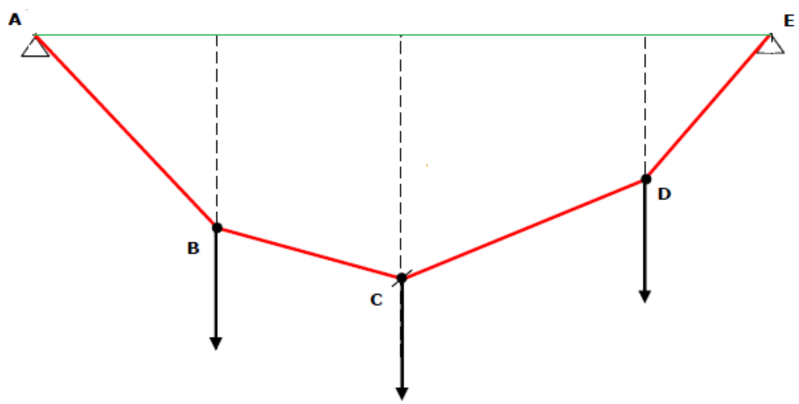
Cables

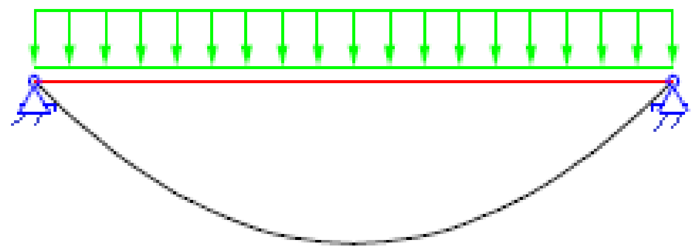
Los cables son elementos estructurales lineales (las dimensiones de su sección son muy pequeñas comparadas con su longitud).
Tienen la característica de ser sumamente flexibles. Razón por la cual para su estudio no se considera su resistencia a flexión y se los diseña para soportar cargas en forma axial, con esfuerzos únicamente de tracción.

Formas de los cables:
La forma del cable depende de las cargas que actúen en él, por ello, para estudiar la forma de un cable debemos distinguir diferentes acciones que lo solicitan.
En general los cables se encuentran sometidos principalmente a:
- cargas concentradas en diferentes puntos de su extensión.
- cargas verticales distribuidas por unidad horizontal de longitud (Ej. peso del tablero de un puente colgante)
- cargas verticales distribuidas por unidad de longitud del cable (Ej. peso propio del cable)

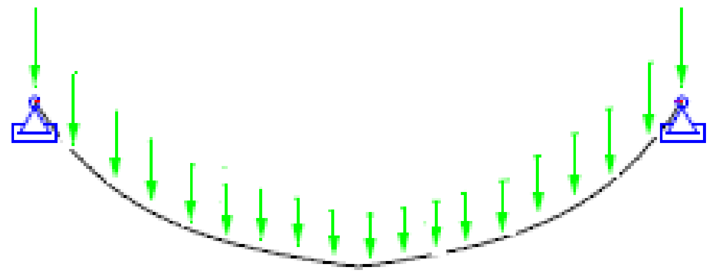
Cuando un cable sujetado en sus extremos es sometido a cargas concentradas adopta una forma poligonal.



Si el cable soporta una carga distribuida por unidad horizontal de longitud, su forma es parabólica.



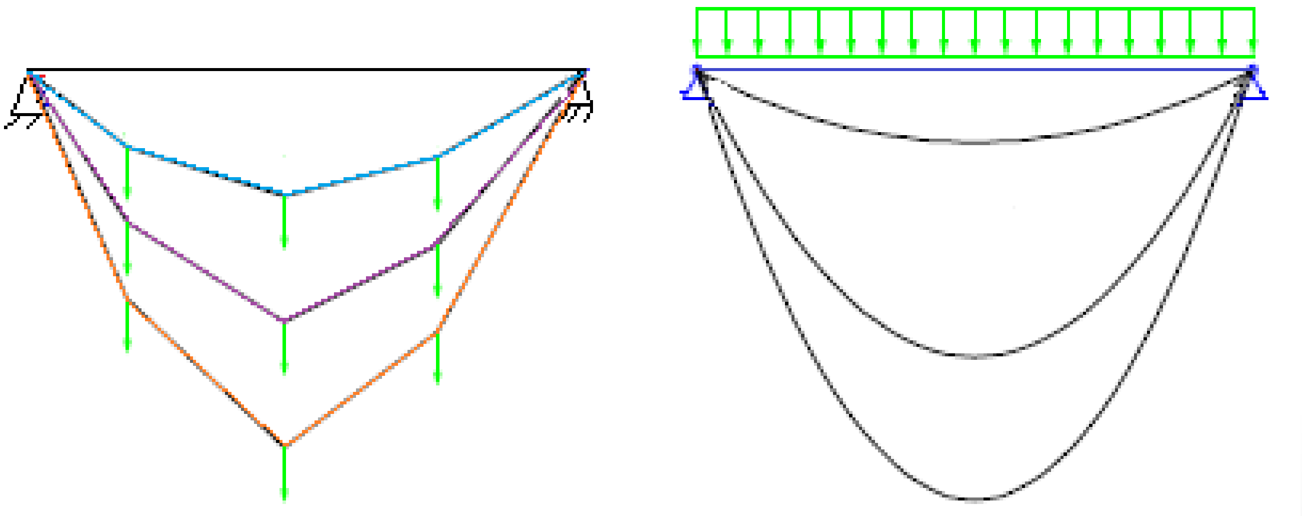
Mientras que si está sometido a una fuerza uniformemente distribuida por unidad de longitud de cable, toma la forma de catenaria.



Equilibrio de un cable

Las condiciones de vínculo en los extremos de un cable sometido a la acción de un sistema de fuerzas arbitrario deben ser tales que permitan el equilibrio del conjunto. Debido que los cables no poseen resistencia a flexión, no ejercen momentos en los apoyos, sólo fuerzas cuyas intensidades y direcciones dependerán de las cargas actuantes en el sistema. Los vínculos en los extremos del cable siempre son apoyos fijos (vínculos de segunda especie).

Si ahora aplicamos las ecuaciones de equilibrio, tendremos entonces un sistema de tres ecuaciones independientes y cuatro incógnitas (dos por cada apoyo), es decir un sistema estáticamente indeterminado. Esto significa que existe una multitud de cables que podrán satisfacer las ecuaciones de equilibrio para un mismo sistema de fuerzas.



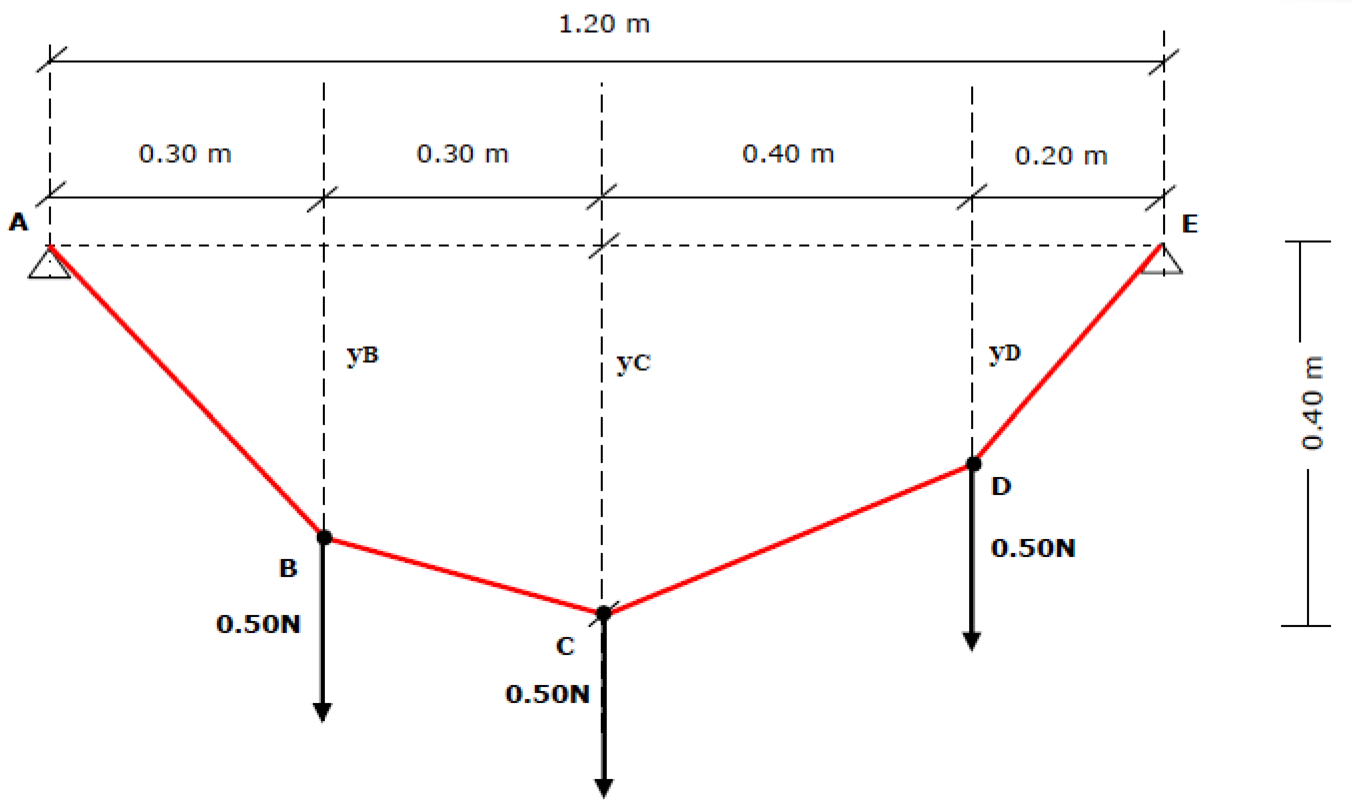
Podemos ver que todos los cables bajo la acción de un mismo sistema de cargas se encuentran en equilibrio. Sin embargo cada uno posee una longitud, una forma distinta y los esfuerzos que solicitan a cada cable son distintos.

Por lo tanto, para la determinación de las reacciones de vínculo se podrá plantear una cuarta ecuación en función de la longitud que presenta el cable en estudio, o de la deformación que se desea del mismo, o del máximo esfuerzo para el cual se diseña este elemento estructural. De esta forma se puede hallar una única solución del sistema que se ajusta a las condiciones del problema en estudio.

Hipótesis para el análisis de cables

-**Sección despreciable**. Se considera que el cable posee una dimensión predominante mucho mayor que los otras dos.
-**Flexibilidad perfecta.** El cable no resiste esfuerzos de flexión ni de corte. Tan sólo resiste esfuerzos axiales.
-**Inextensibilidad.** Cuando está sometido a tracción, el cable es lo suficientemente rígido (en dirección longitudinal) como para que se pueda despreciar su extensibilidad.

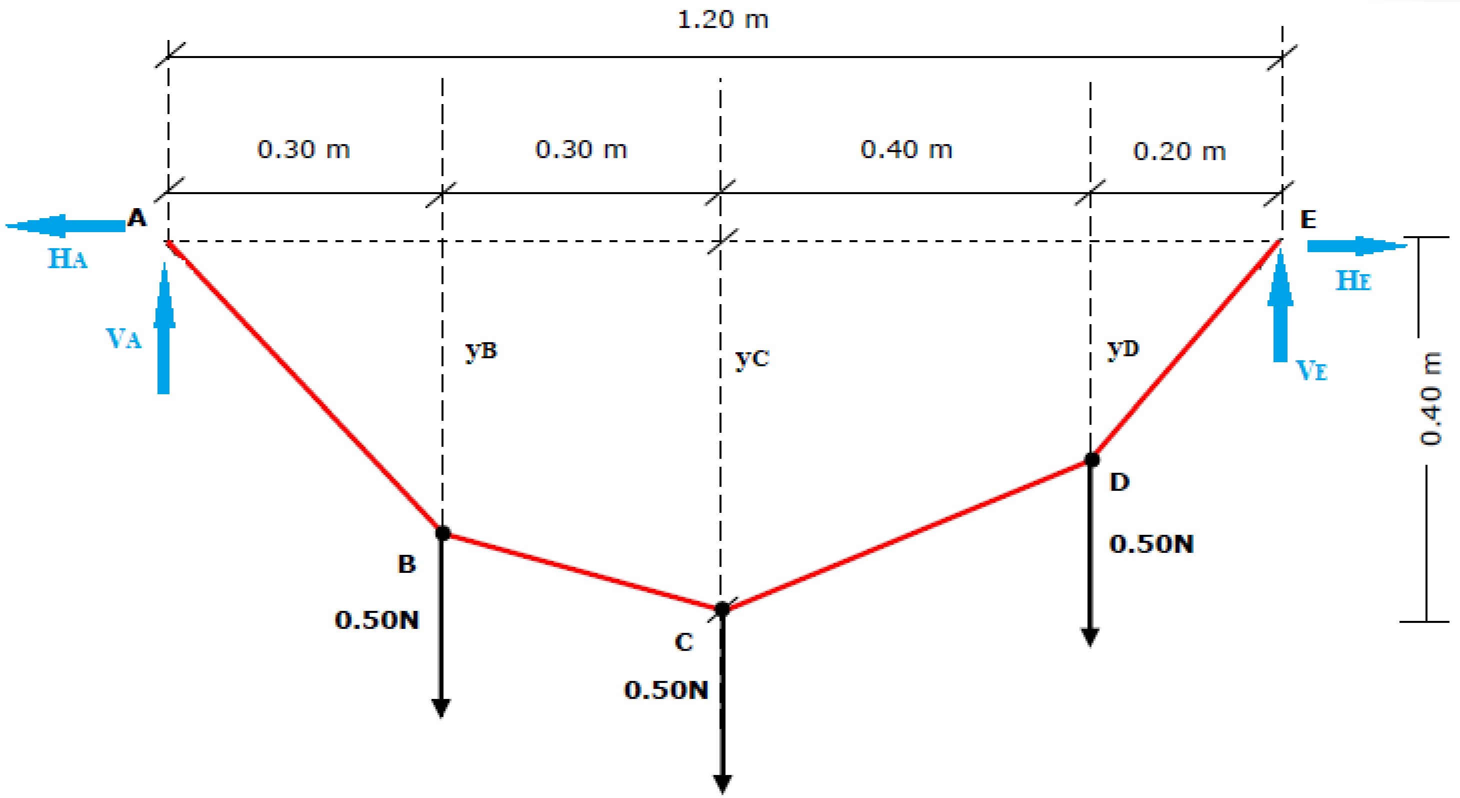
Cable con cargas concentradas



Para poder determinar las reacciones de apoyo se cuenta con un dato adicional que es la cota y_C .

Cálculo de reacciones

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre



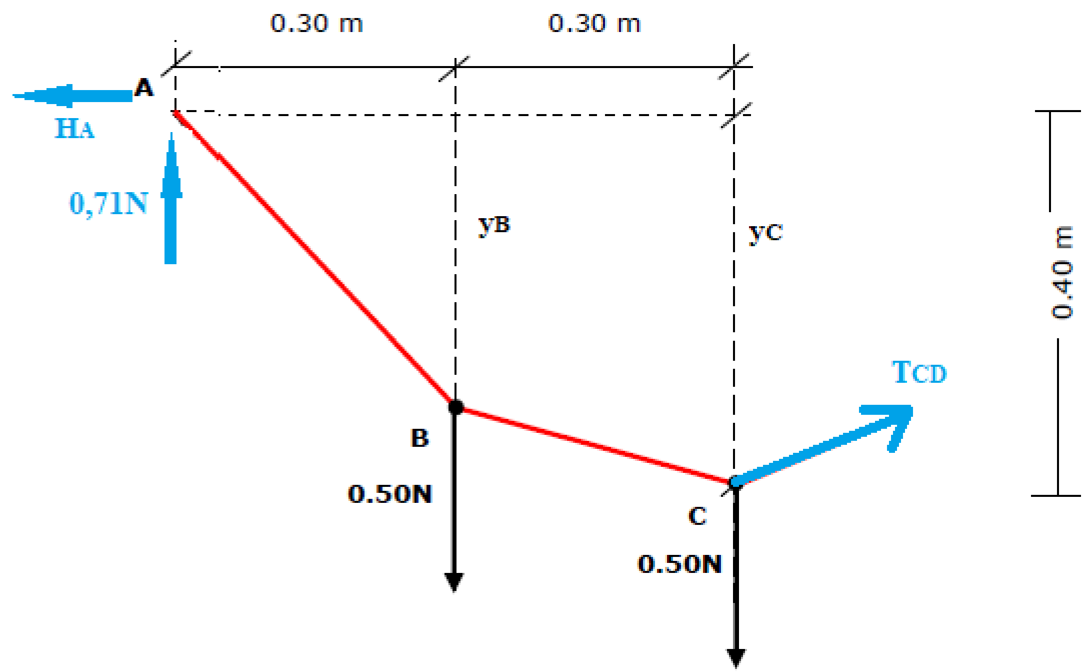
$\sum M_A$=0

$-V_E$. 1,20m + 0,50N . 1,0m + 0,50N . 0,60m + 0,50N . 0,30m =0 $\boxed{V_E\text{= 0,79N}}$

$$\sum M_E = 0$$

V_A .1,20m – 0,50N . 090m -0,5N . 0,60m – 0,5N . 0,20m =0 $\boxed{V_A\text{ = 0,71N}}$

Para calcular las componentes horizontales se corta el cable en el punto en el que conocemos la posición con respecto a la línea que une los apoyos.

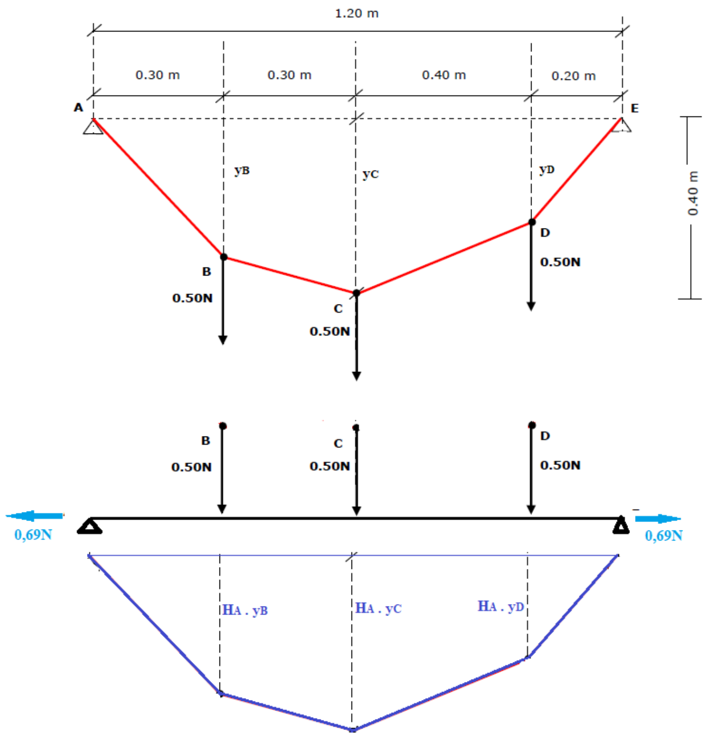


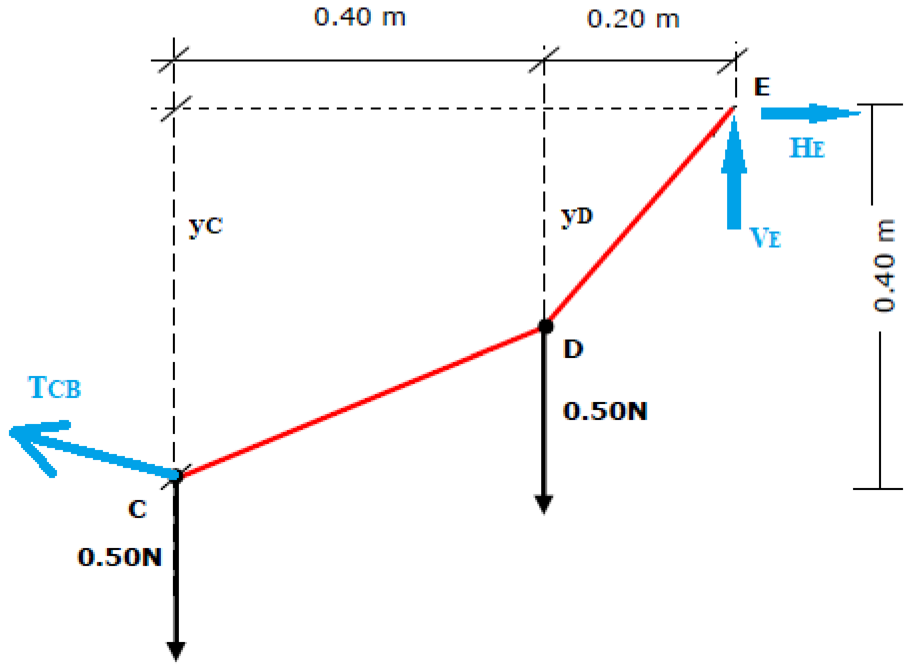
$\sum M_C$=0 $\quad -H_A$. 0,40m + $\underbrace{\text{0,71N . 0,60m – 0,50N . 0,30m}}_{\text{Momento correspondiente a una viga simplemente apoyada con igual carga que el cable } = M_V}$ = 0 $\quad \boxed{H_A = 0{,}69\text{N}}$

$$y_c = \frac{M_v}{H_A}$$

Esto muestra que la forma del cable es la misma que el diagrama de momentos de una viga simplemente apoyada en una escala particular determinada por la componente horizontal $H=H_A=H_E$. **Esto se conoce como Teorema general del cable**

"En un punto cualquiera de un cable sometido a cargas verticales, el producto de la componente horizontal de la tensión que soporta el cable por la distancia vertical desde ese punto a la cuerda, es igual al momento flector que se produciría en esa sección si las cargas que soporta el cable actuasen sobre una viga apoyada en sus extremos, de la misma luz que él."



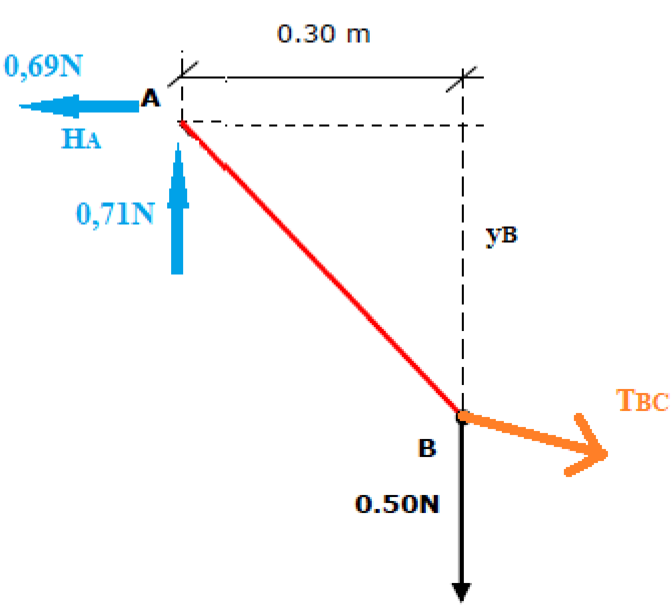


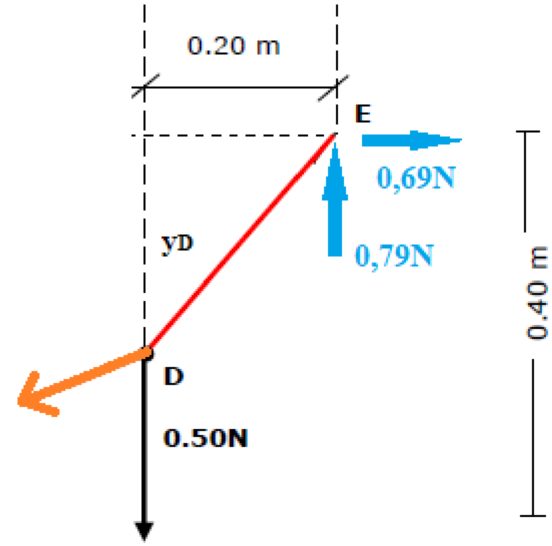
$\sum M_C$ = 0 $\qquad$ H_E . 0,40m -0,79N . 0,60m + 0,50N . 0,40m =0

$$\boxed{H_E = 0{,}69\text{N}}$$

$\left.\begin{array}{l}\sum F_y = 0 \\ \sum F_x = 0\end{array}\right\}$ Ambas verifican (siempre deben hacerse)

Ahora debemos determinar *yB* e *yD*





$\sum M_B$ =0

0,71N . 0,30m -0,69N . *yB* = 0

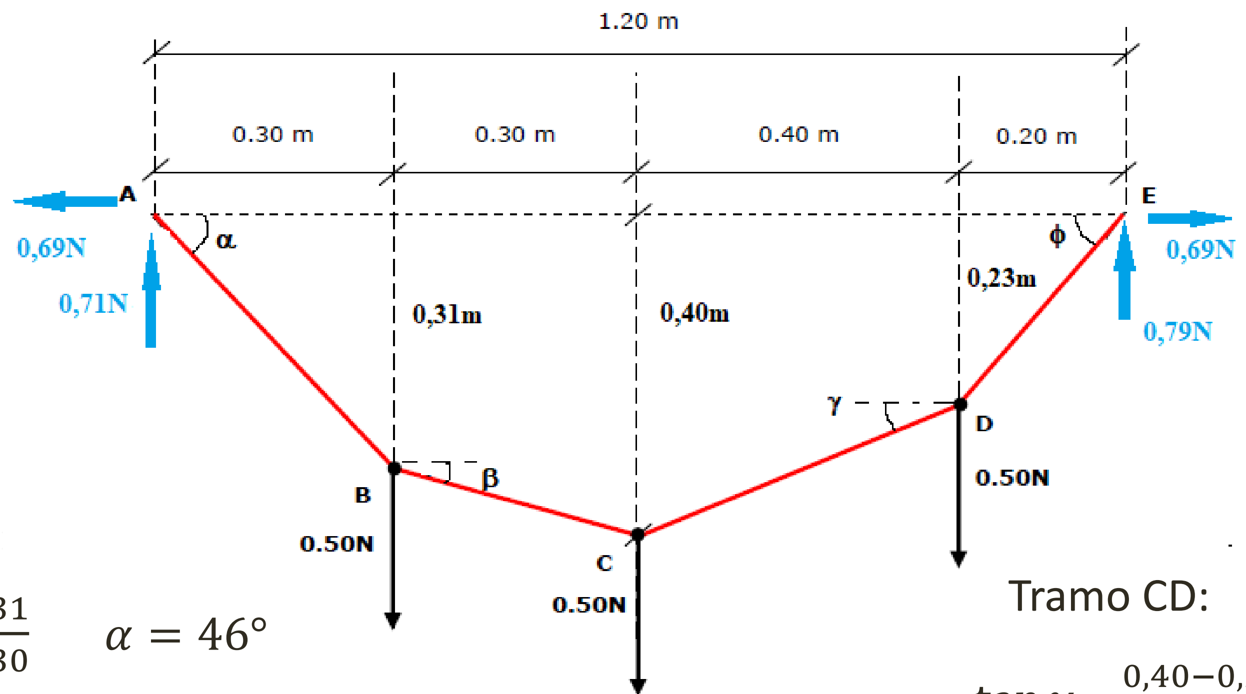
$\boxed{yB = 0{,}31m}$

$\sum M_D$ =0

-0,79N . 0,20m +0,69N . *yD* = 0

$\boxed{yD = 0{,}23m}$

Ahora podremos determinar las pendientes en cada tramo



Tramo AB

$\tan\alpha = \frac{0,31}{0,30}$ $\quad \alpha = 46°$

Tramo CD:

$\tan\gamma = \frac{0,40-0,23}{0,40}$ $\quad \gamma = 23°$

Tramo BC:

$\tan\beta = \frac{0,40-0,31}{0,30}$ $\quad \beta = 17°$

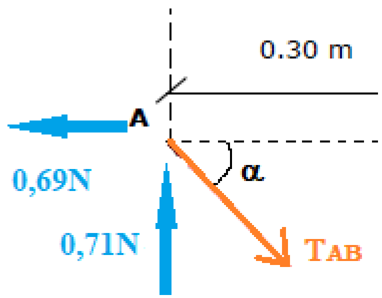
Tramo DE:

$\tan\phi = \frac{0,23}{0,20}$ $\quad \phi = 49°$

Longitud del cable: **AB +BC +CD + DE** (aplicando Teorema de Pitágoras)

L_{AE} = 1,47m

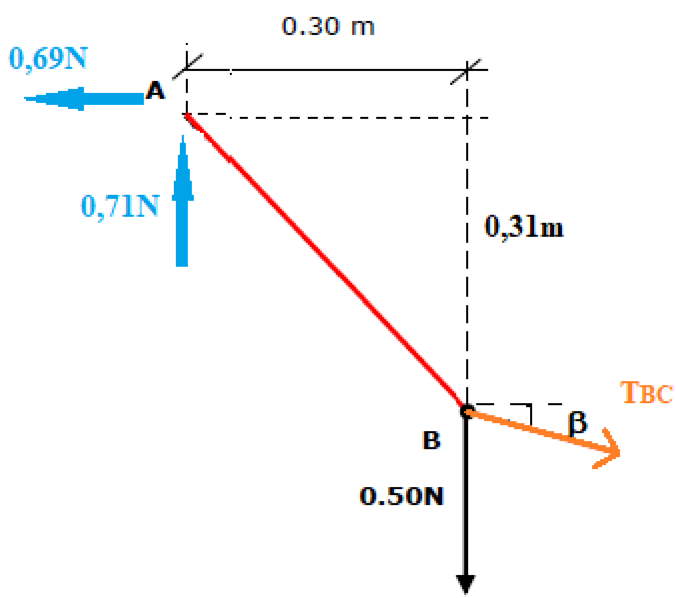
Cálculo de esfuerzos en cada tramo del cable



$$\sum F_x = 0 \qquad -0{,}69\text{N} + T_{AB}\cos\alpha = 0$$

$$\boxed{T_{AB} = \frac{0{,}69}{\cos\alpha} = 0{,}99\text{N}}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \text{(como verificación)}$$

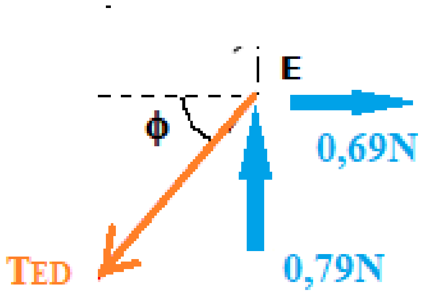


$$\sum F_x = 0 \qquad -0{,}69N + T_{BC}\cos\beta = 0$$

$$\boxed{T_{BC} = 0{,}72\text{N}}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \text{(como verificación)}$$

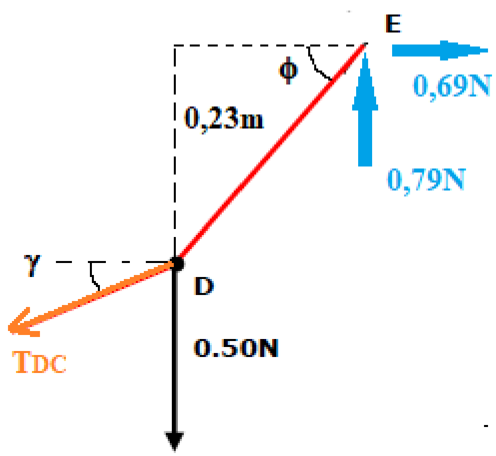
De las sumatorias de fuerzas en *x* se puede observar que la componente horizontal en cualquier punto del cable se mantiene constante e igual a **0,69N.**
Esta es una característica de todos los cables.



$\sum F_y = 0 \qquad - T_{ED} \sin \emptyset + 0{,}79\text{N} = 0$

$$\boxed{T_{ED} = 1{,}05\text{N}}$$

$\sum F_x = 0 \qquad$ Verificación



$\sum F_y = 0 \qquad - T_{DC} \sin \gamma + 0{,}79\text{N} - 0{,}5\text{N} = 0$

$$\boxed{T_{DC} = 0{,}74\text{N}}$$

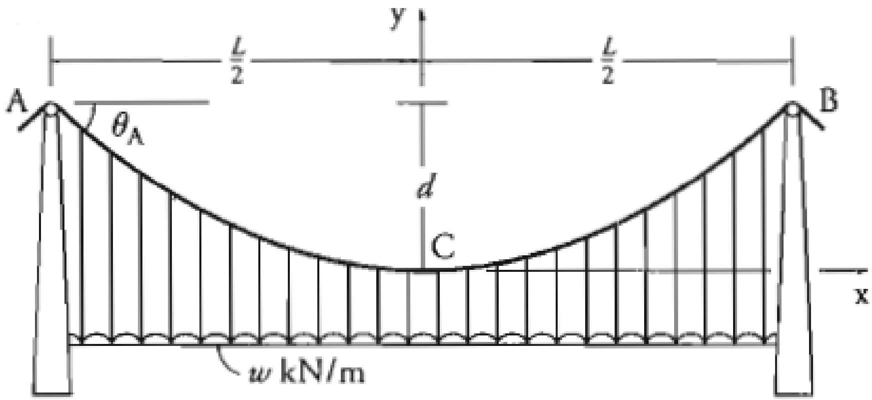
$\sum F_x = 0 \qquad$ Verificación

T_{max} = esfuerzo máximo en un tramo que corresponderá a uno de los tramos cercanos a los apoyos, el de mayor pendiente.

$$T_{max} = T_{ED}$$

Cable con carga uniformemente distribuida sobre la horizontal.

Analizamos ahora un cable sometido a la acción de carga uniformemente distribuida proyectada sobre la horizontal como se muestra en la figura.



El diagrama de momentos de una viga simplemente apoyada bajo cargas uniformemente distribuida es una parábola cuyo valor máximo es igual a ***w L²/8*** y se produce en la mitad de la luz.

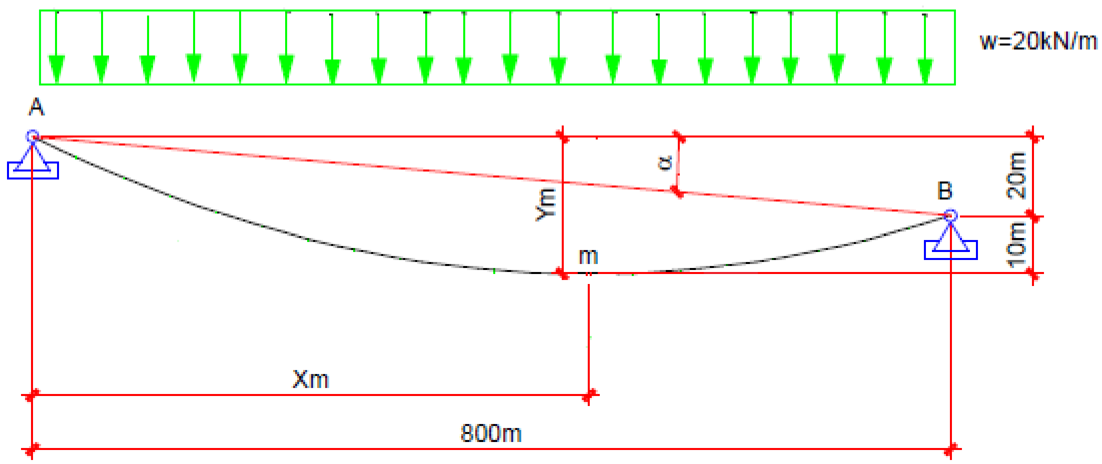
Aplicando el teorema general del cable se tiene:

$$\boxed{H = \frac{M_V}{d} = \frac{wL^2}{8d}}$$

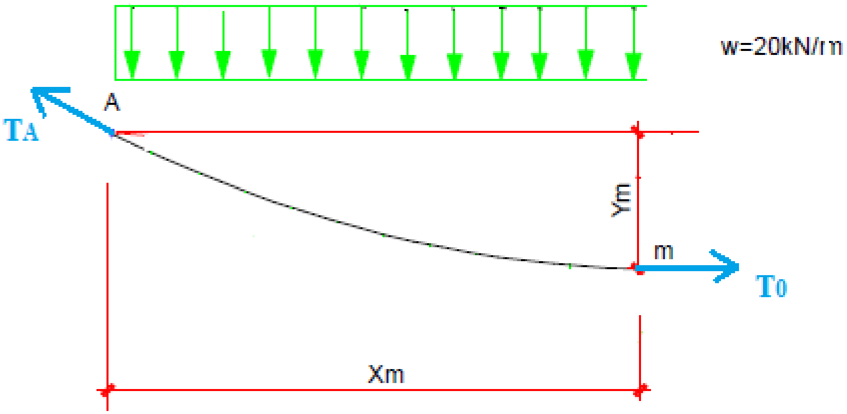
La tracción máxima ocurrirá en los apoyos del cable:

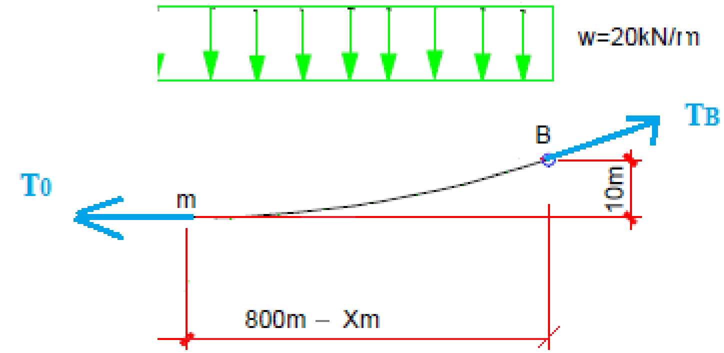
$$\boxed{T_{max} = \sqrt{V^2 + H^2}}$$

Cable con carga uniformemente distribuida y apoyos a distinta altura



En este caso el punto mas bajo del cable no estará en el centro del tramo debido a que los apoyos están a diferente altura.
Debemos separar la estructura en dos partes :





Tramo A-m

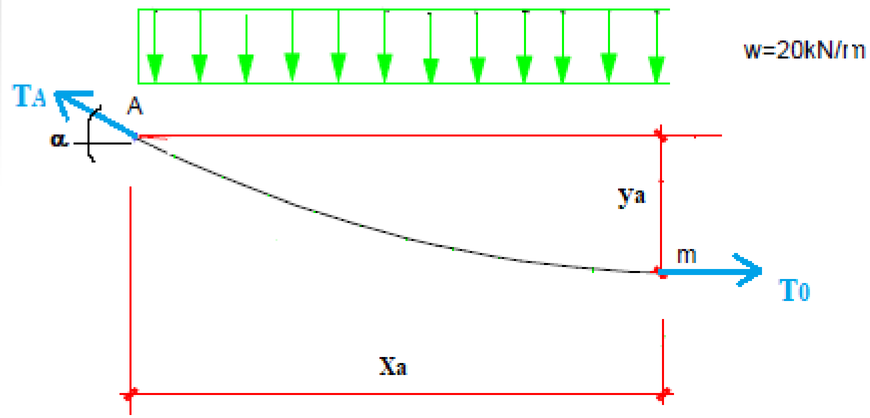
$\sum M_A$ =0 $\qquad w.\, x_a.\frac{x_a}{2}$ - T_0 . y_a = 0 $\longrightarrow$ T_0 = $\frac{w\ .x^2{}_a}{2.y_a}$

Tramo B-m

$\sum M_B$ =0 $\qquad -w.\, x_b.\frac{x_b}{2}$ + T_0 . y_b = 0 $\longrightarrow$ T_0 = $\frac{w\ .x^2{}_b}{2.y_b}$

Igualando ambos términos

$$\frac{x_a^2}{y_a} = \frac{x_b^2}{y_b} \longrightarrow x_b^2 = \frac{x_a^2}{y_a}\ .\, y_b$$



$$\sum F_x = 0 \quad -T_0 + T\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -w.x + T\sin\alpha = 0$$

$$\boxed{T = \sqrt{T_{0+}^2\,(w.x)^2}}$$

$$\boxed{T = \frac{T_0}{\cos\alpha_i}}$$

Siempre el esfuerzo máximo estará en uno de los extremos del cable, el de mayor pendiente cuando el ($\cos\alpha_i$) es menor.