



FACULTAD
DE INGENIERÍA

MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

CUERPO RÍGIDO

Energía y Cantidad de Movimiento

Ing. Carlos Barrera-2023

Cátedra:

MECÁNICA APLICADA

MECÁNICA Y
MECANISMOS

OBJETIVOS

Estudiar el método del Trabajo y la Energía

- **Aplicar y analizar el movimiento de cuerpos rígidos y sistemas de cuerpos rígidos**

Principio del Trabajo y la Energía para un cuerpo rígido

Para aplicar el principio del trabajo y la energía en un cuerpo rígido, se divide al cuerpo en un gran número n de partículas

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$$

T_1, T_2 Valores inicial y final energía cinética total de las partículas que forman el cuerpo rígido.

U_{1-2} Trabajo de todas las fuerzas que actúan.

La energía cinética total:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i^2$$

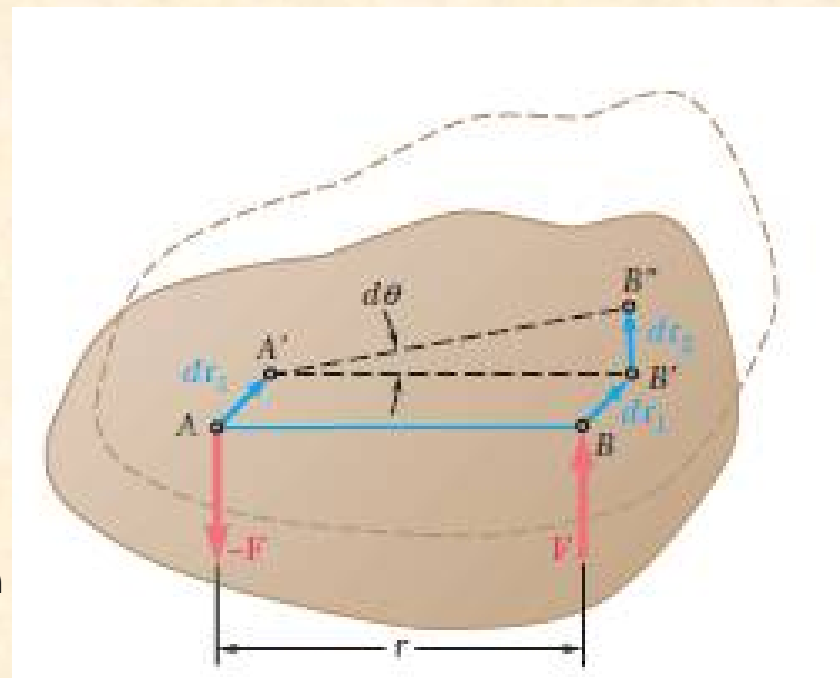
U_{1-2} representa el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las partículas del cuerpo, internas o externas. Como el trabajo total de las fuerzas internas es cero, en la fórmula se considera el trabajo de las fuerzas externas.

Trabajo de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds$$

α es el ángulo que forma con la dirección de movimiento de su punto de aplicación A y s es la variable de integración que mide la distancia recorrida por A a lo largo de su trayectoria.



Para calcular el trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido, es conveniente calcular el trabajo de un par de fuerzas sin considerar por separado el trabajo de cada una de las fuerzas.

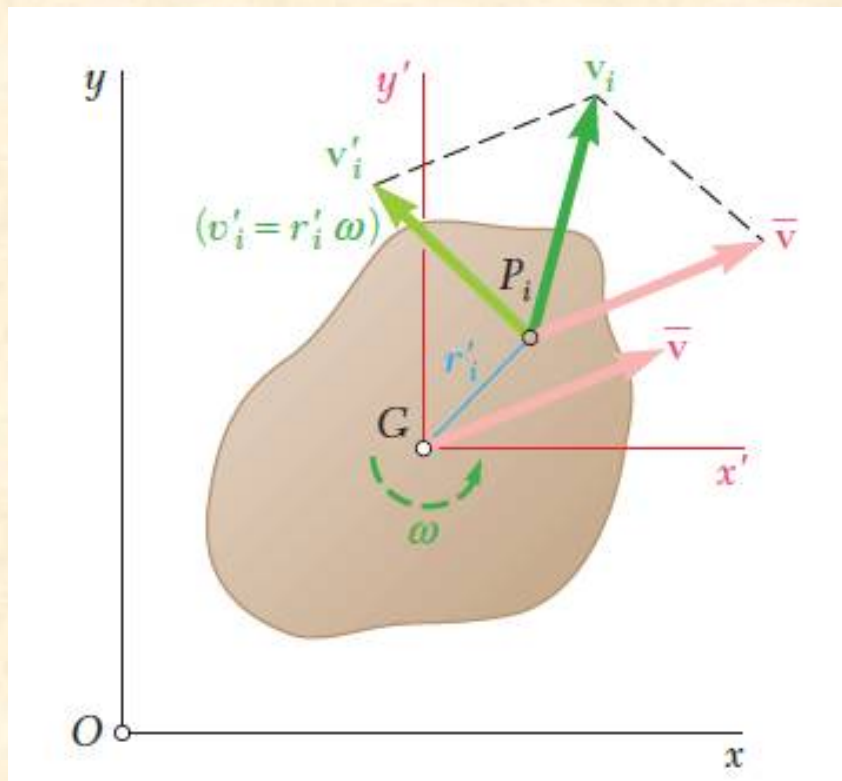
$$ds_2 = r d\theta.$$

$$dU = F ds_2 = Fr d\theta.$$

$$dU = M d\theta$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

Energía Cinética de un cuerpo rígido



$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i'^2$$

$$v_i' = r_i' \omega \quad T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n r_i'^2 \Delta m_i \right) \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$

En el caso particular de un cuerpo en traslación $\omega = 0$ la expresión que se obtiene es $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$

En el caso de una rotación centroidal ($\bar{v} = 0$) la expresión se reduce a $\frac{1}{2}I\bar{\omega}^2$

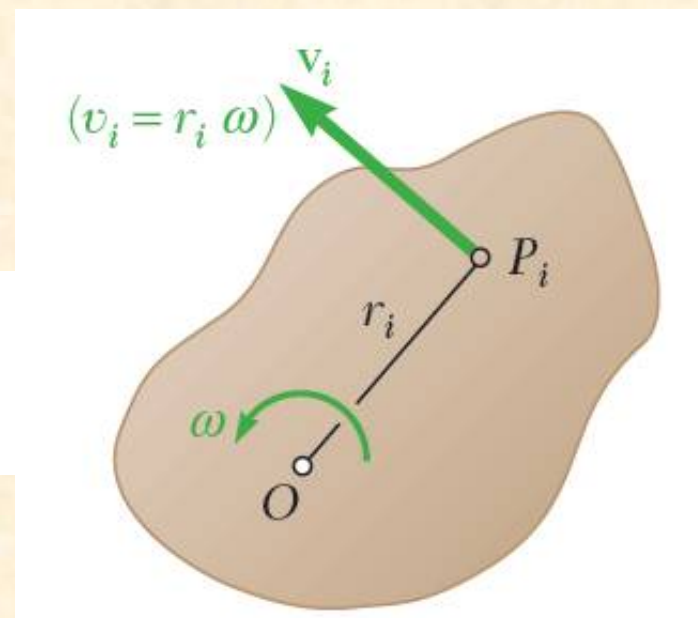
La energía cinética de un cuerpo rígido puede descomponerse en dos partes: la energía cinética asociada con el movimiento del centro de masa G del cuerpo y la energía cinética asociada con la rotación del cuerpo alrededor de G.

Rotación no centroidal

La energía cinética de un cuerpo rígido que gira con una velocidad angular alrededor de un eje fijo que pasa por O

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta m_i \right) \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$



Cuando se tiene varios cuerpos rígidos el principio del trabajo y la energía puede aplicarse a cada cuerpo. Puede escribirse:

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$$

T representa la suma de las energías cinéticas de los cuerpos rígidos que forman el sistema.

$U_{1 \rightarrow 2}$ representa el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre los distintos cuerpos.

Conservación de la energía

Quando un cuerpo rígido , o un sistema de cuerpos rígidos, se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, la suma de la energía cinética y de la energía potencial del sistema permanece constante.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

El método del trabajo y la energía debe complementarse con la aplicación del principio de D'Alembert cuando se van a determinar reacciones.

Potencia

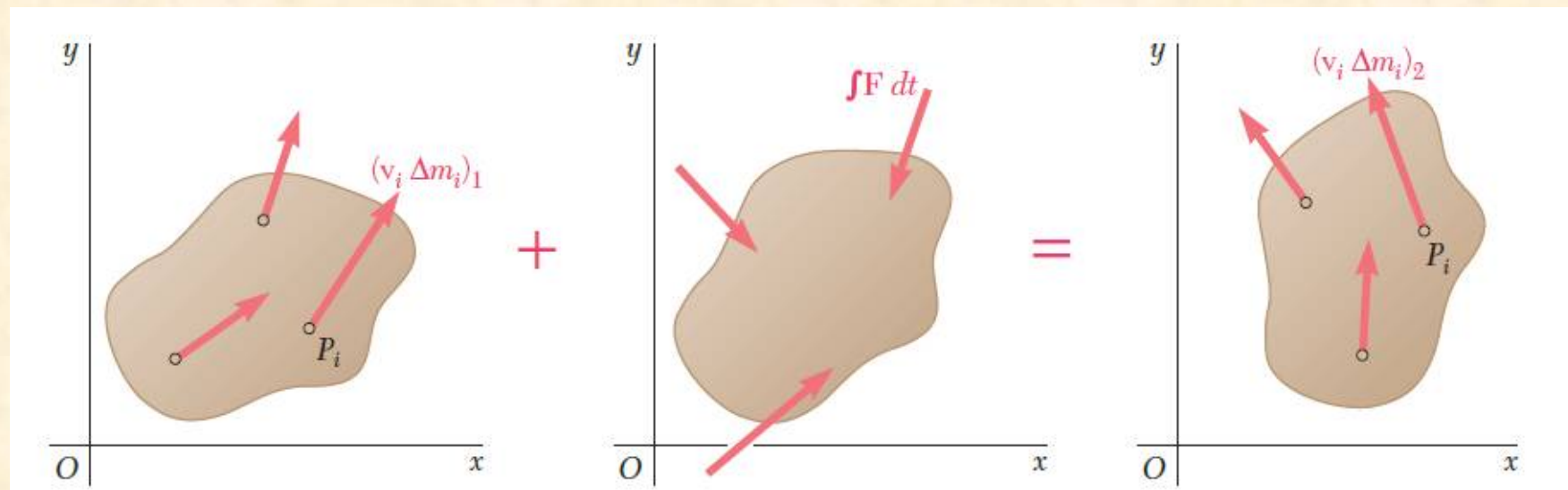
La potencia es la rapidez con la cual se realiza el trabajo. Se puede expresar:

$$P = F \cdot v$$

Para el caso de un cuerpo rígido que gira con velocidad angular w y se somete a la acción de un momento M paralelo al eje de rotación se tiene:

$$P = M \cdot w$$

Principio del Impulso y la Cantidad de Movimiento



Sist. Cant. Mov.₁ + Syst. Imp. Ext._{1→2} = Syst. Cant. Mov.₂

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \Delta m_i$$

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_i \Delta m_i$$

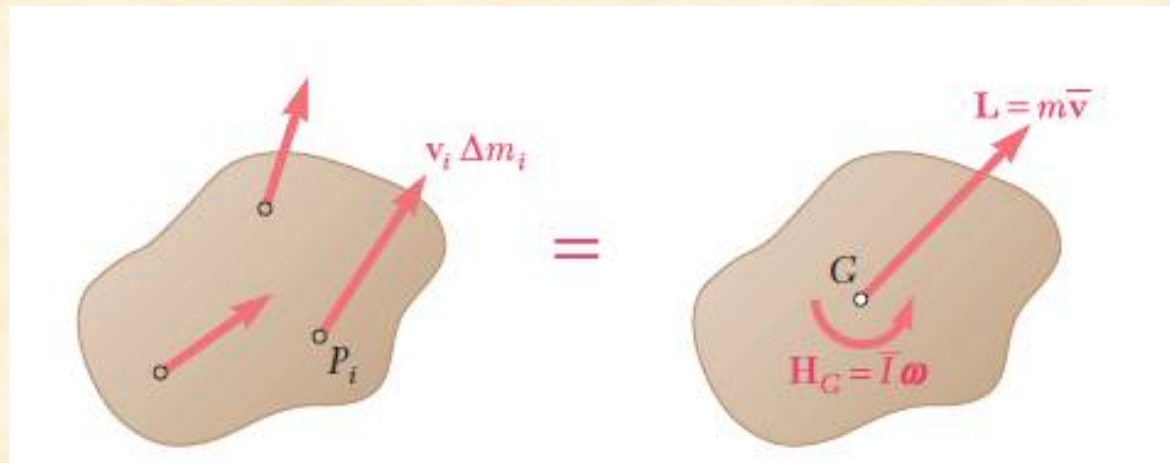
$$\mathbf{L} = m \bar{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{H}_G = \bar{\mathbf{I}} \omega$$

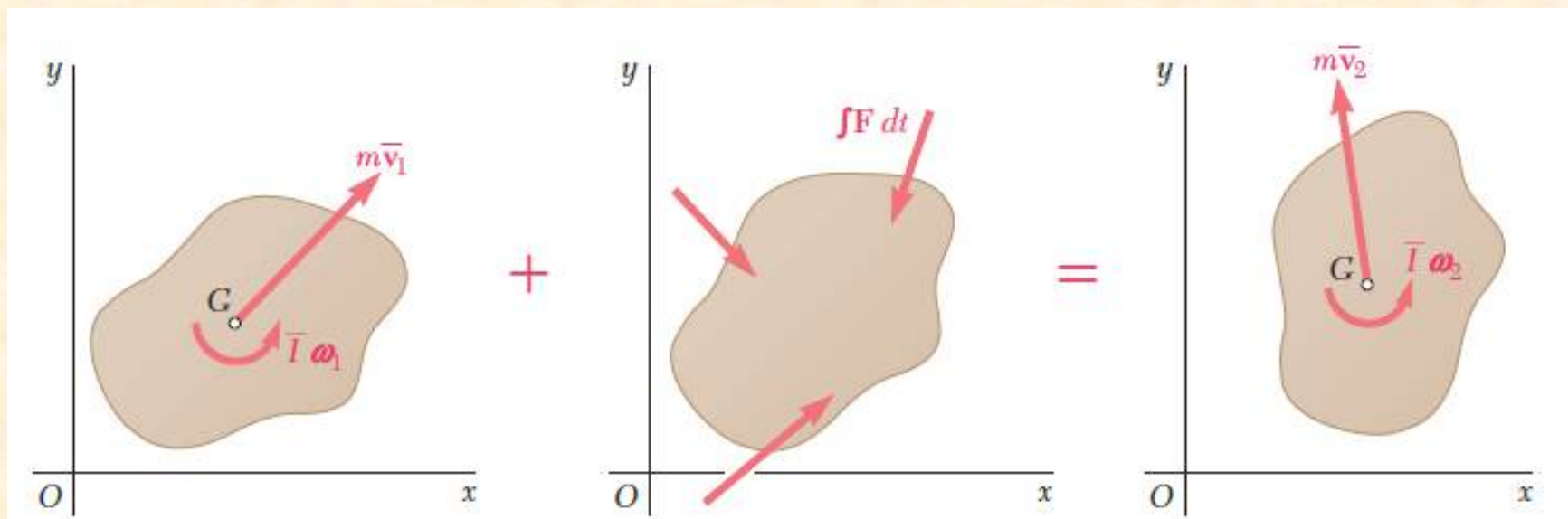
Cátedra:

MECÁNICA APLICADA

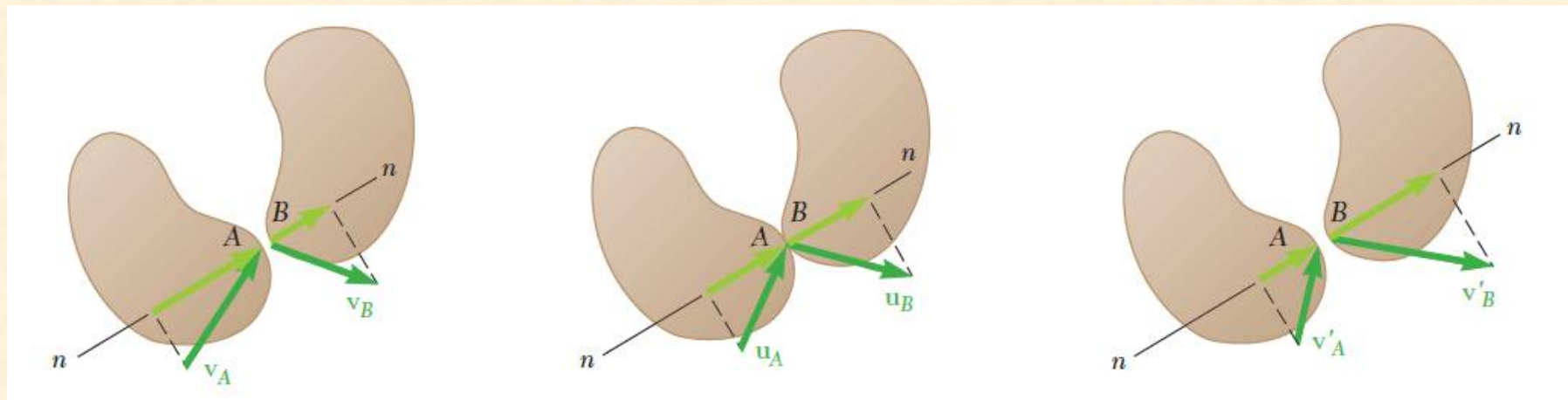
MECÁNICA Y
 MECANISMOS



Al sustituir el sistema de cantidades de movimiento por el vector de movimiento lineal y el par de cantidad de movimiento angular, se obtienen:



Impacto Excéntrico



V_A y V_B

Velocidades antes del impacto de los dos puntos de contacto A y B

u_A y u_B

Velocidades al final del período de deformación

V'_A y V'_B

Velocidades al final del período de restitución

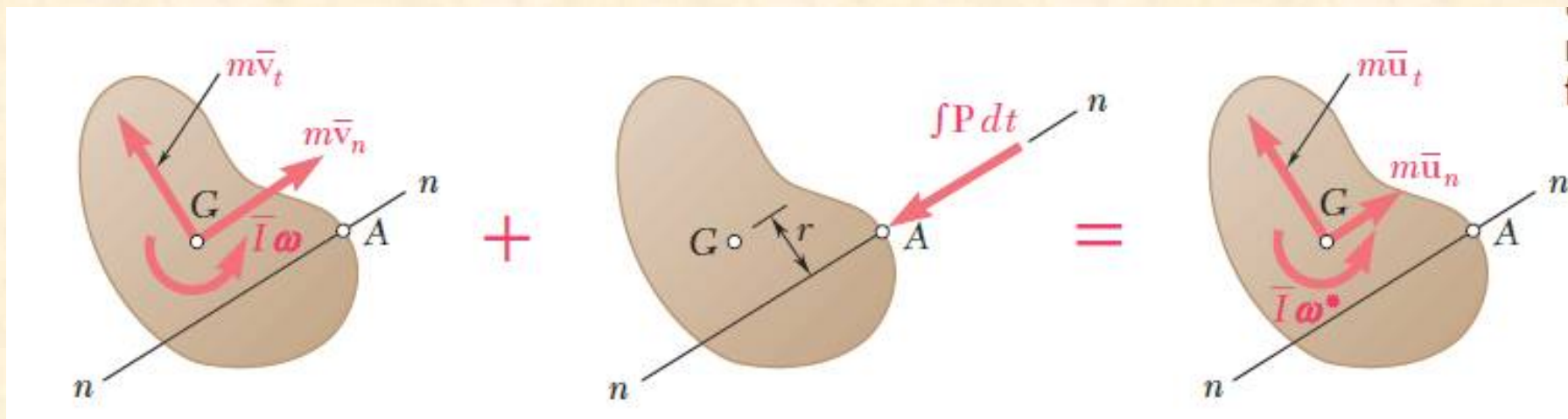
El coeficiente de restitución:

$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt}$$

Se demostrará que la relación entre las velocidades relativas de las partículas antes y después del impacto también se cumple entre las componentes a lo largo de la línea de impacto.

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n]$$

Los diagramas de cantidad de movimiento e impulso correspondientes al período de deformación



\bar{v} y \bar{u} Velocidad del centro de masa al principio y al final del período de deformación

ω y ω^0 Velocidad angular en los mismos instantes.

Durante el período de deformación:

$$m\bar{v}_n - \int P dt = m\bar{u}_n$$

$$\bar{I}\omega - r \int P dt = \bar{I}\omega^*$$

Durante el período de restitución:

$$\begin{aligned}
 m\bar{u}_n - \int R dt &= m\bar{v}'_n \\
 \bar{I}\omega^* - r\int R dt &= \bar{I}\omega'
 \end{aligned}$$

$$\bar{v}' \text{ y } \omega'$$

Velocidad del centro de masa y velocidad angular del cuerpo después del impacto

Resolviendo y reemplazando:

$$e = \frac{\bar{u}_n - \bar{v}'_n}{\bar{v}_n - \bar{u}_n} \quad e = \frac{\omega^* - \omega'}{\omega - \omega^*}$$

Si se multiplica por r el numerador y el denominador de la segunda expresión y se suma al numerador y denominador de la primera expresión, se tiene:

$$e = \frac{\bar{u}_n + r\omega^* - (\bar{v}'_n + r\omega')}{\bar{v}_n + r\omega - (\bar{u}_n + r\omega^*)}$$

$\bar{v}_n + r\omega$ representa la componente $(v_A)_n$

$$e = \frac{(u_A)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (u_A)_n}$$

El análisis del movimiento del segundo cuerpo lleva a una expresión similar para el coeficiente de restitución en términos de las componentes a lo largo de nn de las velocidades del punto B.

Cátedra:

MECÁNICA APLICADA

MECÁNICA Y
MECANISMOS

BIBLIOGRAFIA

- Mecánica Vectorial para Ingenieros 8^o Edición Beer
Johnston
- Ingeniería Mecánica Dinámica Hibbeler

Diapositiva 13

CB1

Carlos Barrera; 8/9/2021