

**MECÁNICA APLICADA**  
**MECÁNICA Y MECANISMOS**

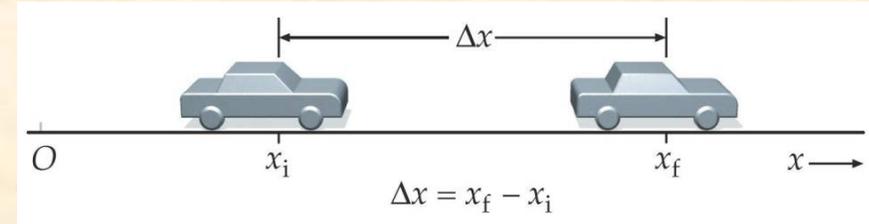
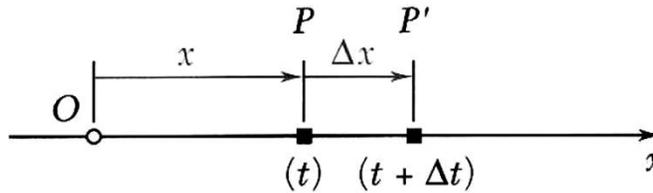


**FACULTAD  
DE INGENIERÍA**

# **CINEMÁTICA DE PARTÍCULAS**

**Ing. Carlos Barrera - 2023**

# Posición, velocidad y aceleración

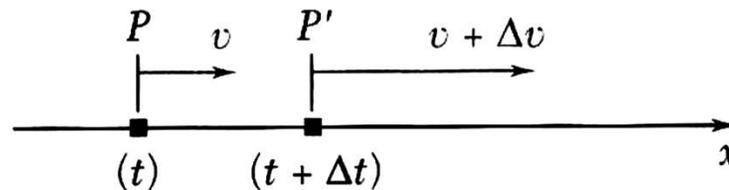


$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\text{Velocidad instantánea} = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocidad se representa mediante un número que puede ser positivo o negativo

$$v = \frac{dx}{dt}$$



$$\text{Aceleración promedio} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\text{Aceleración instantánea} = a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a = v \frac{dv}{dx}$$

## DINÁMICA DEL PUNTO

### A Cinemática del Punto

Para el estudio que haremos utilizaremos una terna fundamental positiva, A tal sistema de referencia lo suponemos fijo y al espacio que lo rodea con las propiedades de la geometría euclidiana.

#### 1 Posición

La posición de un punto R referido a la terna esta definida por el conocimiento de sus tres coordenadas  $x, y, z$  o por el vector posición  $R - O$  en donde O es el punto coincidente con el origen de coordenadas, de manera que:

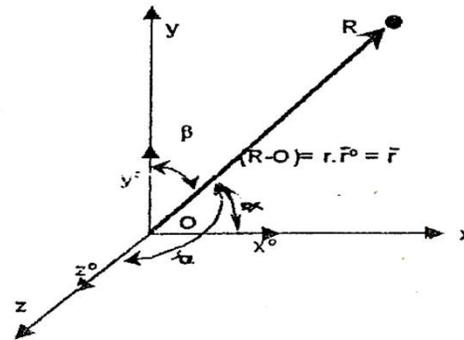
$$R - O = x \cdot \bar{x}^0 + y \cdot \bar{y}^0 + z \cdot \bar{z}^0$$

Con lo que la posición de R queda definida sin ambigüedad. Si denominamos  $\bar{r}^0$  al versor que tiene la dirección del vector posición, podemos escribir que  $R - O = r \cdot \bar{r}^0$  donde r es módulo del vector posición y  $\bar{r}^0$  su dirección. Podemos establecer que:

$$\bar{r}^0 = \cos \alpha \cdot \bar{x}^0 + \cos \beta \cdot \bar{y}^0 + \cos \gamma \cdot \bar{z}^0$$

De este modo  $\alpha, \beta, \gamma$  son los ángulos que forma nuestro vector posición con los ejes de referencia.

A los cosenos de dichos ángulos se los denomina cosenos directores.



La posición del punto R puede ser móvil y por lo tanto en cada momento quedará definido por el conocimiento de sus tres coordenadas  $x, y, z$  de manera que si la variación de las coordenadas es función continua del tiempo podemos escribir que

$$x = x(t) ; \quad y = y(t) ; \quad z = z(t) \quad (1)$$

o en forma vectorial

$$R - O = \bar{R}(t) = r(t) \cdot \bar{r}^0 \quad (2)$$

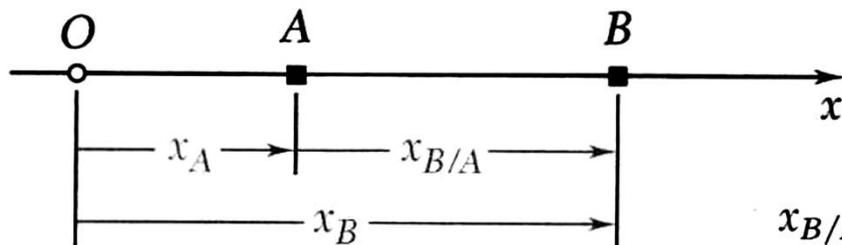
Si estas funciones permanecen continuas y finitas en un intervalo comprendido entre un valor inicial  $t_0$  hasta un valor  $t_f$  en que el movimiento está definido se les denomina ecuaciones o ley de movimiento del punto R.

Si en las ecuaciones (1) eliminamos el tiempo, obtenemos la ecuación de la trayectoria del móvil, y también a dichas ecuaciones se las puede considerar como ecuaciones paramétricas de la trayectoria donde el parámetro es el tiempo t.

Es decir que sintetizando

$$R - O = x(t) \cdot \bar{x}^0 + y(t) \cdot \bar{y}^0 + z(t) \cdot \bar{z}^0$$

# Movimiento relativo de partículas



$$x_{B/A} = x_B - x_A \quad \text{O}$$

$$x_B = x_A + x_{B/A}$$

La diferencia  $x_B - x_A$  define la **Coordenada de posición relativa** de B con respecto a A.

Al diferenciar:

$$v_{B/A} = v_B - v_A \quad \text{O}$$

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

La razón de cambio  $v_{B/A}$  se conoce como la **velocidad relativa** de B con respecto a A

$$a_{B/A} = a_B - a_A \quad \text{O}$$

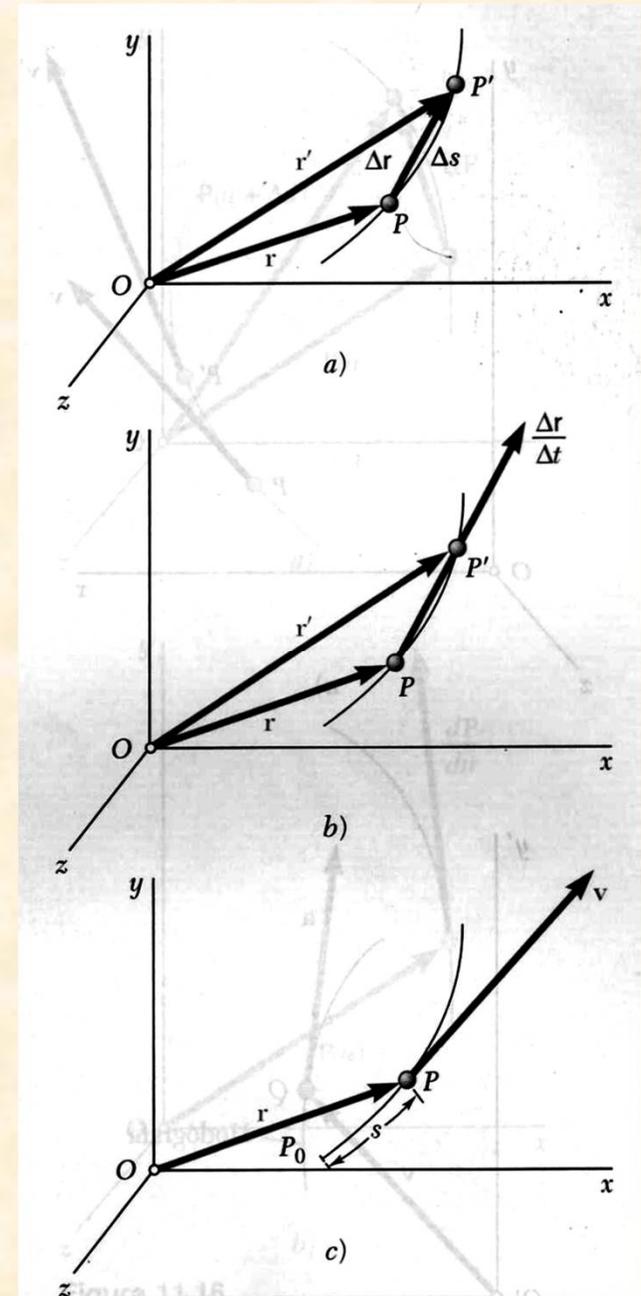
$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

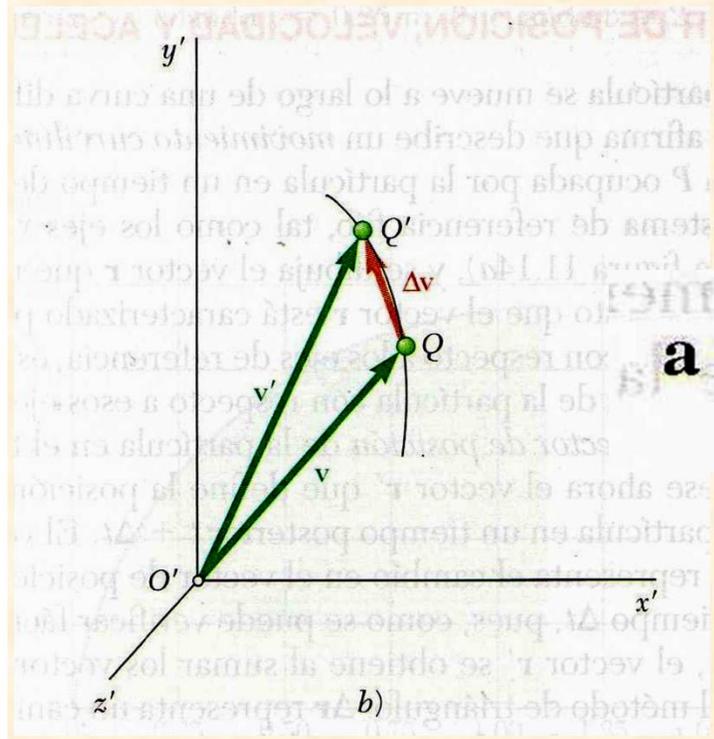
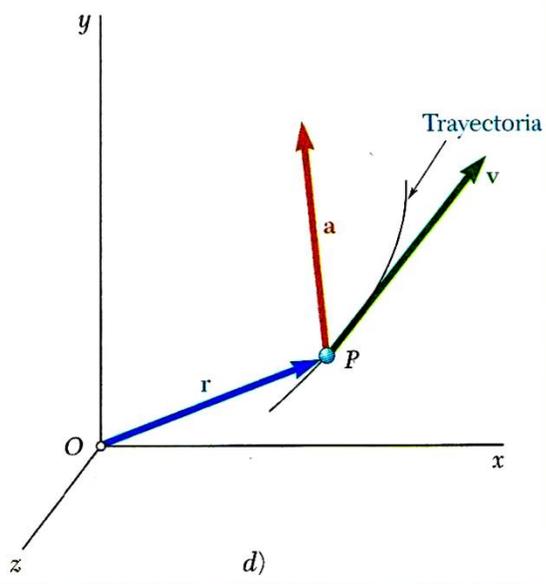
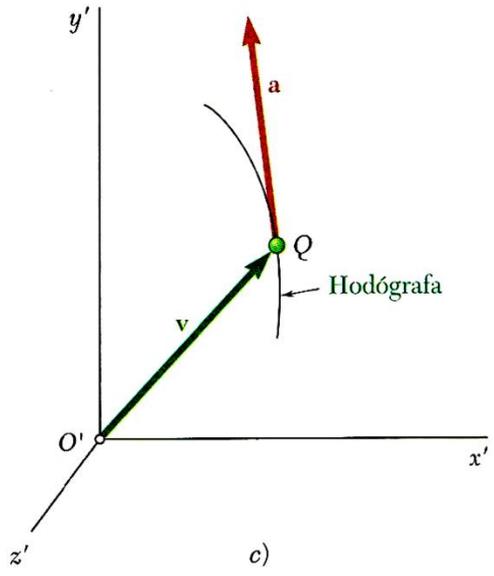
se conoce como la **aceleración relativa**

# MOVIMIENTO CURVILINEO DE PARTICULAS

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$





$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

La curva descrita por la punta de  $\mathbf{v}$  se conoce como la **hodógrafa del movimiento**

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$P_x, P_y, P_z$  son las componentes escalares rectangulares

$$\mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}$$

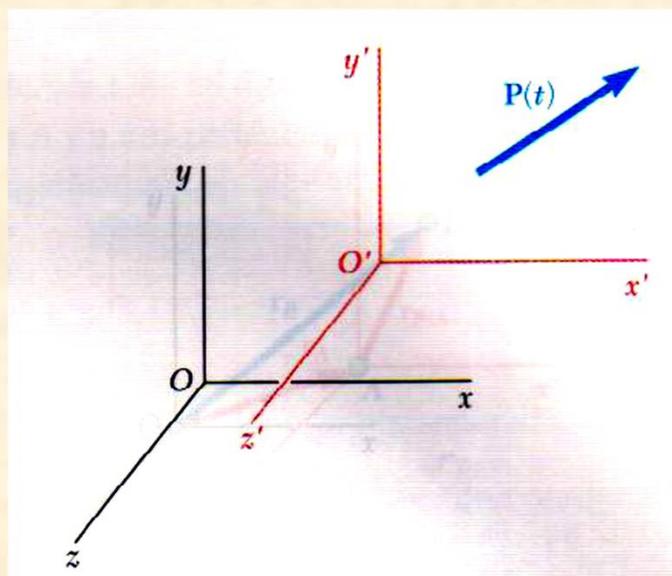
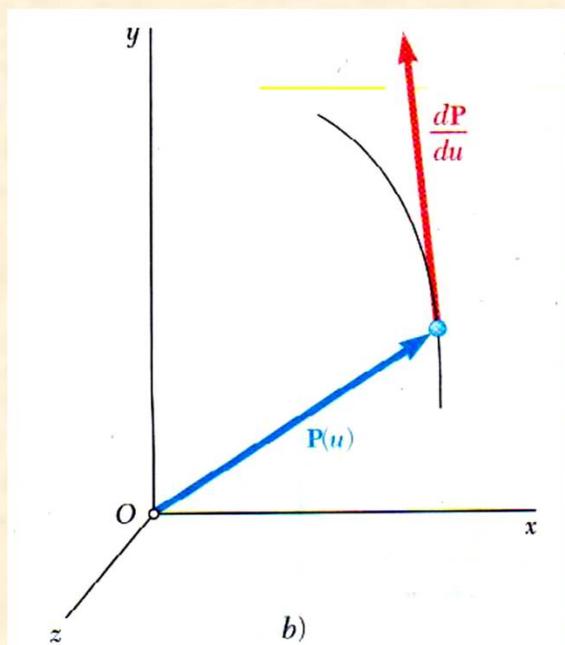
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  versores o vectores unitarios correspondientes a los ejes  $x, y, z$

Descomponiendo  $\mathbf{P}$  en componentes rectangulares

$$\frac{d\mathbf{P}}{du} = \frac{dP_x}{du} \mathbf{i} + \frac{dP_y}{du} \mathbf{j} + \frac{dP_z}{du} \mathbf{k}$$

Diferenciando

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{P}_x \mathbf{i} + \dot{P}_y \mathbf{j} + \dot{P}_z \mathbf{k}$$



# Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración

Vector de posición  $r$  en componentes rectangulares

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

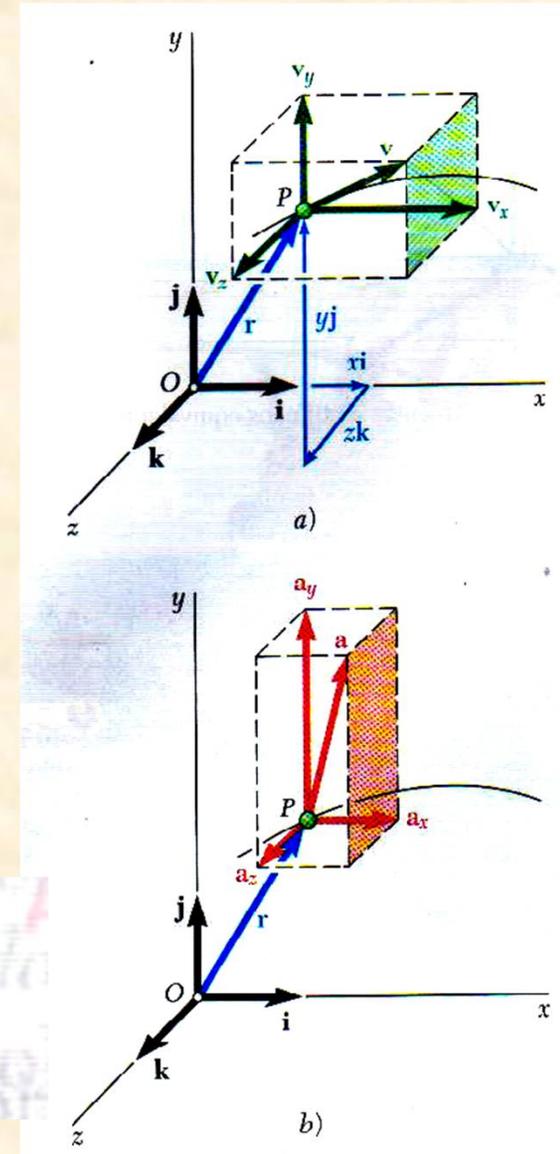
Derivando

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

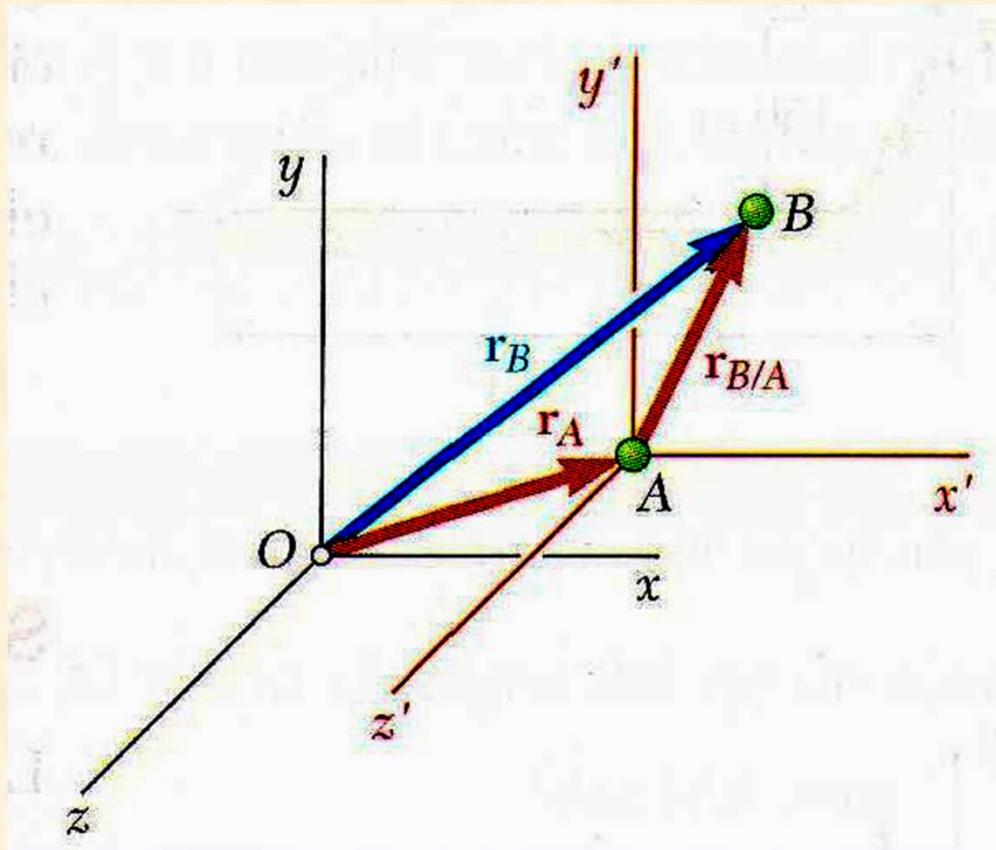
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}$$

$$a_x = \ddot{x} \quad a_y = \ddot{y} \quad a_z = \ddot{z}$$



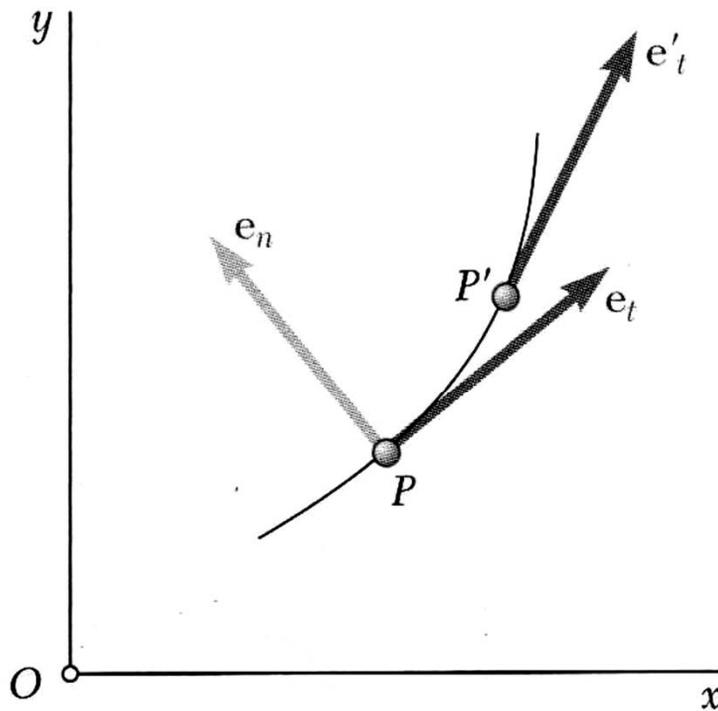
## Movimiento relativo a un sistema de referencia en traslación



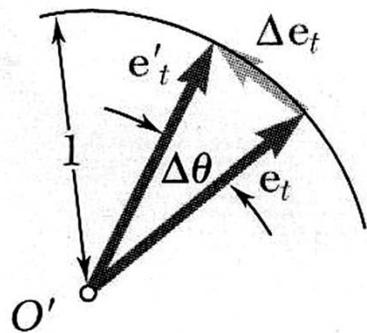
$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$



a)



## Componentes tangencial y normal

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 1$$

$$\mathbf{e}_n = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{e}_t}{\Delta\theta}$$

$$\mathbf{e}_n = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta}$$

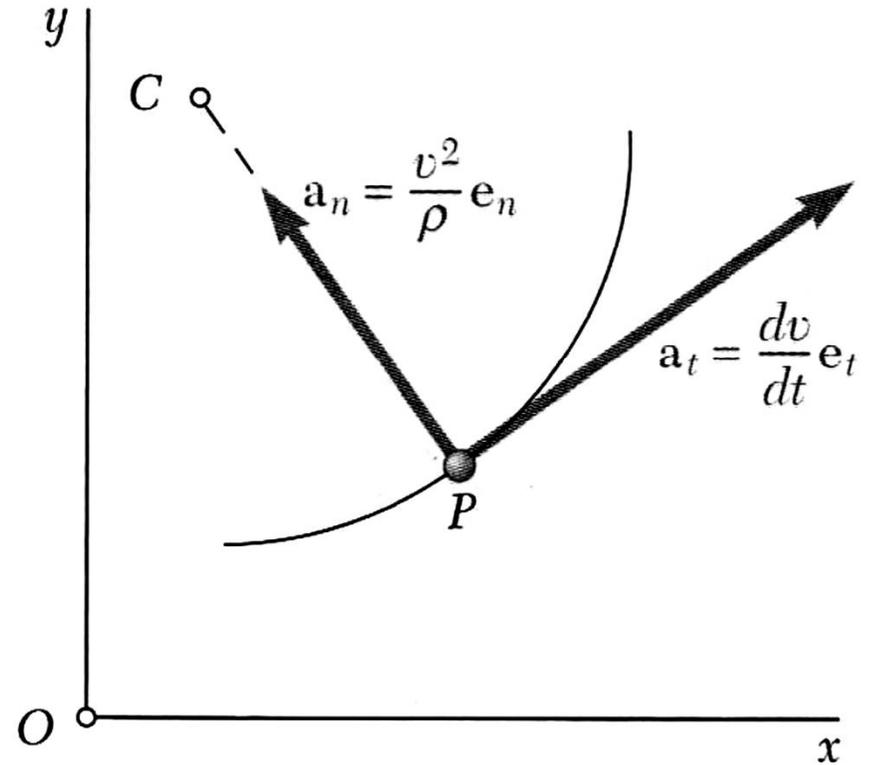
$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + v \frac{d\mathbf{e}_t}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{v}{\rho} \mathbf{e}_n$$

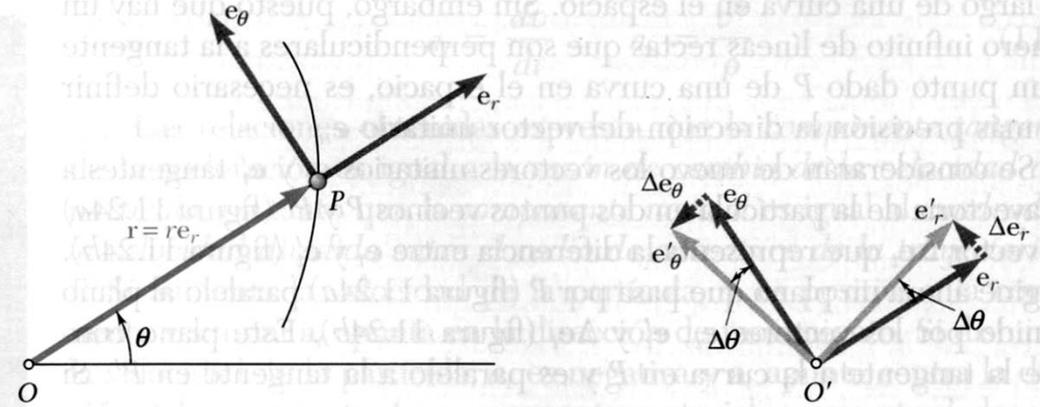
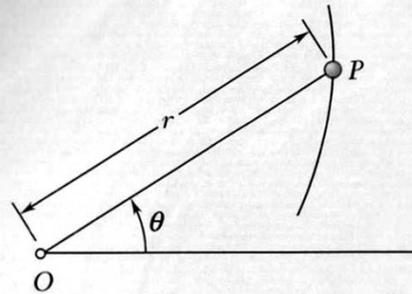
$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n$$



las componentes escalares de la aceleración son

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

# Componentes radial y transversal



$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\mathbf{e}_r \frac{d\theta}{dt}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

$$v_r = \dot{r} \quad v_\theta = r\dot{\theta}$$

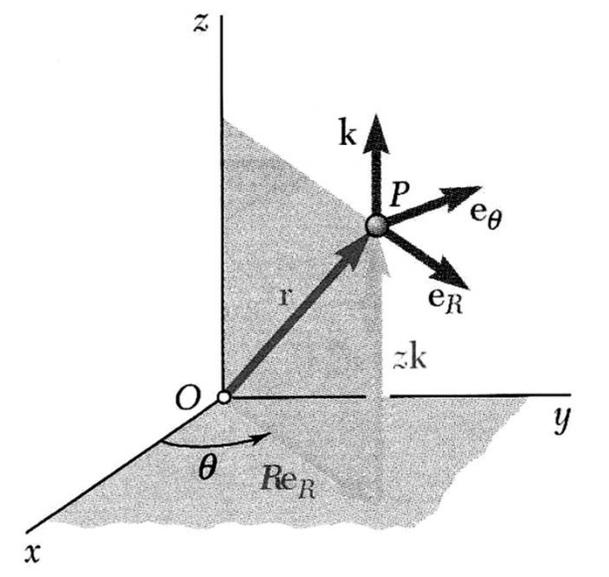
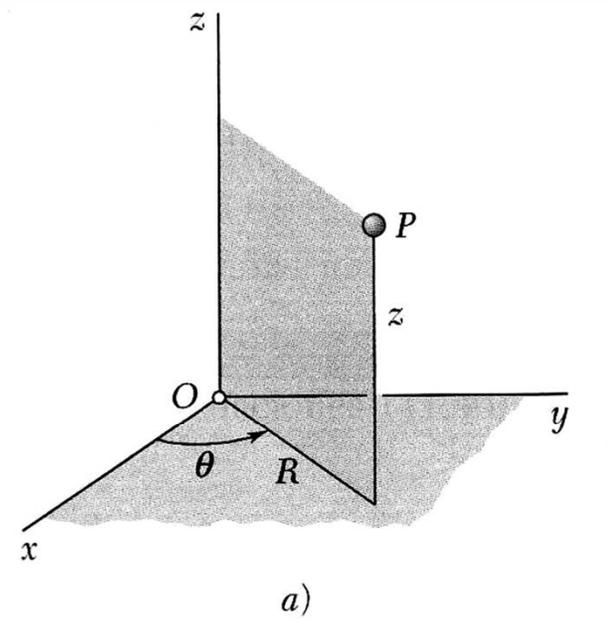
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$



# Coordenadas Cilíndricas

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$$

# BIBLIOGRAFIA A CONSULTAR

- Mecánica Vectorial para Ingenieros Beer Johnston
- Dinámica Hibbeler