libertad posea, es decir, la constricción total de una chapa en el plano se logra, por ejemplo con un empotramiento, con un vínculo doble y uno simple, o con tres vínculos simples correctamente ubicados (figura 7).

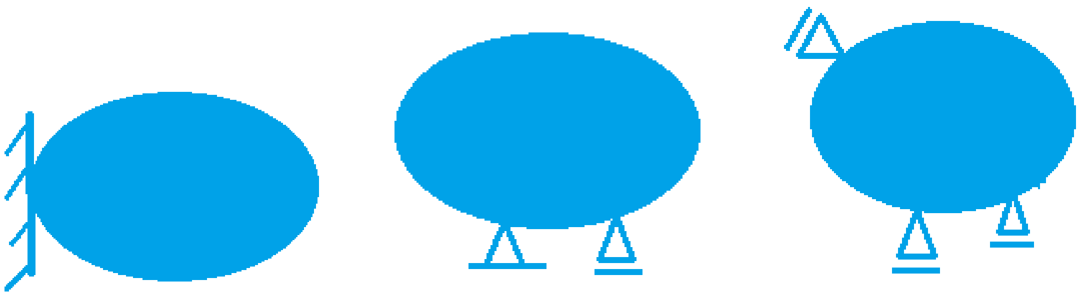


Figura 7.

Hay constricción parcial de la chapa si el número de vínculos es inferior al requerido para inmovilizarla (figura 8).

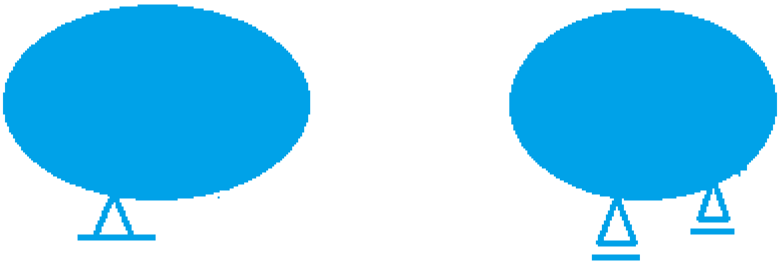


Figura 8.

Constricción impropia o aparente se presenta cuando a pesar de que el número de vínculos simples sea igual a los grados de libertad de la chapa, éstos no están correctamente ubicados (figura 9).

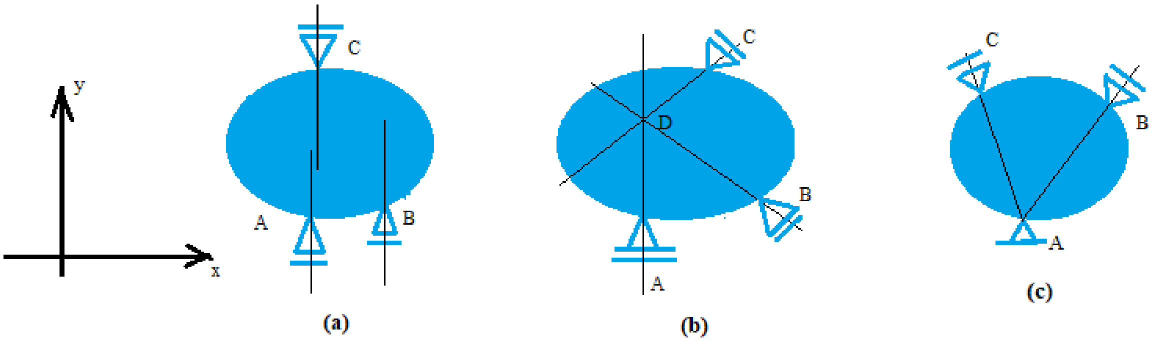


Figura 9.

En la figura (a) el vínculo C impide las traslaciones en la dirección *y* al igual que lo hacen A y B, pero no existe vínculo que impida la traslación en la dirección *x*.
En la figura (b) los apoyos A y B fijan el punto D, el apoyo C impide la traslación en la dirección CD que ya está impedida por los apoyos A y B pero no restringe la rotación alrededor de D.
En ambos casos el apoyo en C no es eficiente y se lo llama *vínculo aparente*.
En el caso de la figura (c) hay dos vínculos aparentes, los apoyos B y C permiten la rotación de la chapa alrededor de A.
Si en una chapa se colocan más vínculos de los estrictamente necesarios para inmovilizarla también se logra la constricción total, los vínculos excedentes se llaman *vínculos superabundantes* (figura 10). En la figura 10 se muestra una chapa con constricción total con vínculos superabundantes.

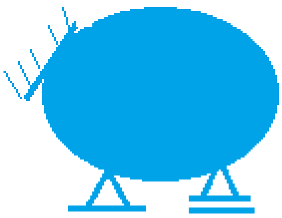


Figura 10.

1.6 Vínculos internos.

A los vínculos entre elementos estructurales (chapas) se los denomina *vínculos internos*. Existen diferentes tipos de vínculos internos según el movimiento relativo permitido entre los elementos. Generalmente permiten un único grado de libertad. En la figura 11 se muestran los diferentes tipos de vínculos internos.

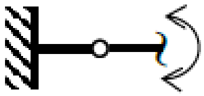
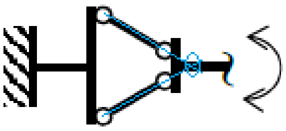
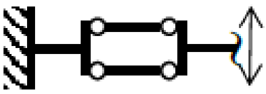
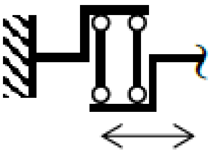
Representación	Nombre	Desplazamientos posibles		
		↕	↔	↻
	Articulación (propia)	No	No	Si
	Articulación propia (en el punto de intersección de las bielas)	No	No	Si
	Bielas paralelas o articulación impropia en la dirección horizontal	Si	No	No
	Bielas paralelas o articulación impropia en la dirección vertical	No	Si	No

Figura 11.

1.7 Cadenas cinemáticas abiertas y cerradas

Si se consideran dos chapas S_1 y S_2 (figura 12a) cada una de ellas tiene tres grados de libertad. Si se vinculan entre sí ambas chapas por medio de una articulación intermedia A_{12} y a la chapa S_1 se le imponen tres condiciones de vínculo como se muestra en la figura 12(b), la chapa S_1 quedará fija y, por lo tanto A_{12} también, por pertenecer a S_1. Como consecuencia de esto, la única posibilidad de movimiento que tendrá la chapa S_2 será una rotación alrededor de la articulación A_{12} (figura 12c). Si se quiere fijarla a tierra se le deberá imponer una condición de vínculo que impida esta rotación como lo muestra la figura 12(d).

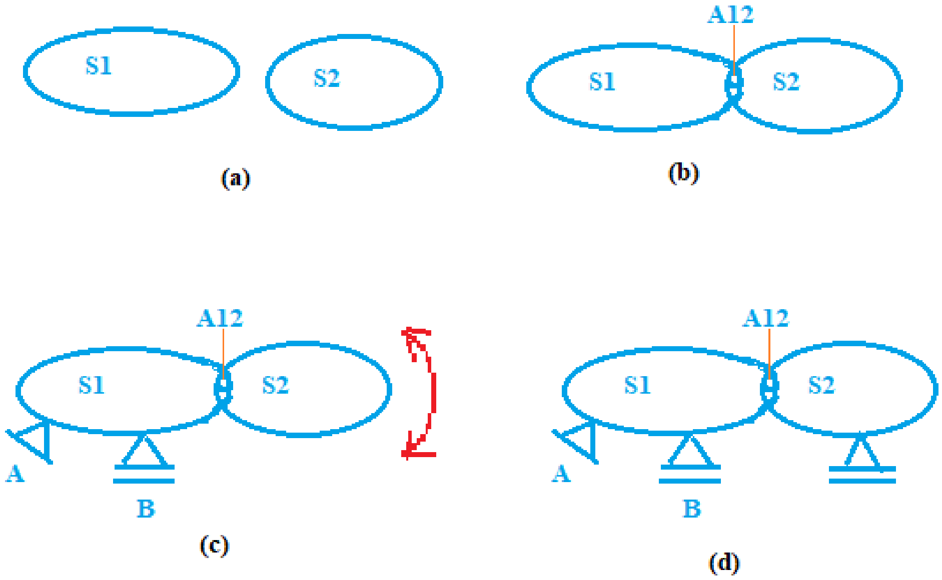


Figura 12.

Como se puede ver, para fijar el sistema compuesto por las dos chapas articuladas entre sí, es necesario contar con cuatro condiciones de vínculo, dos menos que si se considerara a las dos chapas separadamente. Este sistema se denomina cadena cinemática abierta de dos chapas. Si al considerar las chapas separadas el sistema así formado poseía seis grados de libertad, y al articularlas entre sí los grados de libertad se reducen a cuatro, se puede inferir que la articulación intermedia restringe dos grados de libertad del sistema. Esta articulación constituye un vínculo interno.

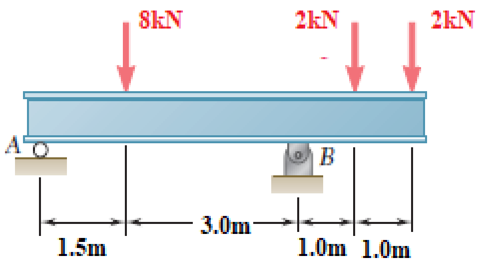
Generalizando, para una cadena cinemática abierta de *n* chapas existen (n-1) articulaciones intermedias. Cada chapa tiene tres grados de libertad y cada articulación intermedia restringe dos, por lo tanto el número de grados de libertad de una cadena cinemática abierta de *n* chapas puede determinarse como:

$$g = 3n - 2\,(n-1) = n + 2 \qquad (5)$$

Si se considera una cadena cinemática cerrada, es decir que la primer y última chapa están articuladas entre sí, y llamamos n al número de chapas y articulaciones intermedias, el número de grados de libertad de la cadena cinemática cerrada se puede calcular como:

$$g = 3n - 2n = n \qquad (6)$$

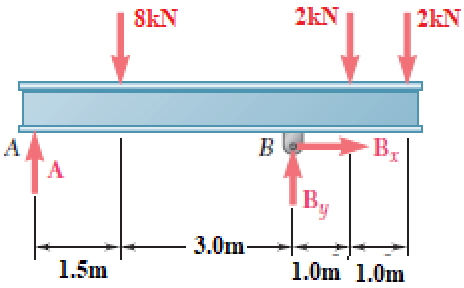
Problema



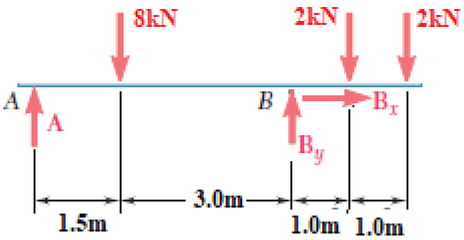
Se aplican tres cargas sobre una viga como muestra la figura. Determinar las reacciones de vínculo.

Solución

- Diagrama de cuerpo libre



Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga, se suponen los sentidos de las reacciones incógnitas. Se considera a todas las fuerzas actuando en el eje baricéntrico de la viga.



- Ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = 0 \qquad \therefore \qquad B_x = 0$$

$$\sum M_B = 0 \qquad A.4{,}5m - 8kN.3{,}0m + 2kN.1{,}0m + 2kN.2{,}0m = 0$$

$$\rightarrow \quad A = \frac{8kN.3{,}0m - 2kN.1{,}0m - 2kN.2{,}0m}{4{,}5m} = 4{,}0kN$$

$$A = 4{,}0kN \quad \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \qquad -B_y.4{,}5m\ +8kN.1{,}5m\ +2kN.5{,}5m\ +2kN.6{,}5m = 0$$

$$\rightarrow\ B_y = \frac{8kN.1{,}5m\ +2kN.5{,}5m\ +2kN.6{,}5m}{4{,}5m} = 8kN$$

$$B_y = 8kN\ \uparrow$$

Comprobación de los resultados:

$$\sum F_y = 0 \qquad (4\ +8-2-2-8)kN = 0$$

1.8 Determinación de reacciones en sistemas isostáticos de varias chapas.

Considere la viga mostrada en la figura. La estructura constituye una cadena cinemática compuesta por dos chapas articuladas entre sí en D por medio de una articulación intermedia. Los grados de libertad serán: g = n + 2 = 2 + 2 = 4, por lo tanto son necesarias 4 restricciones para que el sistema sea isostático. Esta condición se logra con apoyos de primera especie en A y B y un apoyo doble en C.

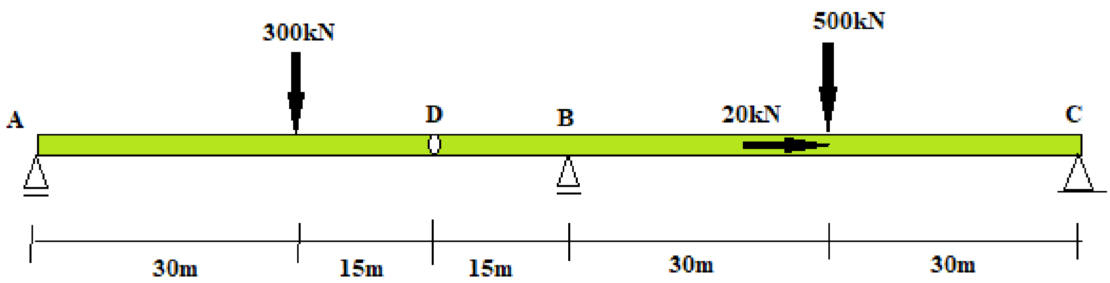
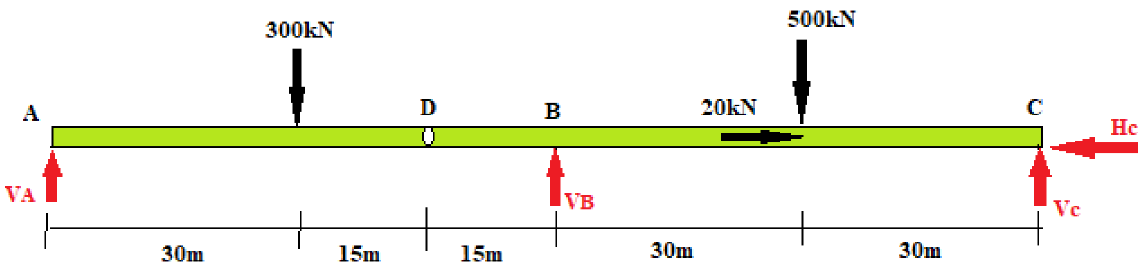


Diagrama de Cuerpo Libre

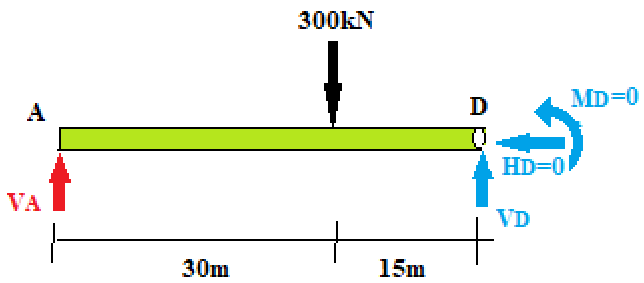


Ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = 0 \qquad 20kN - H_C = 0 \quad \therefore \quad \boxed{H_C = 20kN \quad \leftarrow}$$

Si se plantea $\sum F_y$ se tienen 3 incógnitas en la ecuación Una ecuación de momentos alrededor de A, B o C involucra dos incógnitas, por lo tanto es conveniente considerar la parte de viga entre A y D y plantear el equilibrio de la misma, sabiendo que si una estructura está en equilibrio una parte de ella también lo estará.

Diagrama de cuerpo libre de A-D:



$$\sum M_D = 0 \quad V_A . 45m - 300kN .\ 15m = 0 \qquad \therefore \quad \boxed{V_A = 100\ kN \quad \uparrow}$$

Luego considerando la estructura complete:

$$\sum M_C = 0 \quad V_A . 120m - 300kN . 90m + V_B . 60m - 500kN\ .\ 30m = 0$$

$$\boxed{V_B = 500kN \quad \uparrow}$$

$$\sum M_A = 0 \qquad - V_C\ . 120m + 500kN\ .\ 90m - 500kN\ .\ 60m + 300kN\ .\ 30m = 0$$

$$\boxed{V_C = 200kN \quad \uparrow}$$

Comprobación de resultados:

$$\sum F_y = 0 \quad 100kN + 500kN + 200kN - 300kN - 500\ kN = 0$$

1.9 Equilibrio en tres dimensiones. Condiciones de vínculos.

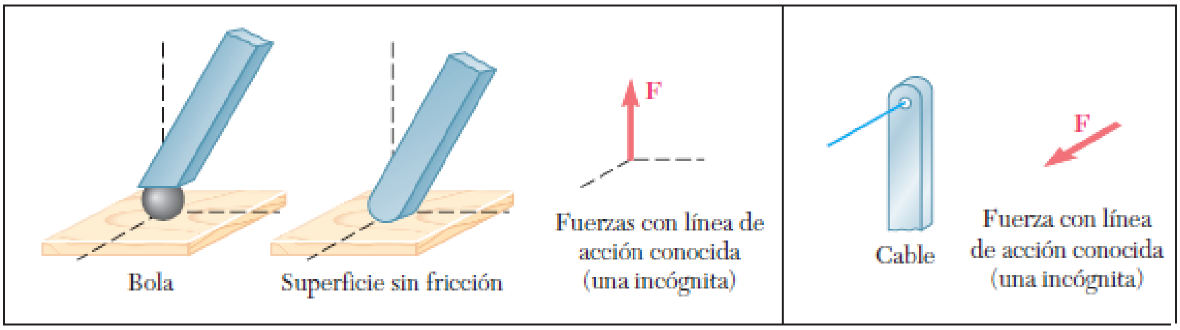
Las ecuaciones (2) son las condiciones de equilibrio para un cuerpo en el espacio. Vectorialmente estas ecuaciones se expresan como:

$$\sum \bar{F} = \bar{0} \qquad \sum \bar{M} = 0 \qquad (7)$$

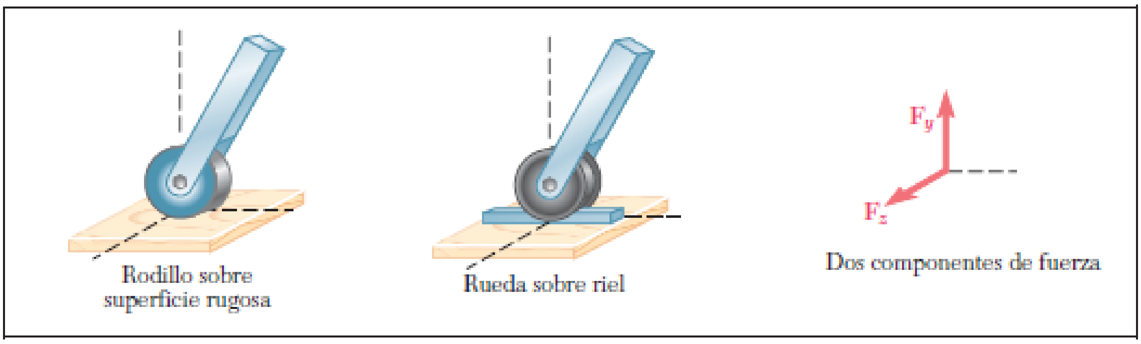
Los cuerpos rígidos en el espacio tienen posibilidad de trasladarse en tres direcciones si consideramos los tres ejes coordenados *x,y,z*, al igual que rotar alrededor de estos tres ejes. Por lo tanto un cuerpo rígido en el espacio tiene seis grados de libertad.

Los vínculos en el espacio, al igual que en el plano, se clasifican según los grados de libertad que restringen.

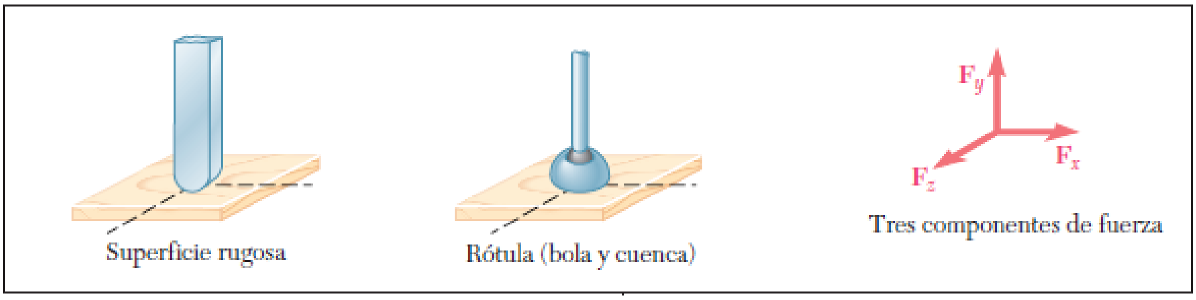
a) Vínculos de primera especie o apoyo deslizante sobre un plano. Este tipo de vínculo sólo impide la traslación en una dirección, por lo tanto ejercen una única fuerza con dirección conocida, es decir la única incógnita es la magnitud de la fuerza ejercida.



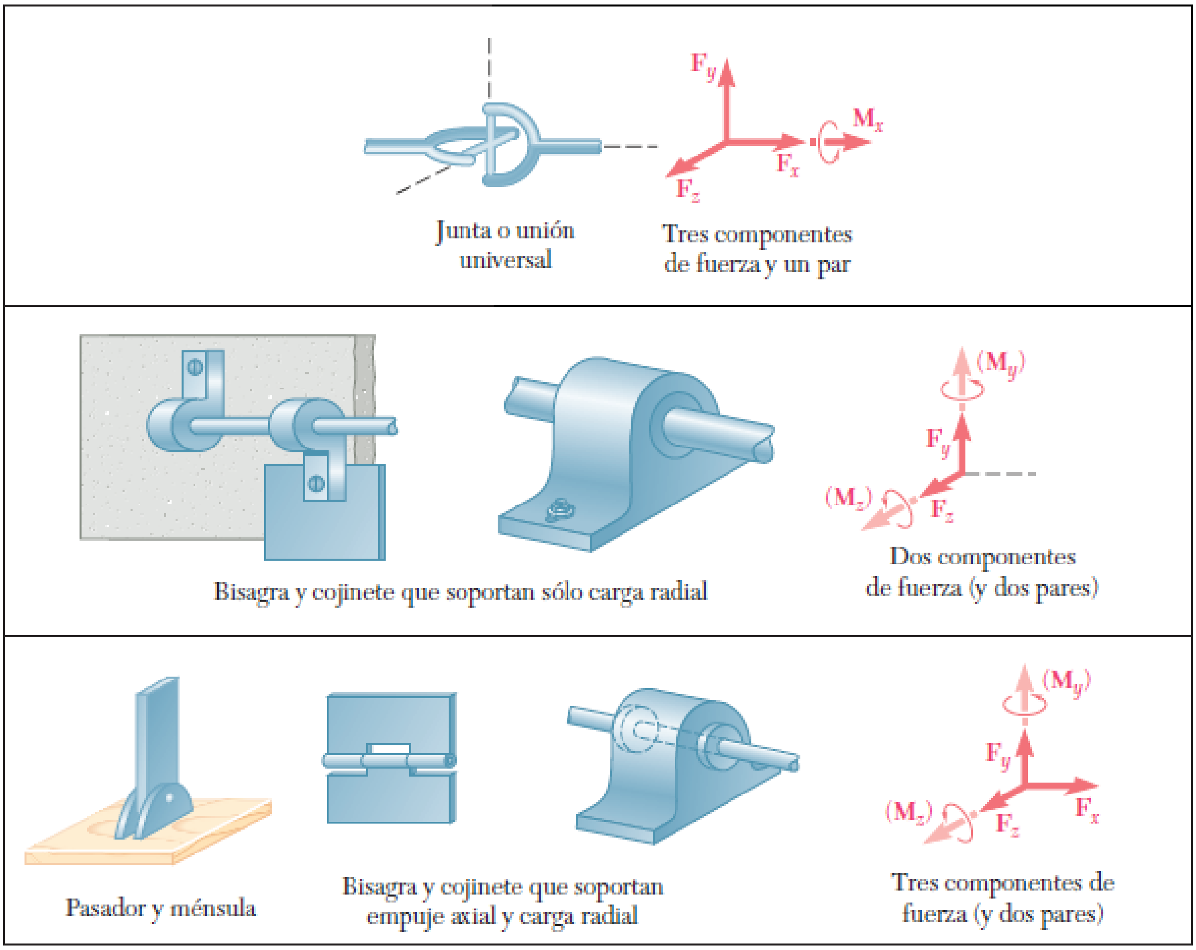
b) Vínculos de segunda especie. Estos vínculos impiden la traslación en dos direcciones por consiguiente las reacciones correspondientes consisten en dos componentes de fuerza desconocidas.



c) *Vínculos de tercera especie, apoyo fijo o rótula:* este tipo de vínculo impide las tres traslaciones pero libera las tres rotaciones.



d) Vínculos de cuarta y quinta especie: este tipo de vínculo restringe cuatro y cinco grados de libertad respectivamente, generalmente se usan en maquinarias. Pueden restringir conjuntamente algunos desplazamientos y rotaciones.

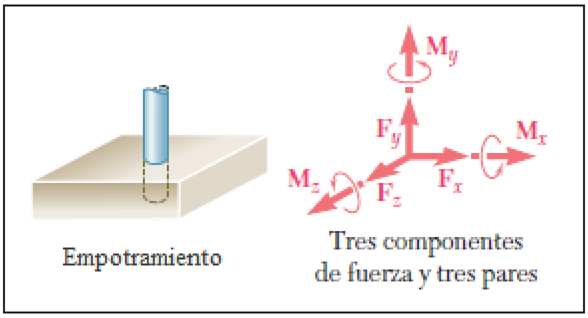


Junta o unión universal — Tres componentes de fuerza y un par

Bisagra y cojinete que soportan sólo carga radial — Dos componentes de fuerza (y dos pares)

Pasador y ménsula — Bisagra y cojinete que soportan empuje axial y carga radial — Tres componentes de fuerza (y dos pares)

e) *Vínculos de sexta especie o empotramiento:* estos vínculos restringen los seis grados de libertad del cuerpo. Por lo tanto son seis las incógnitas a determinar.



Empotramiento — Tres componentes de fuerza y tres pares

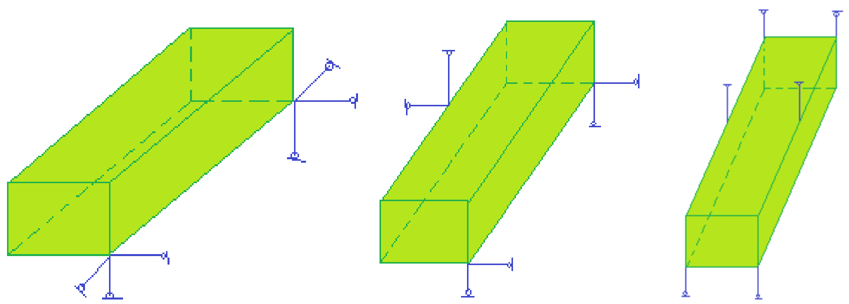
1.10 Sistemas isostáticos en el espacio. Constricción total, parcial o impropia.

Para imponer constricción total en el espacio a un cuerpo indeformable es necesario suprimir sus seis grados de libertad, lo que exige el empleo de seis vínculos simples, convenientemente ubicados, como mínimo o sus equivalentes vínculos múltiples.

Si se usan seis vínculos simples eficaces, se tendrán seis incógnitas a calcular para determinar todas las reacciones de vínculo. Como se disponen de seis ecuaciones de equilibrio se dice que el sistema es isostático ya que el número de incógnitas y de ecuaciones es el mismo.

Si el número de reacciones a determinar excede a seis se dice que la estructura es estáticamente indeterminada o hiperestática.
Si el número de reacciones es menor habrá algunos movimientos no restringidos en el cuerpo, en este caso se dice que existe una constricción parcial.
El cuerpo rígido presenta constricción impropia cuando las rectas de acción de las reacciones presentan algunas de las siguientes disposiciones:

- Cuatro o más de las seis rectas concurren a un mismo punto propio o si es impropio cuatro rectas son paralelas.
- Las rectas concurren tres a tres en dos puntos.
- Las rectas concurren dos a dos en tres puntos alineados.
- Cuatro o más rectas están en un mismo plano.
- Las rectas de acción están ubicadas dos a dos en tres planos que se cortan a lo largo de una misma recta o son paralelos entre sí.
- Las rectas están situadas en seis planos de un haz o paralelos.
  La siguiente figura muestra algunas de estas situaciones.



<u>Ejemplo:</u>

Determinar las reacciones de vínculo para la estructura mostrada en la figura bajo la acción de la carga de 5kN en la dirección del eje *y*.

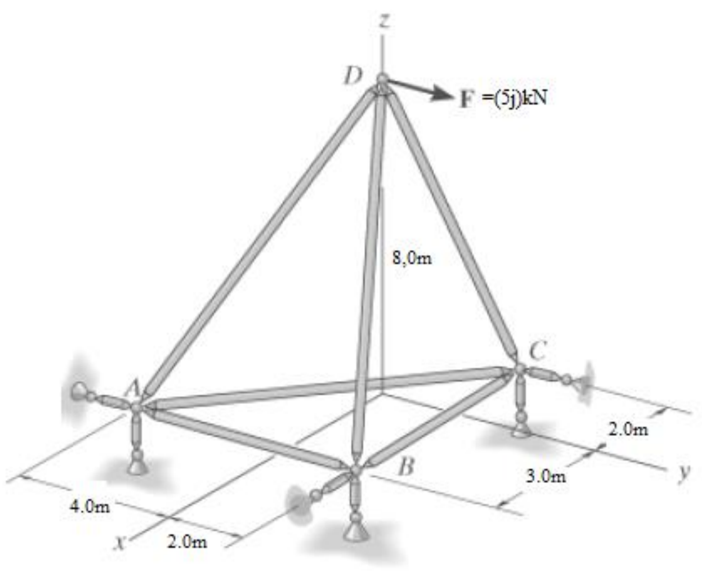
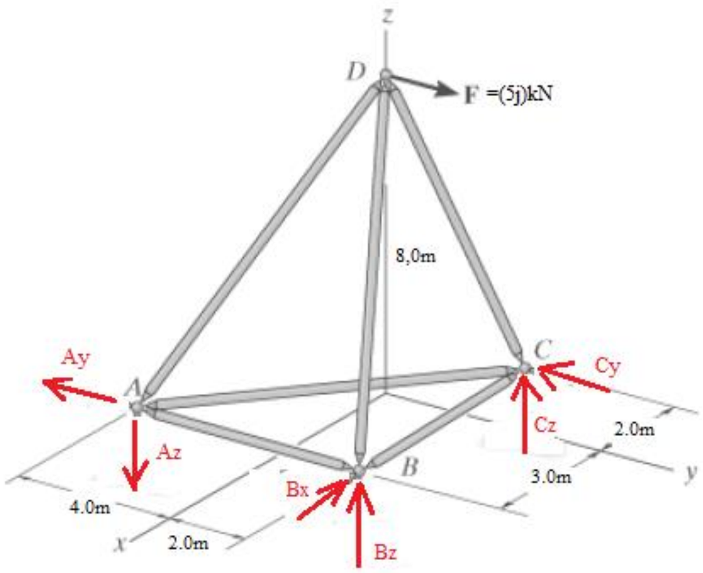


Diagrama de cuerpo libre:



Ecuaciones de equilibrio:

$\sum M^{y}{}_{A} = 0$ $\boxed{C_z = 0\ kN}$

$\sum M^{x}{}_{B} = 0$ $A_z\,.6m + 5kN.8m = 0$ $\boxed{A_z = 6.67kN}$

$\sum F_z = 0$ $-6.67\ kN + B_z = 0$ $\boxed{B_z = 6.67\ kN}$

$\sum M^{z}{}_{C} = 0$ $-5kN.2m + A_y.5m = 0$ $\boxed{A_y = 2.0\ kN}$

$\sum F_x = 0$ $\boxed{B_x = 0}$

$\sum F_y = 0$ $-2\ kN + 5kN - C_y = 0$ $\boxed{C_y = 3\ kN}$