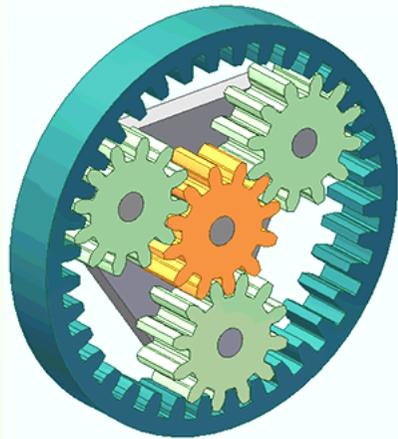


Unidad 07EM: ENGRANAJES

1. Dimensionamiento de Engranajes Rectos

2. Verificación por Lewis



*Para la resolución se utiliza el libro
Diseño en Ingeniería Mecánica –
Shigley ed. 9*

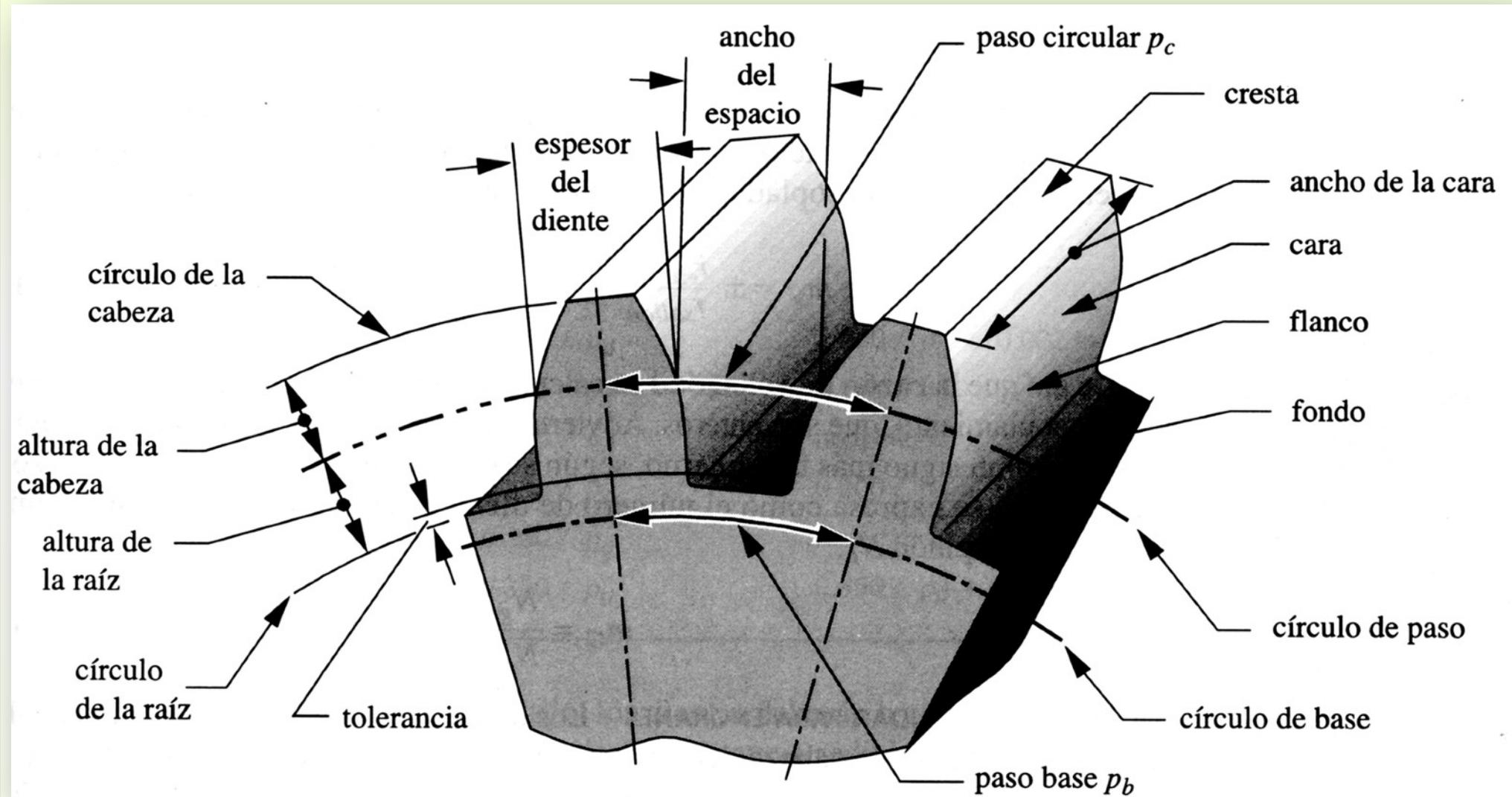
a) Repaso de Teoría

- a) Determinación de variables geométricas
- b) Determinación de los cargas sobre el diente

b) Problema de aplicación

- a) Enunciado
- b) Variables de entrada
- c) Dimensionamiento geométrico
- d) Verificación según LEWIS

Repaso de teoría



Repaso de teoría

Perimetro de circunferencia primitiva

$$\pi \cdot d_p = p_c \cdot Z$$

$$m = \frac{d_p [mm]}{Z} = \frac{p_c}{\pi} \quad (\text{modulo}) \quad [mm]$$

p_c : paso circular [mm]

d_p : diametro primitivo [mm]

Z : cantidad de dientes

m : módulo [mm]

$$dp_1 = Z_1 \cdot m \quad [mm]$$

$$dp_2 = Z_2 \cdot m \quad [mm]$$

dp_1 : diametro primitivo piñon [mm]

dp_2 : diametro primitivo corona [mm]

Z_1 : cantidad de dientes piñon

Z_2 : cantidad de dientes piñon

$$C = \frac{dp_1 + dp_2}{2} \quad (\text{distancia entre centros}) \quad [mm]$$

$$a = m \quad (\text{adendo}) \quad [mm]$$

$$b = 1,25 \cdot m \quad (\text{dedendo}) \quad [mm]$$

Repaso de teoría

ϕ : ángulo de presión



$$db_1 = dp_1 \cdot \cos\phi \quad [mm]$$

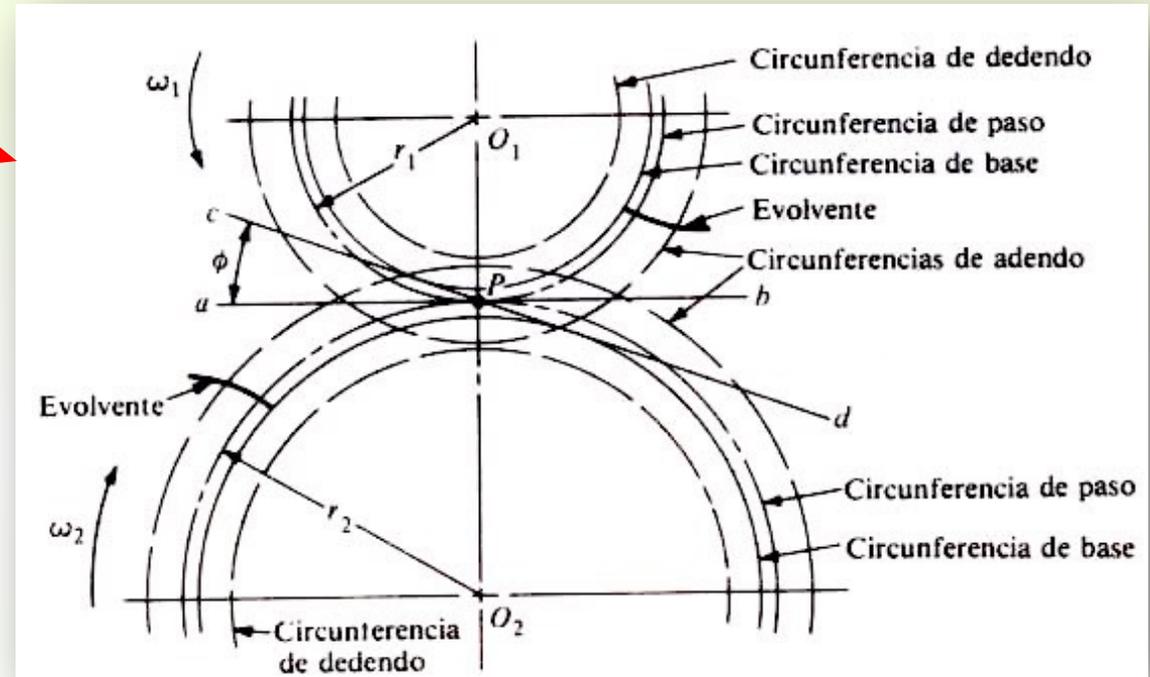
$$db_2 = dp_2 \cdot \cos\phi \quad [mm]$$

$$de_1 = dp_1 + 2 \cdot a \quad [mm]$$

$$de_2 = dp_2 + 2 \cdot a \quad [mm]$$

$$df_1 = dp_1 - 2 \cdot b \quad [mm]$$

$$df_2 = dp_2 - 2 \cdot b \quad [mm]$$



db_1 : diametro base piñon [mm] db_2 : diametro base corona [mm]
 de_1 : diametro exterior piñon [mm] de_2 : diametro exterior corona [mm]
 df_1 : diametro fondo piñon [mm] df_2 : diametro fondo corona [mm]

Repaso de teoría

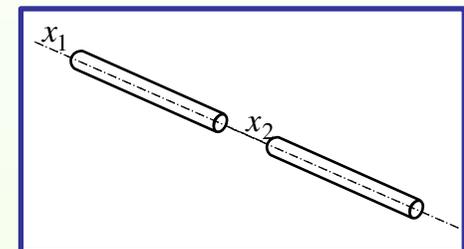
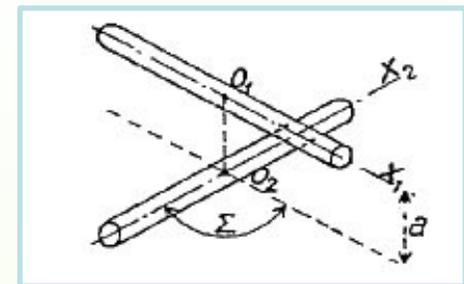
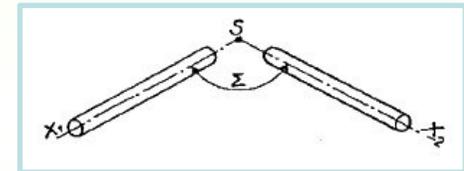
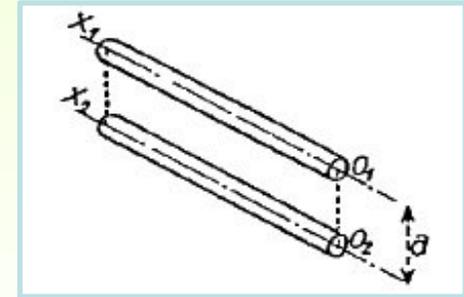
Posición de los ejes:

Ejes paralelos (Engranajes cilíndricos de dentado recto, Engranajes cilíndricos de dentado helicoidal)

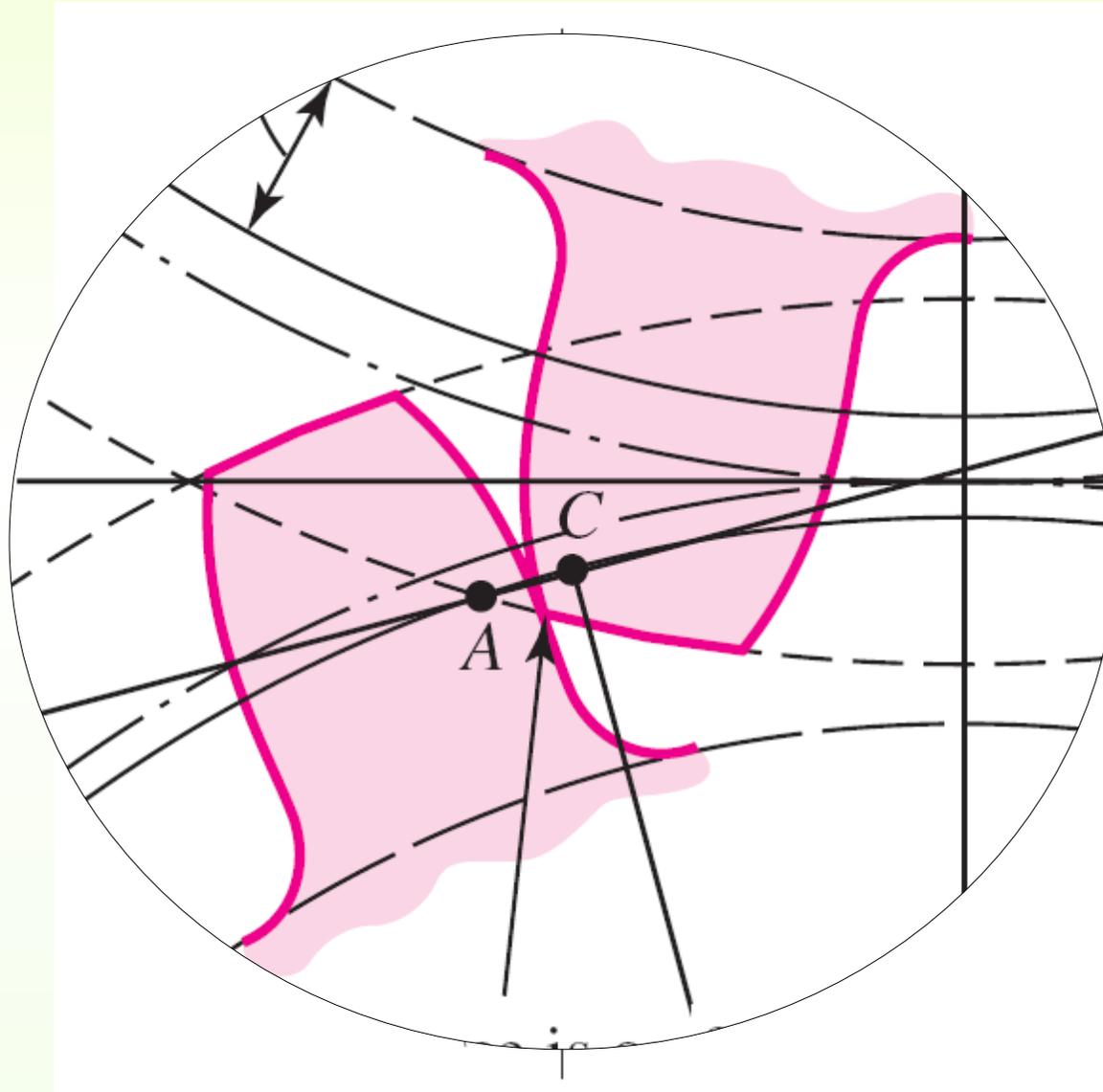
Ejes concurrentes (Engranajes Cónicos de dentado recto, Engranajes Cónicos de dentado helicoidal)

Ejes alabeados (Engranajes Cilíndricos de dentado helicoidal, Engranajes Cónicos de dentado hipoidal, Tornillo sin fin y rueda helicoidal)

Ejes coincidentes: Con 3 engranajes puede transmitirse entre ejes coincidentes, pero estamos en presencia de un reductor.



Repaso de teoría



Repaso de teoría

El concepto de **relación de contacto** o **grado de recubrimiento** es:

$$m_c = \frac{q_t}{p_c} = \frac{L_{ab}}{p_c \cdot \cos(\phi)}$$

Según Diseño en Ingeniería Mecánica (Shigley-Mischke) 8va edición, ec 13-8 y 13-9)

Según “Diseño de maquinas”, Robert L. Norton – Prentice Hall – 1ra edición – ec 11.2, la longitud de la línea de acción es igual a:

$$L_{ab} = \left(\sqrt{(rp_1 + a)^2 - (rp_1 \cdot \cos(\phi))^2} \right) + \left(\sqrt{(rp_2 + a)^2 - (rp_2 \cdot \cos(\phi))^2} \right) - (C \cdot \sin(\phi))$$

Entonces:

$$m_c = \frac{\sqrt{(re_1)^2 - (rb_1)^2} + \sqrt{(re_2)^2 - (rb_2)^2} - (C \cdot \sin(\phi))}{p_c \cdot \cos(\phi)}$$

Ecuación que coincide con la escrita en Manual Universal de la Técnica Mecánica”, Erik Oberg, F.D. Jones, ed. Labor, edición 14 – tomo I – pag. 755

Valor **máximo** de la relación de contacto

$$m_c \leq \frac{(Z_1 + Z_2) \cdot \tan(\phi)}{2 \cdot \pi}$$

Para evitar interferencia

Repaso de teoría

Relación de contacto o grado de recubrimiento para **engranes helicoidales**:

Para engranajes helicoidales la relación de contacto tiene un termino adicional, denominado “**relación de contacto axial**”, y se calcula como:

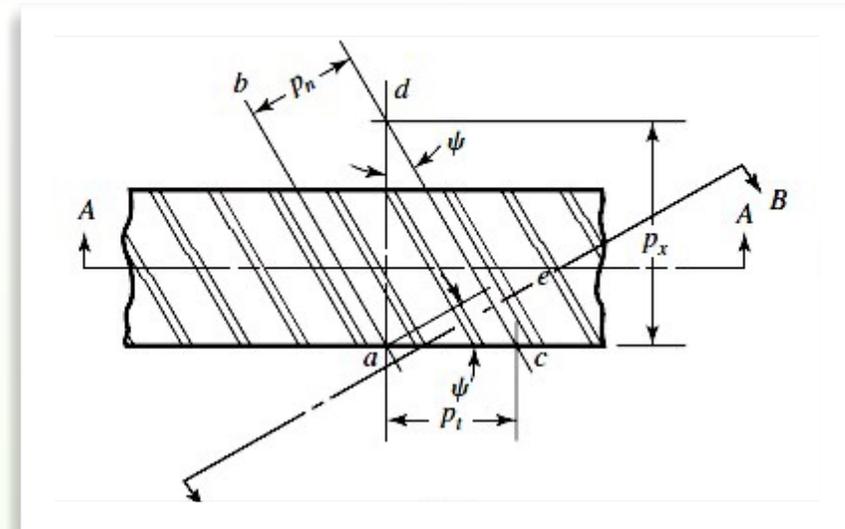
$$m_{hel} = m_c + m_a$$

Siendo:

$$m_c = \frac{\sqrt{(re_1)^2 - (rb_1)^2} + \sqrt{(re_2)^2 - (rb_2)^2} - (C \cdot \sin(\phi))}{p_c \cdot \cos(\phi)}$$

$$m_a = \frac{F \cdot \tan(\psi)}{P_t}$$

Según “Elementos de Maquinas”,
Bernard J. Hamrock – Mc Graw Hill

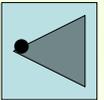


Repaso de teoría

Números mínimos de dientes para evitar interferencia. Los números están basados en un ángulo de presión normal $\phi_n = 20^\circ$ y dientes de altura completa. En el caso de engranes rectos, $\psi = 0$

| NÚMERO DE DIENTES DEL PIÑÓN, N_p | NÚMERO DE DIENTES DEL ENGRANE (O RUEDA), N_G | | | | | | | |
|--|--|----------|----------|----------|----------|----|----------|----------|
| | ÁNGULO DE HÉLICE ψ , grados | | | | | | | |
| | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
| 8 | | | | | | | | 12 |
| 9 | | | | | | | 12 | 34 |
| 10 | | | | | | 12 | 26 | ∞ |
| 11 | | | | | 13 | 23 | 93 | |
| 12 | | | 12 | 16 | 24 | 57 | ∞ | |
| 13 | 16 | 17 | 20 | 27 | 50 | | ∞ | |
| 14 | 26 | 27 | 34 | 53 | 207 | | | |
| 15 | 45 | 49 | 69 | 181 | ∞ | | | |
| 16 | 101 | 121 | 287 | ∞ | | | | |
| 17 | ∞ | ∞ | ∞ | | | | | |

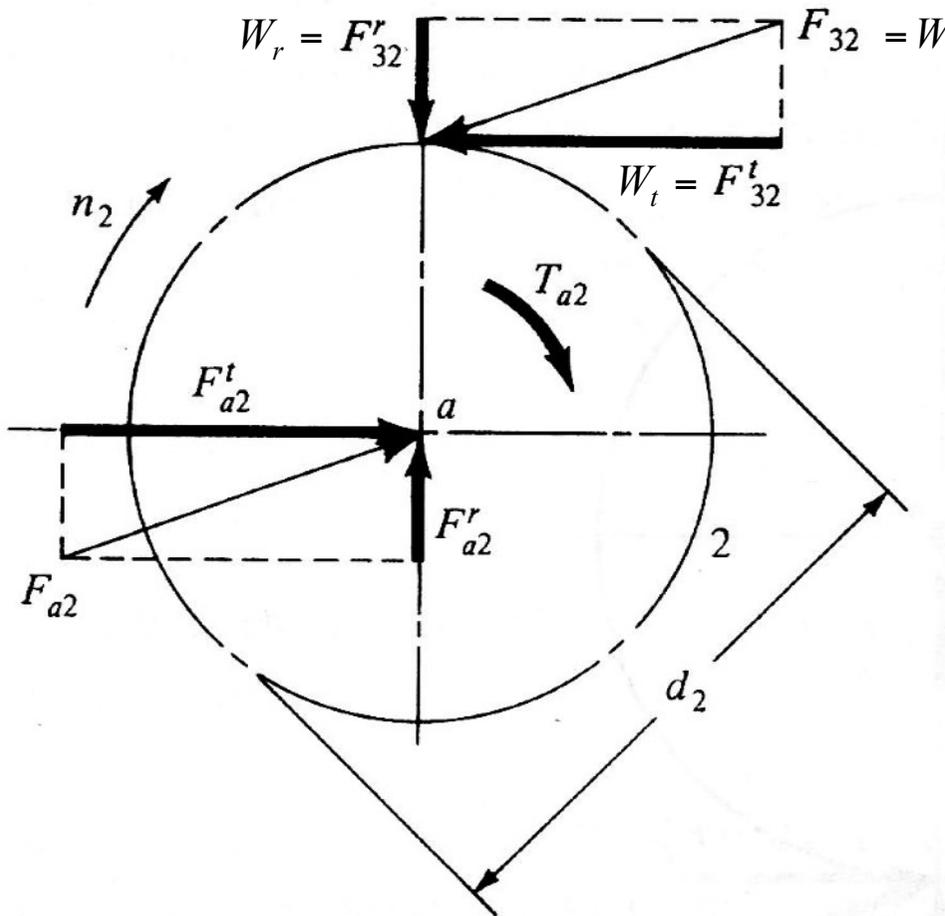
Fuente: R. Lipp, "Avoiding Tooth Interference in Gears", *Machine Design*, vol. 54, núm. 1, 1982, p. 122.



Repaso de teoría

Para engranes cilíndricos de dentado RECTO:

A partir de la potencia a transmitir, la velocidad de rotación, y el diámetro primitivo de la rueda menor, se deben determinar las **FUERZAS** actuantes sobre los dientes del engrane. La FUERZA resultante W esta compuesta de una fuerza en la dirección tangencial W_t (producida por el propio torque), y una fuerza radial W_r , generada por la propia forma del diente:



Carga Tangencial

$$W_t = F_{32}^t$$

Carga Radial

$$W_r = F_{32}^r$$

Carga Total (en la direccion de la linea de presion)

$$W = F_{32}$$

$$n = n_2$$

$$d = d_2$$

$$T = T_{a2}$$

Entonces, el torque

transmitido es \rightarrow

$$T = W_t \cdot \frac{d}{2}$$

Y la POTENCIA transmitida :

Potencia = Torque · vel angular

$$H = T \cdot \omega = \left(W_t \cdot \frac{d}{2} \right) \cdot (2 \cdot \pi \cdot n)$$

De la ecuación de potencia, se despeja la fuerza tangencial, que es la fuerza que se aplica sobre el diente :

$$W_t = \frac{60 \cdot 1000 \cdot H}{d \cdot \pi \cdot n}$$

← Carga Transmitida

(usada para la verificación mecánica del diente del engrane)

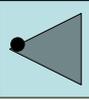
Unidades :

$$[N] = \left[\frac{W}{\text{mm} \cdot \pi \cdot \text{rpm}} \right]$$

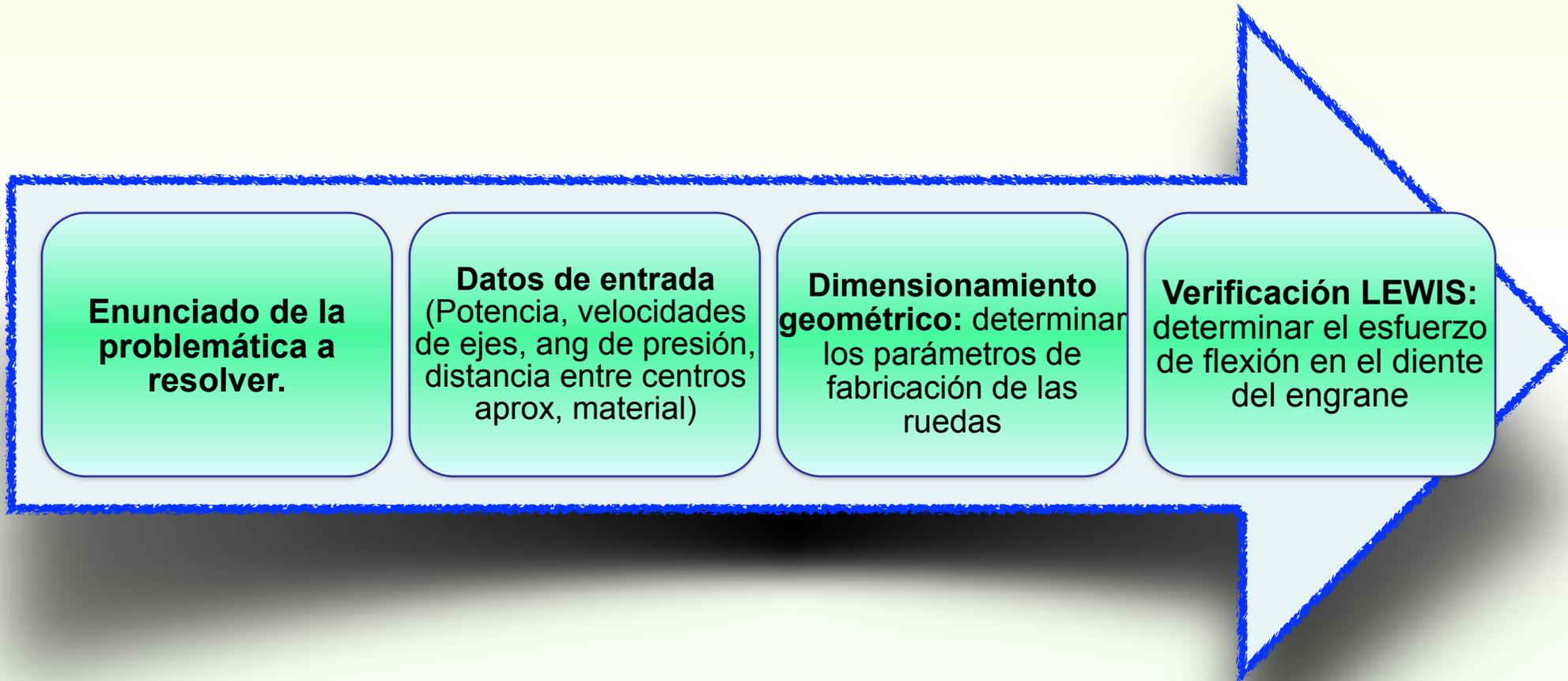
$$W = \frac{W_t}{\cos(\phi)}$$

← Carga total sobre rodamientos

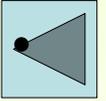
(usada para la verificación de vida de los rodamientos)



Consideraciones preliminares: FLUJO DE TRABAJO



Siguiente



a) Enunciado

Dimensionar de acuerdo al sistema métrico 2 ruedas dentadas cilíndricas de dentado recto para transmitir movimiento de rotación entre 2 árboles. El árbol motor gira a **1450 rpm** y el conducido a **435 rpm**. El ángulo de presión será de **20°**, y la potencia máxima a transmitir es de **13,5 HP**. La distancia entre centros debe determinarse, pero estará comprendida entre 80 mm y 120 mm. Los parámetros a obtener son: módulo, números de dientes, distancia entre centros, diámetros de las 4 circunferencias características de cada engrane, adendo, dedendo, paso circular, grado de recubrimiento y ancho de cara.

Posteriormente, calcular la **tensión máxima** en la raíz del diente (para ambas ruedas), de acuerdo a la teoría de Lewis, considerando que el piñón es de **acero grado 1 con dureza superficial de 240 Brinell y núcleo endurecido completamente**. La corona es de acero, también **endurecida por completo, material grado 1 con una dureza de 200 Brinell**. La fabricación de las ruedas se realizará con creadora. Finalmente verificar el **factor de seguridad**.

Siguiente



b) Variables de entrada

$n_1 = 1450 \text{ rpm}$: velocidad del arbol motor

$n_2 = 430 \text{ rpm}$: velocidad del arbol conducido

$H = 13,5 \text{ HP}$: potencia a transmitir

$\phi = 20^\circ$: angulo de presion

$80 \text{ mm} \leq C \leq 120 \text{ mm}$: distancia entre centros

MATERIALES:

Piñón: acero grado 1 con dureza superficial de 240 Brinell y núcleo endurecido completamente.

Corona: acero grado 1 con dureza superficial de 200 Brinell y núcleo endurecido completamente.

Problema de Aplicación

c) Dimensionamiento geométrico

Como primera medida seleccionamos un modulo de acuerdo a las gráficas de dimensionamiento.

Para ingresar a dicha gráfica necesitamos el dato de la tensión limite del material (aproximada).

Siendo: HB := 240 Dureza Brinell

De acuerdo a la figura 14-2 :

$$S_t := (77.3 \cdot HB) + 12800 \text{ psi}$$

$$S_t = 31 \text{ kpsi}$$

$$S_t = 216 \text{ MPa}$$

Figura 14-2

Número de esfuerzo de flexión permisible de aceros completamente endurecidos. Las ecuaciones en unidades SI son $S_t = 0.533H_B + 88.3$ MPa, grado 1 y $S_t = 0.703H_B + 113$ MPa, grado 2. (Fuente: ANSI/AGMA 2001-D04 y 2101-D04.)

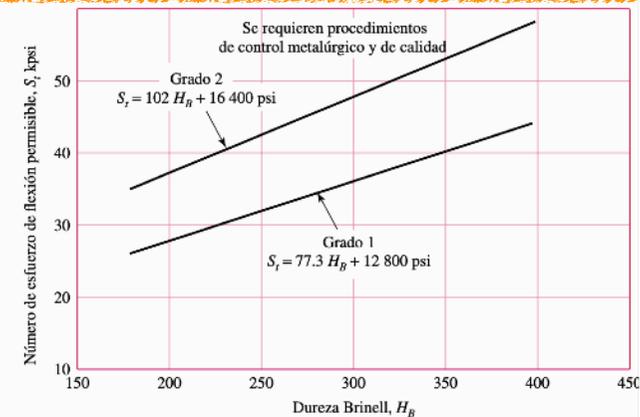
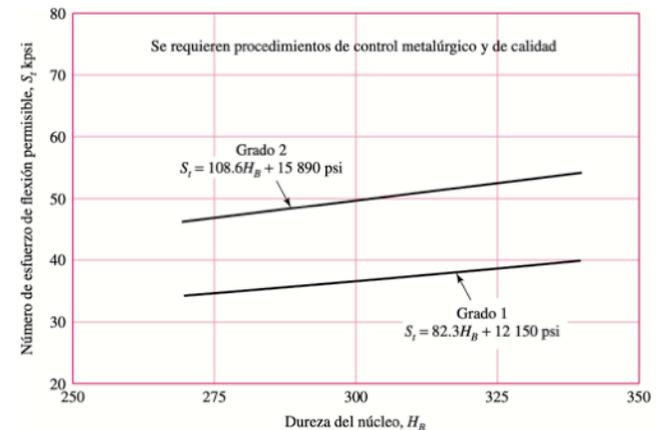


Figura 14-3

Número de esfuerzo de flexión permisible de engranes de acero nitrado endurecido completamente (es decir, AISI 4140, 4340), S_t . Las ecuaciones en unidades SI son $S_t = 0.568 H_B + 83.8$ MPa, grado 1 y $S_t = 0.749 H_B + 110$ MPa, grado 2. (Fuente: ANSI/AGMA 2001-D04 y 2101-D04.)



Siguiente

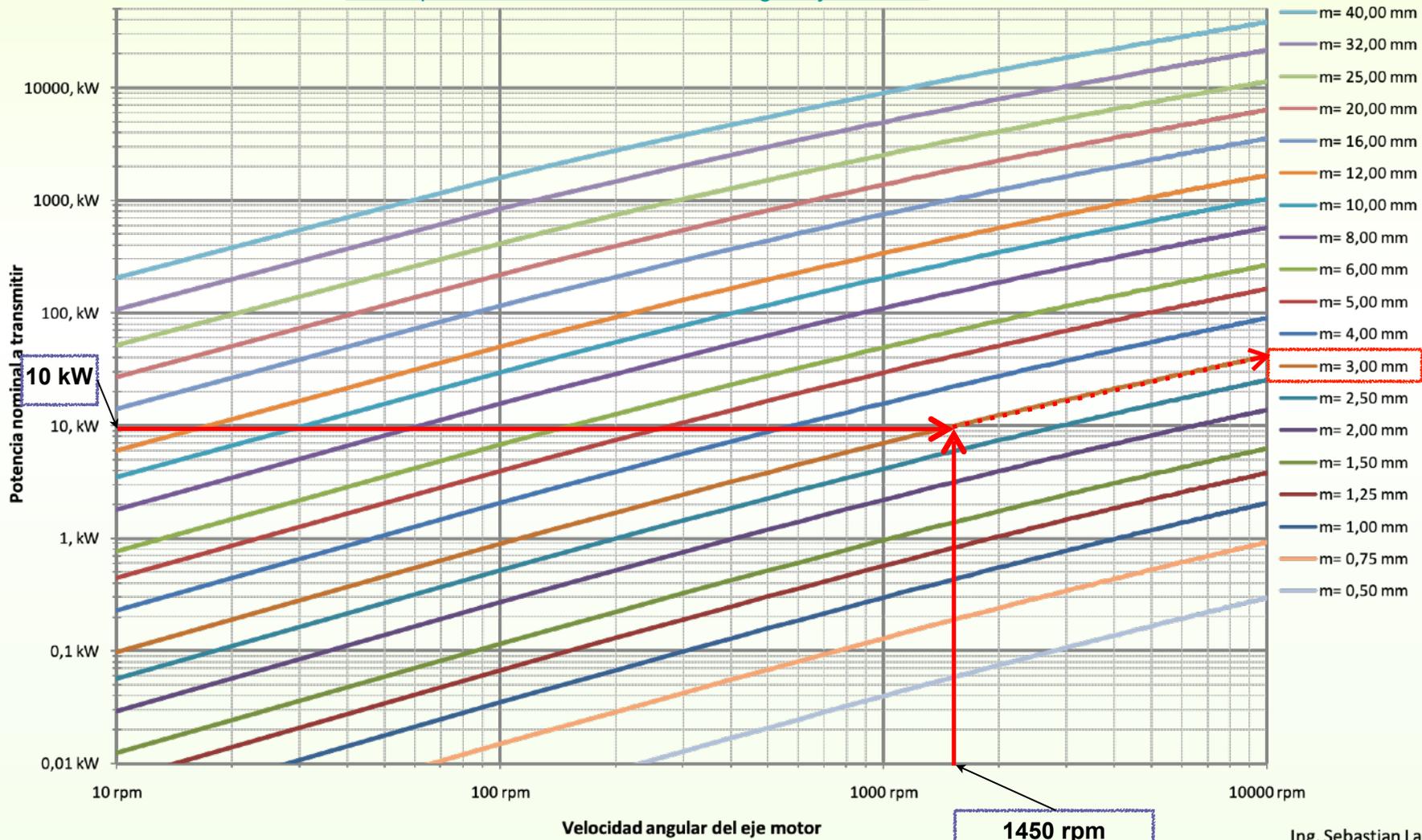
Predimensionamiento del modulo en funcion de potencia y velocidad (calculo basado en



Lewis)

F=7.m, z1=17 dientes, $S_{adm}=200$ Mpa, Engranés fab. con creadora

Tablas para selección del modulo de engranajes Rectos - Ver aula virtual



Siguiente

Ing. Sebastian Lazo

PROBLEMA DE APLICACION

De acuerdo a la gráfica, seleccionamos:



$m_1 := 3\text{mm}$ módulo

$z_1 := 17\text{dientes}$ Numero de dientes piñón (17 es el mínimo para evitar interferencia)



Conociendo la cantidad de dientes del engrane motor, podemos calcular la cantidad de dientes del engrane conducido (se debe redondear el valor):

$$\frac{n_1}{n_2} := \frac{z_2}{z_1} \quad z_2 := \text{round}\left(z_1 \frac{n_1}{n_2}\right) \quad z_2 = 57$$

Conociendo la cantidad de dientes de ambos engranes, podemos calcular los diámetros primitivos:

Diámetro primitivo engrane motor: $dp_1 := m_1 \cdot z_1$ $dp_1 = 51 \cdot \text{mm}$

Diámetro primitivo engrane conducido: $dp_2 := m_1 \cdot z_2$ $dp_2 = 171 \cdot \text{mm}$

Definimos también la altura de adendo y dedendo:

Adendo (altura de cabeza): $a := m_1$ $a = 3 \cdot \text{mm}$

Dedendo (altura de raiz): $b := 1.25 \cdot m_1$ $b = 3.75 \cdot \text{mm}$

Siguiente

PROBLEMA DE APLICACION

Sabiendo los diámetros primitivos y las alturas de raíz y de cabeza, calculamos los diámetros externos e internos:



Diámetro externo engrane motor: $de_1 := dp_1 + 2 \cdot a$ $de_1 = 57 \text{ mm}$

Diámetro externo engrane conducido: $de_2 := dp_2 + 2 \cdot a$ $de_2 = 177 \text{ mm}$

Diámetro de raíz engrane motor: $df_1 := dp_1 - 2 \cdot b$ $df_1 = 43.5 \text{ mm}$

Diámetro de raíz engrane conducido: $df_2 := dp_2 - 2 \cdot b$ $df_2 = 163.5 \text{ mm}$

Paso circular

$$p_c = \pi \cdot m$$

$$p_c = \pi \cdot 3 \text{ mm} = 9,42 \text{ mm}$$

Las circunferencias base dependen del Angulo de presión:

Diámetro de base engrane motor: $db_1 := dp_1 \cdot \cos(\phi)$ $db_1 = 47.92 \text{ mm}$

Diámetro de base engrane conducido: $db_2 := dp_2 \cdot \cos(\phi)$ $db_2 = 160.69 \text{ mm}$

Distancia entre centros:

$$C := \frac{dp_1 + dp_2}{2} \quad C = 111 \text{ mm}$$

Distancia que verifica dentro del intervalo solicitado en el enunciado del problema:

$$80 \text{ mm} \leq C \leq 120 \text{ mm}$$

Siguiente

PROBLEMA DE APLICACION

Por ultimo definimos el largo de la rueda. Para esto, Faires (Diseño de elementos de maquinas – 4th ed – punto 13.12) recomienda para el flanco del diente:



$$8 \cdot m \leq F \leq 12,5 \cdot m$$

Para esto, Fanchon (Guide des Sciences et Technologies Industrielles) recomienda para el flanco del diente:

$$7 \cdot m \leq F \leq 12 \cdot m$$

Oberg-Jones (Manual Universal de la Técnica Mecánica – ed 14 - tomo I – pag. 723) recomienda:

$$3 \cdot p \leq F \leq 4 \cdot p \Rightarrow 3 \cdot \pi \cdot m \leq F \leq 4 \cdot \pi \cdot m \Rightarrow 9,4 \cdot m \leq F \leq 12,5 \cdot m$$

Usamos la siguiente proporción:

$$F := 7 \cdot m_1$$

$$F = 21 \text{ mm}$$

PROBLEMA DE APLICACION

Calculamos ahora el grado de recubrimiento del engranaje, de acuerdo a la formula planteada en la teoría:

$$m_c := \frac{\sqrt{\left(\frac{de_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{db_1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{de_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{db_2}{2}\right)^2} - C \cdot \sin(\phi)}{p_c \cdot \cos(\phi)}$$

$$m_c = 1.646$$

Interpretación del grado de recubrimiento

64,6% del tiempo → 2 pares de dientes en contacto

El resto del tiempo → 1 par de dientes en contacto

Ejemplo: $m_c = 2,35$

35% del tiempo → 3 pares de dientes en contacto

El resto del tiempo → 2 pares de dientes en contacto

Siguiente

PROBLEMA DE APLICACION

d) Verificación a la flexión por LEWIS



Formula para la verificación a la flexión por LEWIS (ecuación 14-8, para tallado por sistema **módulo**), a partir de libro Diseño en ingeniería mecánica (Shigley-Mischke) 9na edición. Tener en cuenta las formulas usando SI de unidades. A continuación se presenta la formula de tensión de **flexión aplicada al diente** de una rueda.

Carga tangencial
 $W^t = H/V$

Factor dinámico
Ec 14-6

$$\sigma = \frac{W^t \cdot K_v}{F \cdot m \cdot Y}$$

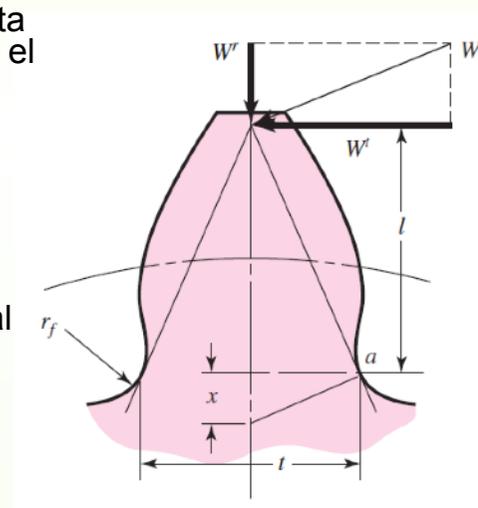
Flanco

Modulo

Factor geométrico de resist a la flexión.
Fig 14-2

Es importante señalar que esta tensión no esta considerando el efecto de la concentración de tensiones por el radio de acuerdo en la raíz del diente. (esto **incrementaría** el esfuerzo).

Por otra parte, el modelo matemático considera que se aplica la carga tangencial total sobre un solo diente, y en su extremo, lo cual no es cierto, porque cuando un diente empuja a su conjugado en el extremo, siempre existe otro par de dientes que aun esta trabajando.



Siguiente

PROBLEMA DE APLICACION

1) Calculo de la fuerza tangencial W_t

$$W_t := \frac{P}{dp_1 \cdot \pi \cdot n_1}$$

$$W_t = \frac{((13,5HP \cdot 745,5)) \cdot 60 \cdot 1000}{(51mm) \cdot (\pi) \cdot (1450rpm)} \rightarrow W_t = 2597N$$

$$\sigma = \frac{W^t \cdot K_v}{F \cdot m \cdot Y}$$

2) Buscamos el factor de dinámico K_v

El factor K_v es un incrementador del esfuerzo en el diente, que cuantifica los efectos de la velocidad y de la calidad del tallado de los dientes.

$$K_v = \left(\frac{3,56 + \sqrt{V}}{3,56} \right) \quad (\text{Ec. 14-6c})$$

La ecuación 15-6c es para el calculo de dientes tallados por sistema modulo, y la velocidad tangencial debe indicarse en m/s

Entonces, el factor dinámico K_v resulta:

$$v_t := \pi \cdot dp_1 \cdot n_1$$

$$v_t = 3.872 \frac{m}{s}$$

$$K_v := \left(\frac{3.56 + \sqrt{v_t}}{3.56} \right) \quad K_v = 1.553$$

$$\sigma = \frac{W^t \cdot K_v}{F \cdot m \cdot Y}$$

En unidades SI, las ecuaciones (14-4a) a la (14-5b) se convierten en

$$K_v = \frac{3.05 + V}{3.05} \quad (\text{hierro fundido, perfil moldeado}) \quad (14-6a)$$

$$K_v = \frac{6.1 + V}{6.1} \quad (\text{perfil cortado o fresado}) \quad (14-6b)$$

$$K_v = \frac{3.56 + \sqrt{V}}{3.56} \quad (\text{perfil generado con fresa madre o cepillado}) \quad (14-6c)$$

$$K_v = \sqrt{\frac{5.56 + \sqrt{V}}{5.56}} \quad (\text{perfil cepillado o esmerilado}) \quad (14-6d)$$

donde V está en metros por segundo (m/s).

Siguiente

PROBLEMA DE APLICACION

En unidades SI, las ecuaciones (14-4a) a la (14-5b) se convierten en

$$K_v = \frac{3.05 + V}{3.05} \quad (\text{hierro fundido, perfil moldeado})$$

$$K_v = \frac{6.1 + V}{6.1} \quad (\text{perfil cortado o fresado})$$

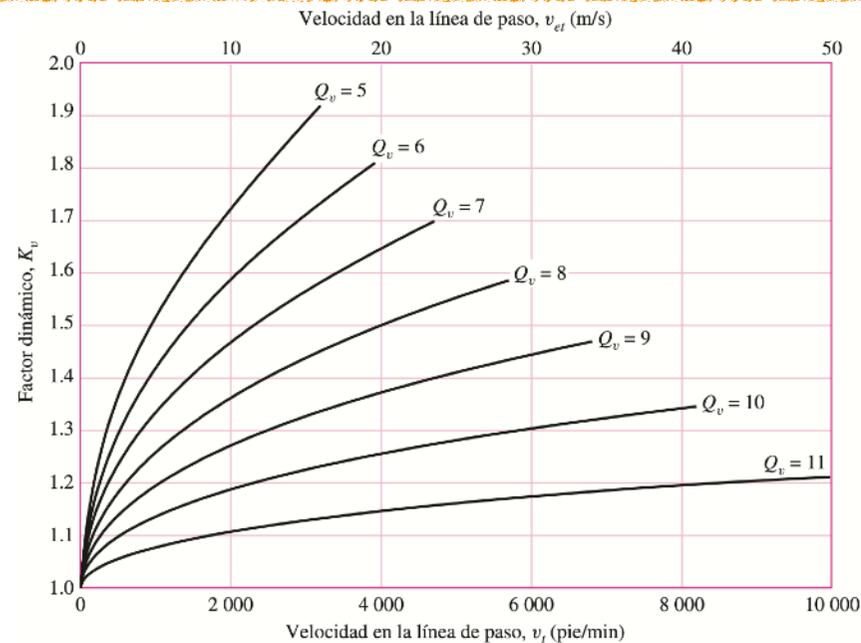
$$K_v = \frac{3.56 + \sqrt{V}}{3.56} \quad (\text{perfil generado con fresa madre o cepillado})$$

$$K_v = \sqrt{\frac{5.56 + \sqrt{V}}{5.56}} \quad (\text{perfil cepillado o esmerilado})$$



Figura 15-5

Factor dinámico K_v .
(Fuente: ANSI/AGMA 2003-
B97.)



Siguiente

PROBLEMA DE APLICACION

3) Ancho de cara y modulo

$F = 21 \text{ mm}$ Ancho del diente

$m_1 = 3 \text{ mm}$ modulo

$$\sigma = \frac{W^t \cdot K_v}{F \cdot m \cdot Y}$$



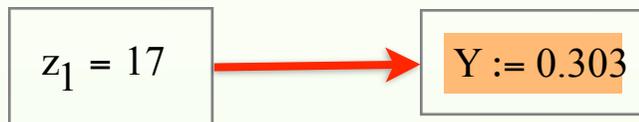
4) Factor geométrico

El factor Y es el llamado Factor de forma de Lewis, y su determinación está directamente relacionada con la geometría del diente, es decir con su forma y dimensiones.

La tabla adjunta muestra los factores de forma para dientes con 20° de ángulo de presión, y se obtiene con la cantidad de dientes del engrane:

(Fig. 14-2 Shigley)

| Number of Teeth | Y | Number of Teeth | Y |
|-----------------|-------|-----------------|-------|
| 12 | 0.245 | 28 | 0.353 |
| 13 | 0.261 | 30 | 0.359 |
| 14 | 0.277 | 34 | 0.371 |
| 15 | 0.290 | 38 | 0.384 |
| 16 | 0.296 | 43 | 0.397 |
| 17 | 0.303 | 50 | 0.409 |
| 18 | 0.309 | 60 | 0.422 |
| 19 | 0.314 | 75 | 0.435 |
| 20 | 0.322 | 100 | 0.447 |
| 21 | 0.328 | 150 | 0.460 |
| 22 | 0.331 | 300 | 0.472 |
| 24 | 0.337 | 400 | 0.480 |
| 26 | 0.346 | Rack | 0.485 |



Siguiente

PROBLEMA DE APLICACION

5) Ahora ya estamos en condiciones de calcular la tensión de flexión según LEWIS en el piñón.



$$\sigma = \frac{W^t \cdot K_v}{F \cdot m \cdot Y}$$

Conociendo las variables que componen la fórmula:

$$W_t = 2597N$$

$$K_v = 1.553$$

$$m_1 = 3 \cdot mm$$

$$F = 21 \cdot mm$$

$$Y := 0.303$$

$$\sigma = \frac{(2597N) \cdot (1,553)}{(21mm) \cdot (3mm) \cdot (0,303)}$$

$$\sigma = 211MPa$$

Siguiente

PROBLEMA DE APLICACION

6) Ahora estamos en condiciones de calcular el factor de seguridad, comparando el esfuerzo aplicado y la tensión admisible.



$$n_s = \frac{S_t}{\sigma}$$

La tensión admisible S_t es la que habíamos calculado en el inicio del calculo, y viene determinada por el material seleccionado para la fabricación de los engranes:

Siendo:

$$S_t = 216 \text{ MPa}$$

$$\sigma = 211 \text{ MPa}$$

El factor de seguridad es:

$$n_s = 1.023$$

De necesitar aumentar el factor de seguridad, se pueden modificar los siguientes parámetros:

- 1) **Aumentar el largo F del diente**
- 2) **Aumentar el módulo**
- 3) **Mejorar la calidad del material**
- 4) **Aumentar cantidad de dientes**

Siguiente

- “Diseño en Ingeniería Mecánica”, Joseph Edward Shigley, Charles Mischke, Ed. Mc. Graw Hill, 8th ed.
- “Manual Universal de la Técnica Mecánica”, Erik Oberg, F.D. Jones, ed. Labor, edición 14.
- “Diseño de elementos de maquinas”, V.M. Faires, Editorial Montaner y Simon - Barcelona 4ta edición.
- “Elementos de maquinas”, Pezzano y Klein – Editorial El Ateneo – quinta edición.
- “Guide des Sciences et Technologies Industrielles”, Jean Louis Fanchon, ed. Nathan, novena edición.
- “Diseño de maquinas”, Robert L. Norton – Prentice Hall – 1ra edicion