

**MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS**



**FACULTAD
DE INGENIERÍA**

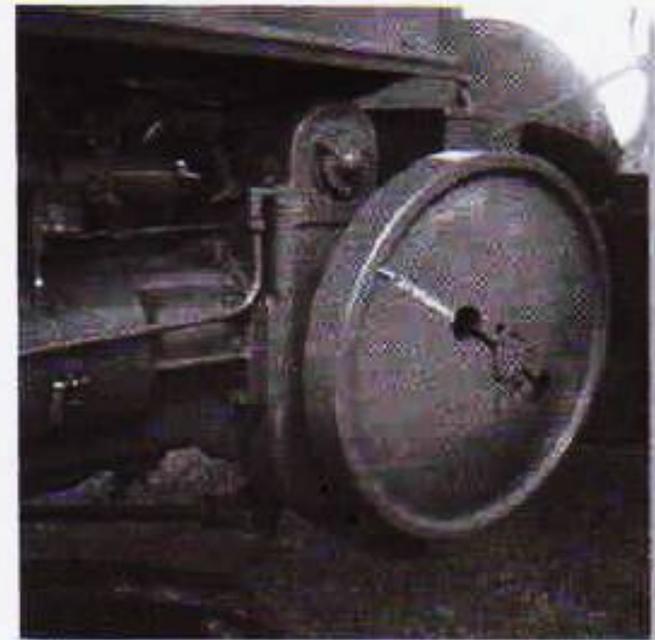
GEOMETRÍA DE MASAS

Ing. Carlos Barrera - 2023

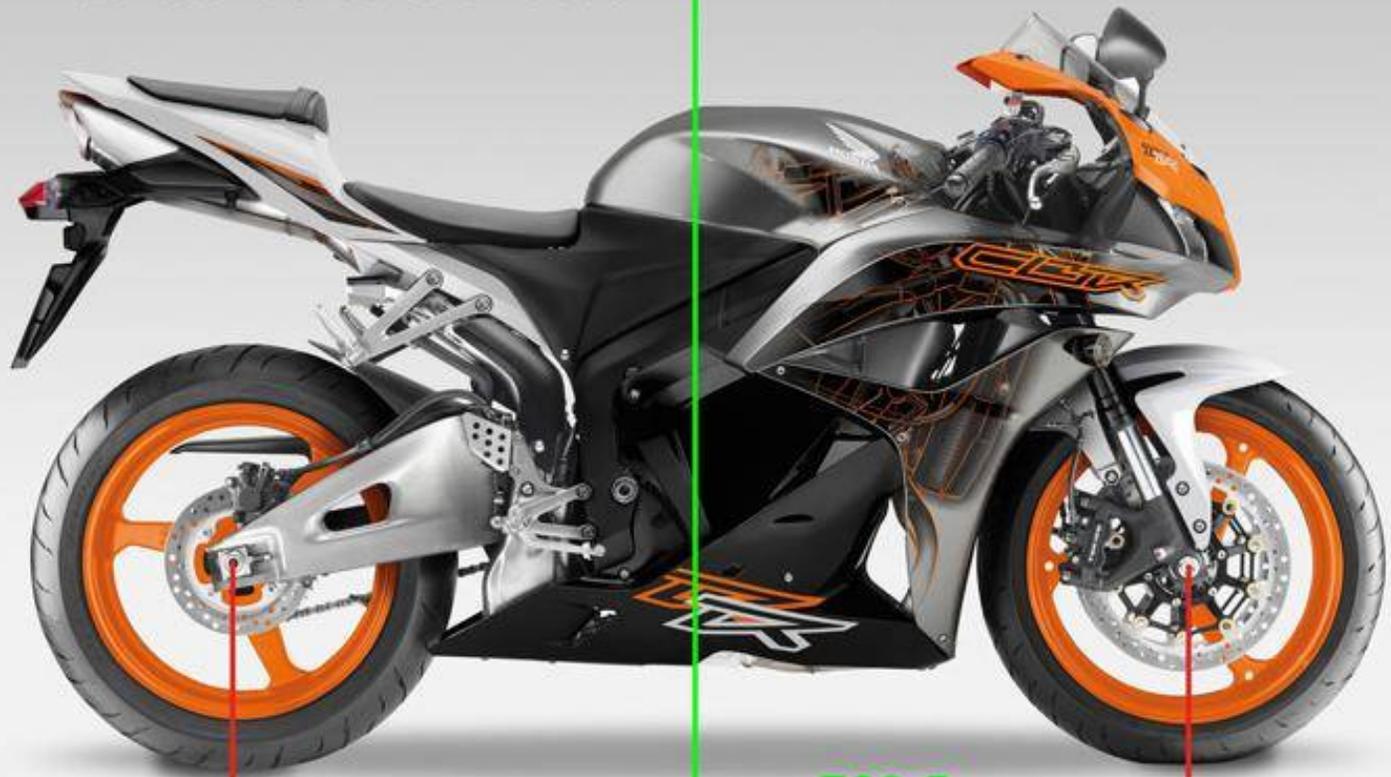
OBJETIVOS

1. Determinar el Centro de Masa.
2. Analizar el Momento de Inercia de un cuerpo.
3. Definir Radio de Giro y Factor de Inercia.

El volante del motor de este tractor tiene un gran momento de inercia con respecto a su eje de rotación. Una vez en movimiento, será difícil detenerlo, y esto a su vez impedirá que el motor se atasque permitiéndole mantener una potencia constante.



Posición horizontal del Centro de Gravedad



1.375 mm 709,5 mm

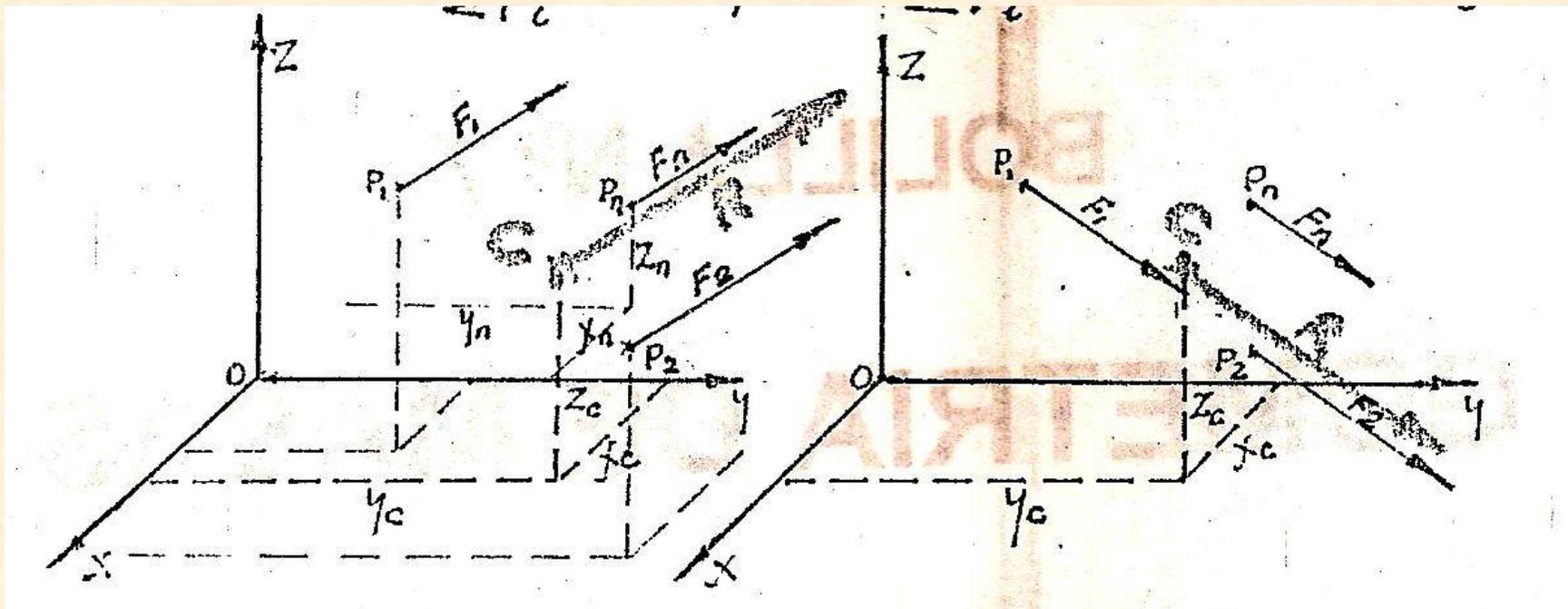
89 kg (48,4%) ↓

95 kg (51,6%) ↓

Centro de gravedad

Las coordenadas del centroide son:

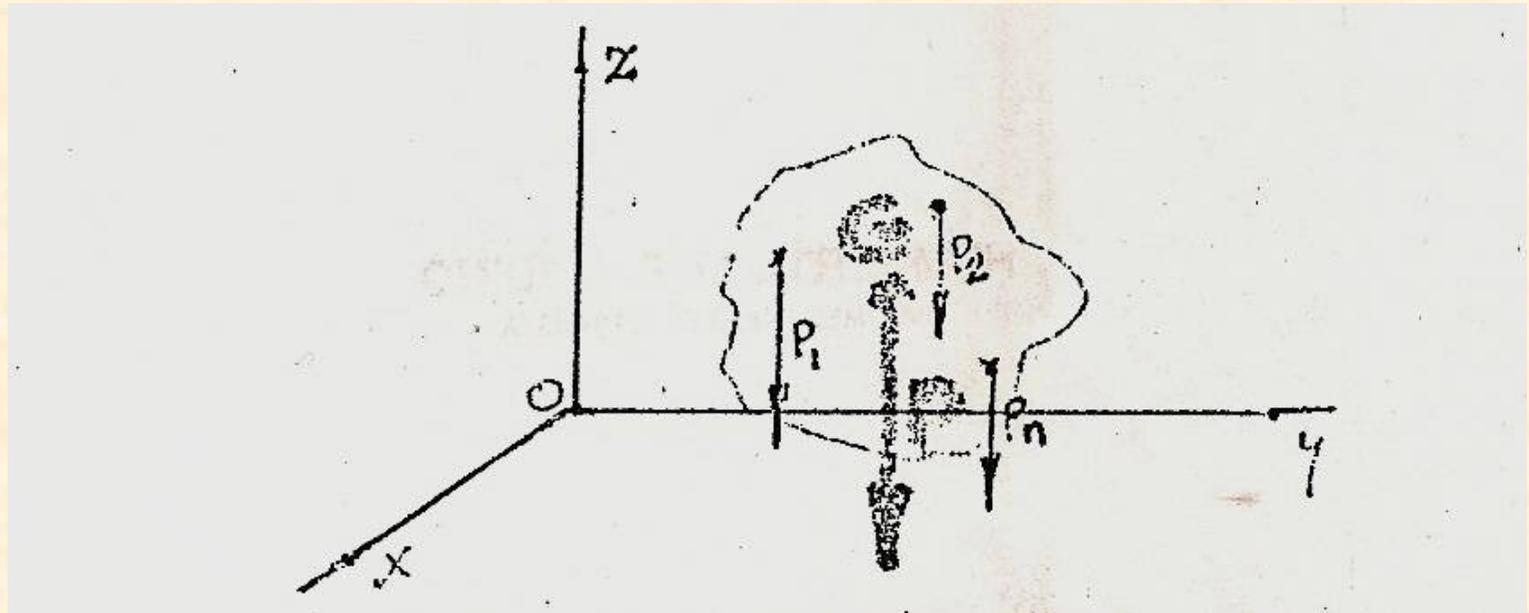
$$x_c = \frac{\sum F_i * x_i}{\sum F_i} \quad y_c = \frac{\sum F_i * y_i}{\sum F_i} \quad z_c = \frac{\sum F_i * z_i}{\sum F_i}$$



Si las fuerzas consideradas son el peso de cada partícula de un sistema material, las expresiones anteriores quedan:

$$x_G = \frac{\sum_1^n P_i x_i}{\sum P_i} \quad y_G = \frac{\sum_1^n P_i y_i}{\sum P_i} \quad z_G = \frac{\sum_1^n P_i z_i}{\sum P_i}$$

x_G y_G z_G Son las coordenadas del Centro de gravedad



Teniendo en cuenta que $P = m \cdot g$ se tiene

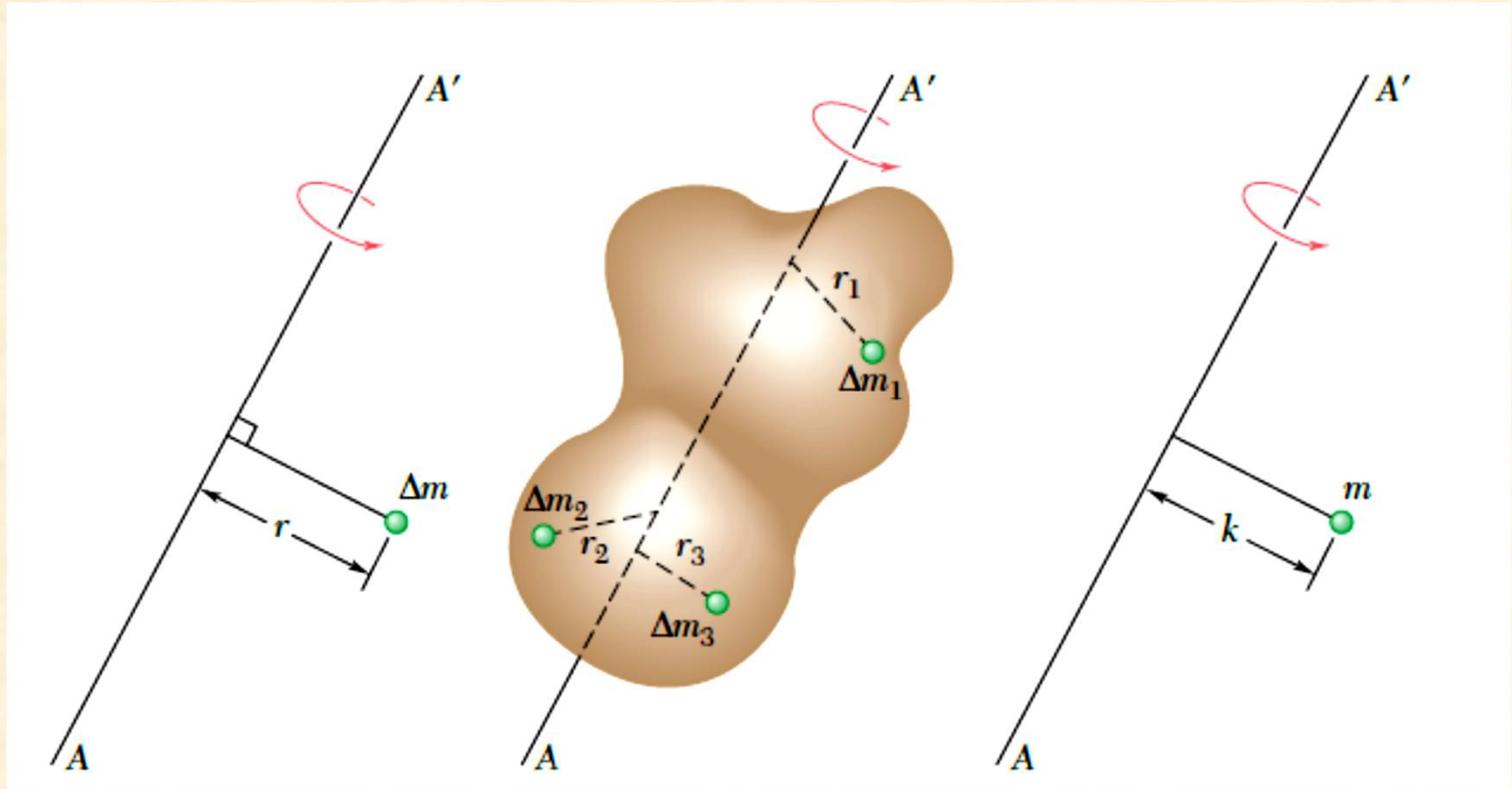
$$x_G = \frac{\sum_1^n m_i g x_i}{\sum m_i g} \quad y_G = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum m_i} \quad z_G = \frac{\sum_1^n m_i z_i}{\sum m_i}$$

Se obtienen las coordenadas del Centro de Masa que en este caso coincide con el CG.

Teniendo en cuenta que $m = V \cdot \text{densidad}$ se puede establecer:

$$x_G = \frac{\sum_1^n V_i x_i}{\sum V_i} \quad y_G = \frac{\sum_1^n V_i y_i}{\sum V_i} \quad z_G = \frac{\sum_1^n V_i z_i}{\sum V_i}$$

MOMENTO DE INERCIA DE MASAS



$$I = \int r^2 * dm$$

Momentos de segundo Orden

Momentos Planares

$$J_{xOy} = m z^2$$

$$J_{xOz} = m y^2$$

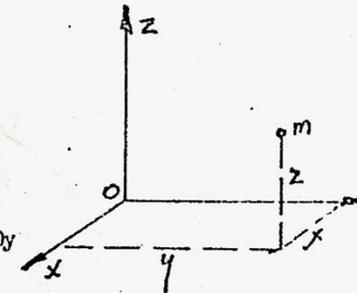
$$J_{yOz} = m x^2$$

Momentos Axiales

$$J_x = m (y^2 + z^2) = J_{xOz} + J_{xOy}$$

$$J_y = m (x^2 + z^2) = J_{yOz} + J_{yOx}$$

$$J_z = m (x^2 + y^2) = J_{zOx} + J_{zOy}$$



Momento Polar (respecto al origen) $J_o = m (x^2 + y^2 + z^2) = J_{xOy} + J_{xOz} + J_{yOz}$

También se verifican las siguientes igualdades:

$$J_o = J_x + J_{yOz} = J_y + J_{xOz} = J_z + J_{xOy} \quad \gamma \quad J_o = \frac{J_x + J_y + J_z}{2}$$

Si se trata de un sistema de puntos materiales habría que hacer la sumatoria de los productos de las masas por los cuadrados de las distancias

$$J_x = \sum_i^n m_i d_{x_i}^2 = \sum_i^n m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

y si el sistema de puntos materiales forma un sólido continuo, llamando ρ a la densidad específica de la masa de cada punto

$$J_x = \iiint \rho (y^2 + z^2) dx dy dz$$

Si el cuerpo es de densidad homogénea ρ puede sacarse fuera del signo integral.-

Todos los momentos de inercia son expresiones esencialmente positivas.-

Producto de inercia

Es el producto de la masa de un punto material por la distancia a dos planos.

$$J_{xy} = m * x * y$$

Si es un sistema de puntos materiales

$$J_{xy} = \sum_1^n m_i * x_i * y_i$$

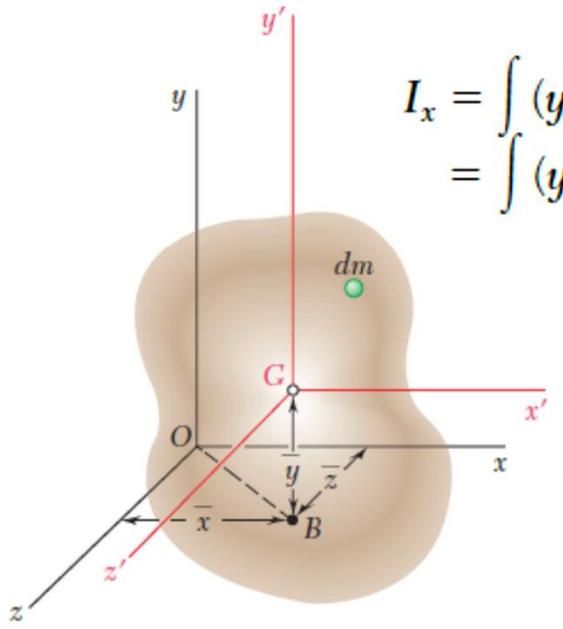
Y si se trata de un sólido continuo

$$J_{xy} = \int x * y * dm$$

Los productos de inercia pueden ser positivos, negativos o nulos

Teorema de Steiner o de ejes paralelos

$$x = x' + \bar{x} \quad y = y' + \bar{y} \quad z = z' + \bar{z}$$

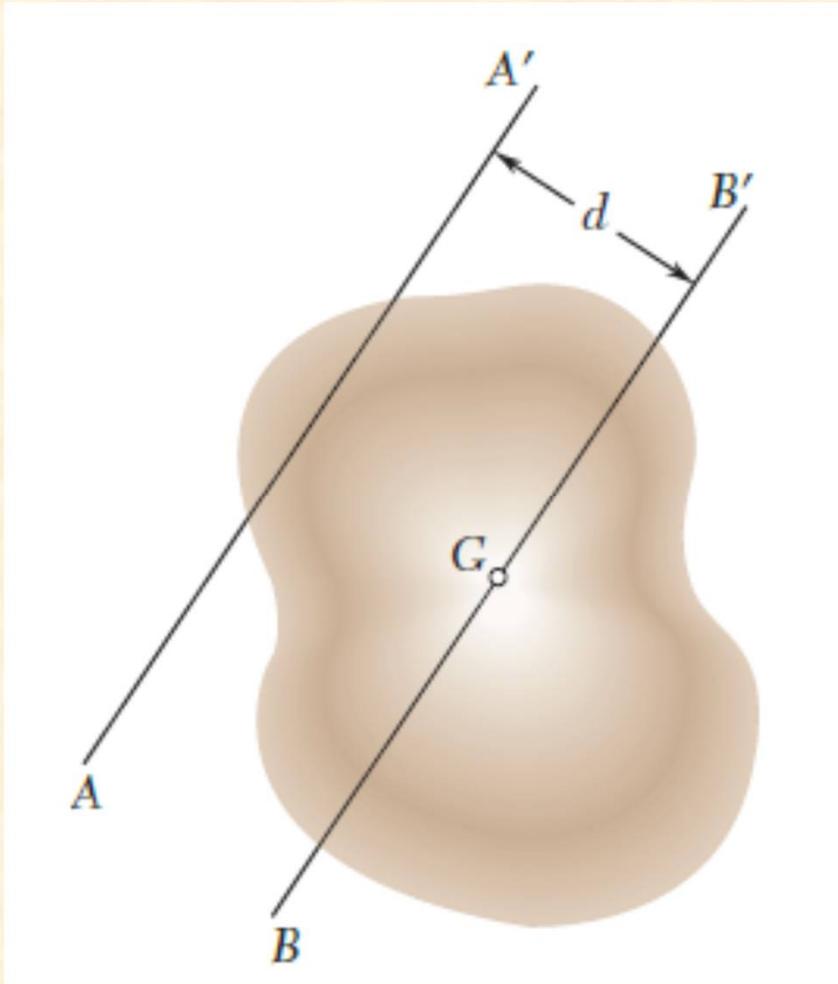


$$\begin{aligned}
 I_x &= \int (y^2 + z^2) dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2] dm \\
 &= \int (y'^2 + z'^2) dm + 2\bar{y} \int y' dm + 2\bar{z} \int z' dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \int dm
 \end{aligned}$$

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)$$

De igual manera

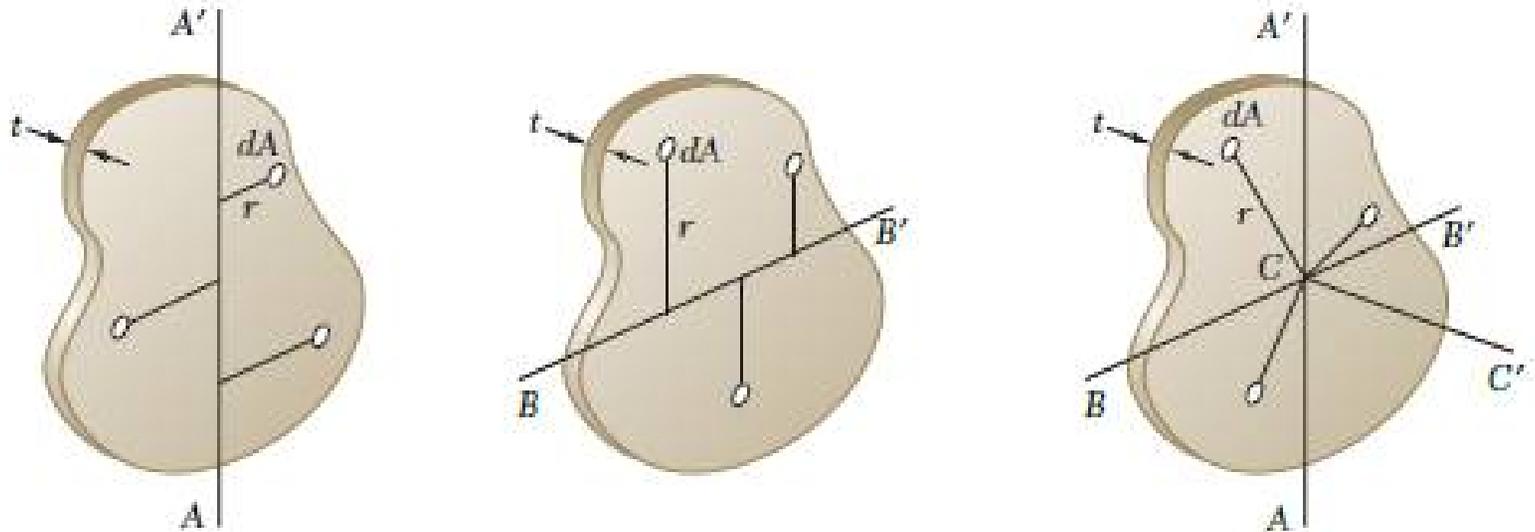
$$I_y = \bar{I}_{y'} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \quad I_z = \bar{I}_{z'} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$



Se observa que la suma
representa el cuadrado de la
distancia OB entre los ejes y e y'

$$I = \bar{I} + md^2$$

Momentos de Inercia de Placas Delgadas o Chapas



$$I_{AA', \text{ masa}} = \int r^2 dm$$

Puesto que $dm = \rho t dA$, se escribe

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t \int r^2 dA$$

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t I_{AA', \text{ área}}$$

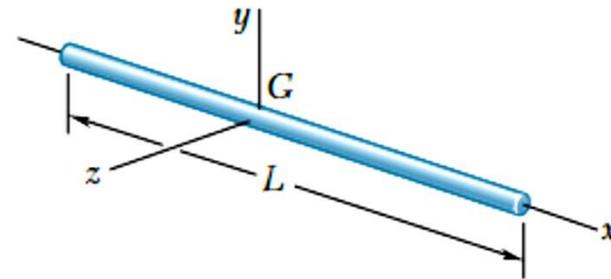
$$I_{BB', \text{ masa}} = \rho t I_{BB', \text{ área}}$$

$$I_{CC', \text{ masa}} = \rho t J_C, \text{ área}$$

Momentos de Inercia de cuerpos compuestos

Barra delgada

$$I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$$

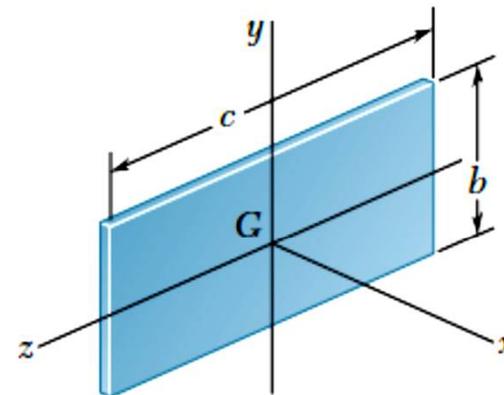


Placa rectangular delgada

$$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$$

$$I_y = \frac{1}{12}mc^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}mb^2$$

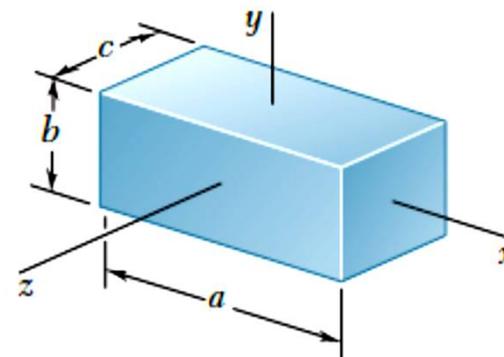


Prisma rectangular

$$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$$

$$I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$$

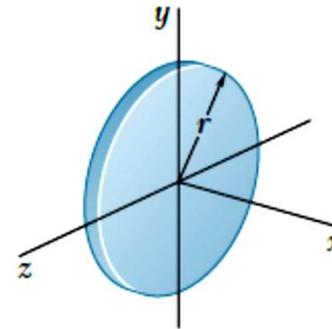
$$I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$



Disco delgado

$$I_x = \frac{1}{2}mr^2$$

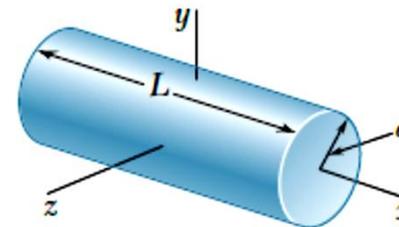
$$I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$$



Cilindro circular

$$I_x = \frac{1}{2}ma^2$$

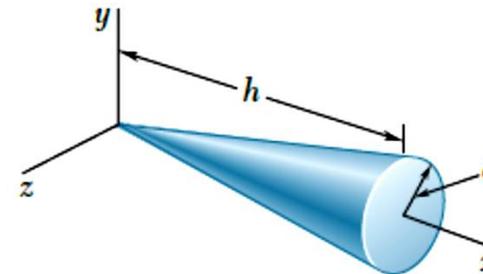
$$I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$$



Cono circular

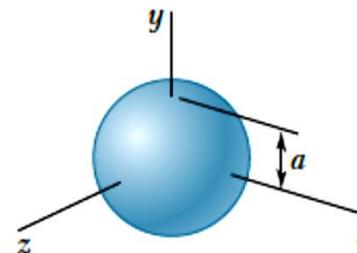
$$I_x = \frac{3}{10}ma^2$$

$$I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$$



Esfera

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$$



Radio de giro o radio de inercia

$$I = k^2 m \quad \text{o} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

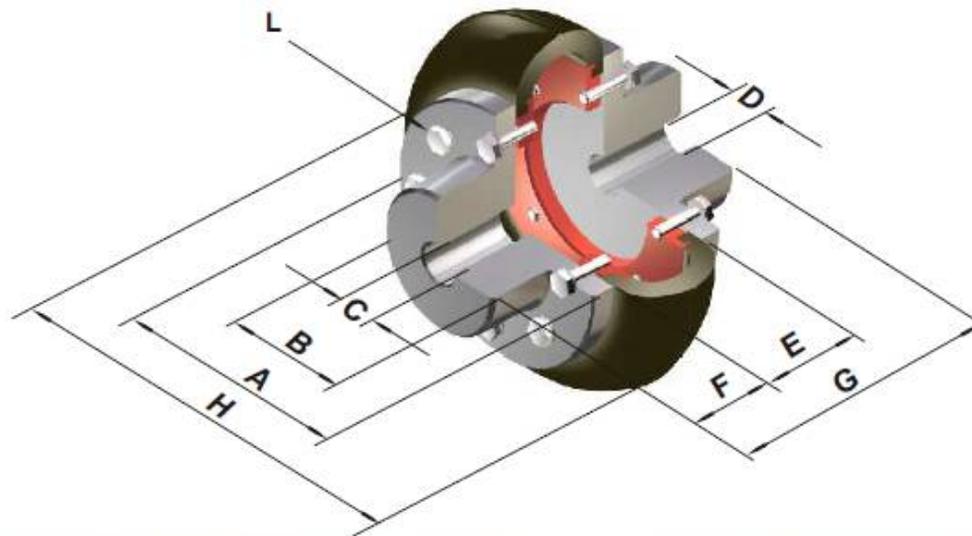
El radio de giro representa la distancia a la cual la masa completa del cuerpo debe concentrarse si el momento de inercia con respecto al eje va a permanecer sin cambio. La masa m reaccionará de igual manera a una rotación o giro alrededor del eje ya que conserve la forma original o si se concentra.

Factor de inercia

En la práctica cuando se acoplan elementos rotantes, se suele utilizar en lugar de los momentos de inercia con respecto al eje, el denominado “Factor de Inercia” “Momento de Impulsión” o “GD²” Producto del peso del cuerpo rotante por el cuadrado de su diámetro de giro

Este valor se relaciona con el momento de inercia de la siguiente manera

$$GD^2 = m g (2i)^2 = 4 m g i^2 = 4 g J = 4 \cdot 9,8 J = 39,2 J$$



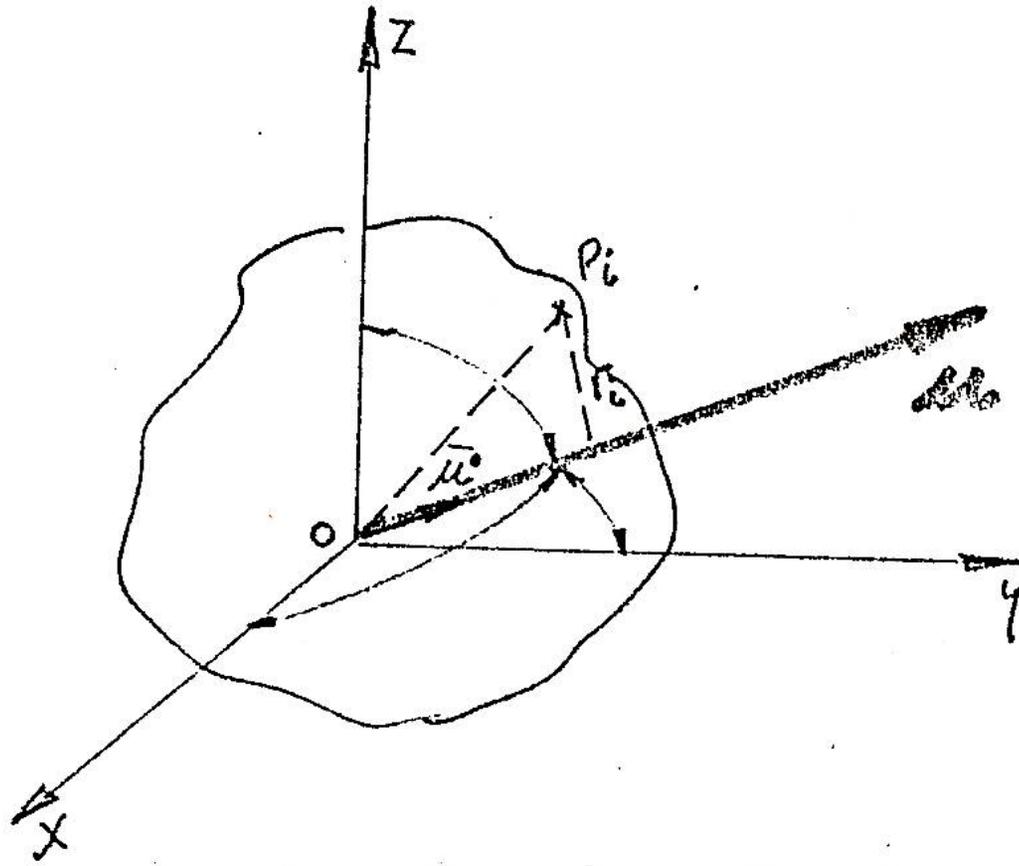
- A - Ø Brida Cubo
- B - Ø Cuello Cubo
- C - Ø Máx. aleasaje
- D - Ø Agujero piloto
- E - Ancho centro
- F - Ancho cubo
- G - Long. total
- H - Ø Centro
- L - Tipo tornillo

Tabla III

| ACOPLE CON CUBO NORMAL | | | | | | | | | | | | | BULO | |
|---------------------------|---------------------|--------------------------|----------------------|----------------|----|----|----------|----------|----|----|-----|-----|------|-----|
| MODELO | Torq. Nom. Nm | Angulo Torsión (°) | (1) Peso (Kg.) | Gd2 (Kg m2) | A | B | C Máx | D Min | E | F | G | H | Nr. | L- |
| A-20 | 38 | 2° | 1.05 | 0.0017 | 74 | 36 | 20 | 10 | 30 | 25 | 80 | 95 | 12 | 1/4 |
| A-25 | 56 | 5° | 1.09 | 0.0018 | 74 | 36 | 23 | 10 | 30 | 25 | 80 | 95 | 12 | 1/4 |
| A-30 | 82 | 2° | 2.40 | 0.0094 | 96 | 49 | 30 | 10 | 40 | 35 | 110 | 127 | 16 | 3/4 |

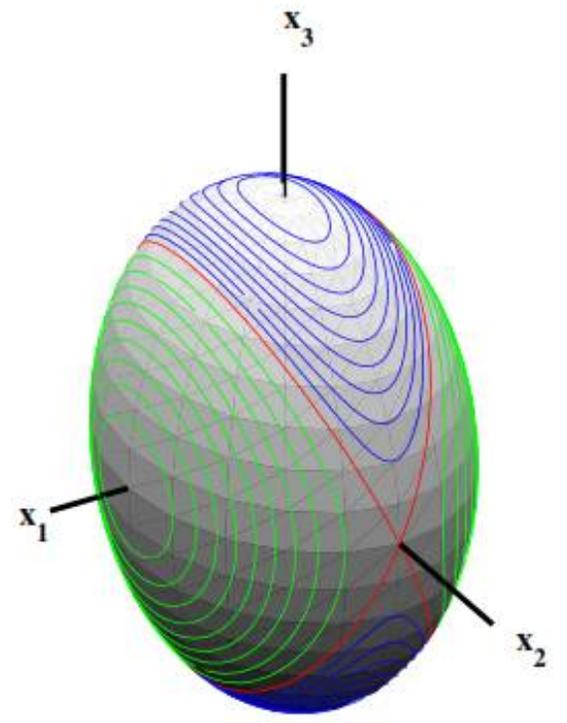
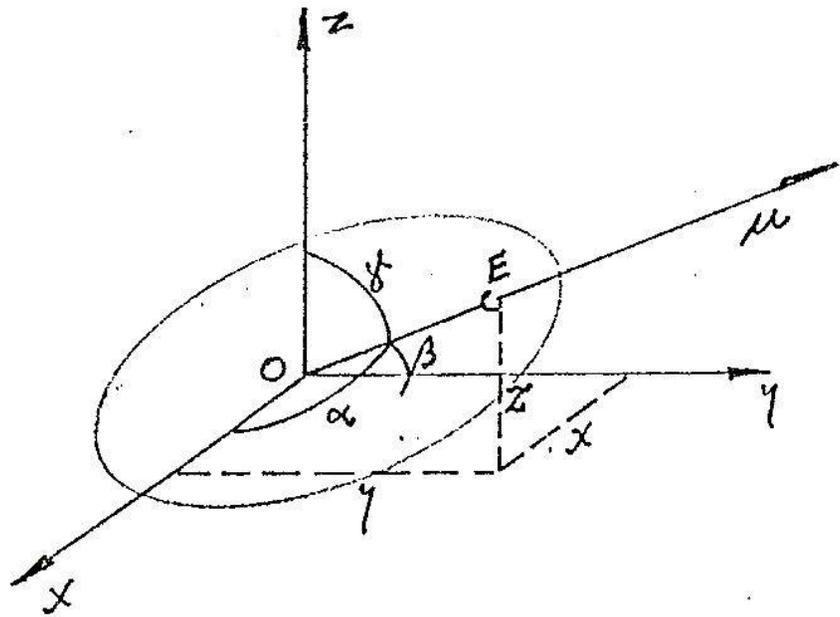
ROTACION DE EJES

$$J_u = \alpha^2 J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z - 2\alpha\beta J_{xy} - 2\alpha\gamma J_{xz} - 2\beta\gamma J_{yz}$$



Elipsoide de Inercia

Si al eje u pasante por "O" se le dan diferentes direcciones y que un punto E se ha marcado sobre cada eje a una distancia OE cuyo módulo vale $\sqrt{J_U}$ el lugar geométrico de los puntos E forma una superficie



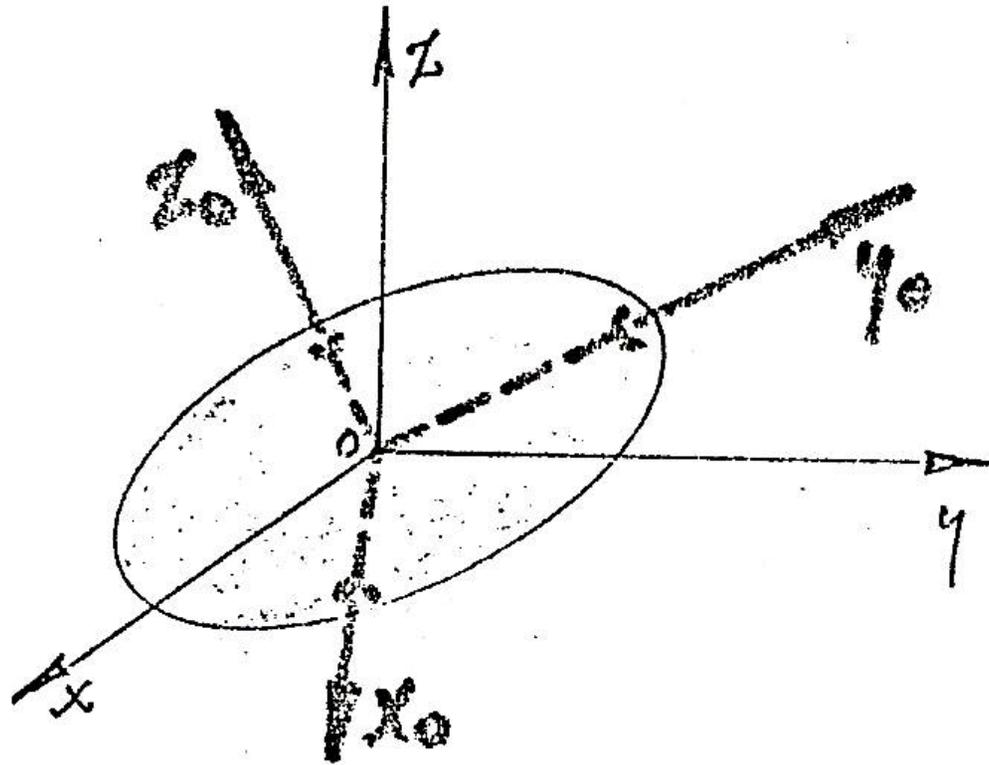
La ecuación que se obtiene es la ecuación de una superficie cuadrática. La obtenida es la ecuación de un elipsoide , que se denomina **ELIPSOIDE DE INERCIA**.

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2 J_{xy} x y - 2 J_{xz} x z - 2 J_{yz} y z = 1$$

Este elipsoide define el momento de inercia del cuerpo con respecto a cualquier eje que pasa por O

Si se rotan los ejes de tal manera que sean los ejes principales. La ecuación del elipsoide con respecto a estos ejes es:

$$J_{x_0} x^2 + J_{y_0} y^2 + J_{z_0} z^2 = 1$$



El elipsoide tiene 3 planos ortogonales de simetría que reciben el nombre de **PLANOS PRINCIPALES DE INERCIA**, la intersección de dichos planos dan los 3 **EJES PRINCIPALES DE INERCIA**.

Si el elipsoide está referido al baricentro se denomina **ELIPSOIDE CENTRAL DE INERCIA**

•Del mismo modo que un vector puede representarse gráficamente en un punto por medio de un segmento lineal con una dirección determinada, un tensor de segundo orden puede representarse en un punto a través de una superficie de segundo orden, esta es un elipsoide.

•Considerando el elipsoide de inercia en un punto, cuanto mayor sea su semidiámetro en una dirección dada, menor será el correspondiente momento de inercia en esa dirección del sistema. El eje mayor del elipsoide corresponde a la dirección de menor momento de inercia, y el eje menor a la dirección de mayor momento de inercia.

•Estas dos son las direcciones principales, y la tercera será la normal a las dos anteriores. Si dos de los momentos de inercia principales son iguales, el elipsoide será de revolución en torno al eje singular, y si los tres son iguales, el elipsoide adoptará una forma esférica.

BIBLIOGRAFIA

- Mecánica Vectorial para Ingenieros Beer Johnston
- Dinámica Boresi- Schmidt