1.LEY DE CONSERVACIÓN DE MASA

1.1 Introducción

La ley de conservación de masa es una ecuación de balance material escrita para un componente en un volumen de control del sistema a ser modelado.
En reservorios de petróleos, el volumen de control es una porción de medio poroso que contiene una, dos o tres fases fluidas.
El medio poroso es tratado como un continuo cuyas propiedades físicas en cualquier punto son las de un elemento representativo del medio.
La ecuación de balance material para cualquier componente, c, en el sistema puede ser expresado como:

$$(m_i - m_o)_c + (m_s)_c = m_{a_c} \quad (1.1)$$

m_i=mass in= masa del componente que entra al volumen de control desde otra parte del reservorio
m_o=mass out= masa del componente que sale del volumen de control a otras partes del reservorio.
m_s=sink/source= masa del componente que sale o entra al volumen de control externamente (a través de pozos) y m_a= accumulated mass= masa de material acumulado o depletado del volumen de control en un intervalo de tiempo.

1.2 Ecuación de Conservación de masa para flujo monofásico en una dimensión

La figura 1.1 muestra un volumen de control finito con una sección transversal A_x perpendicular a la dirección de flujo , longitud Δx en la dirección del flujo y volumen V_b.
El punto x representa el centro del volumen de control. El fluido entra al volumen de control a través de su superficie en $x-\Delta x/2$ y lo deja en $x+\Delta x/2$. El fluido también entra al volumen de control a través de un pozo. El balance material en este caso es:

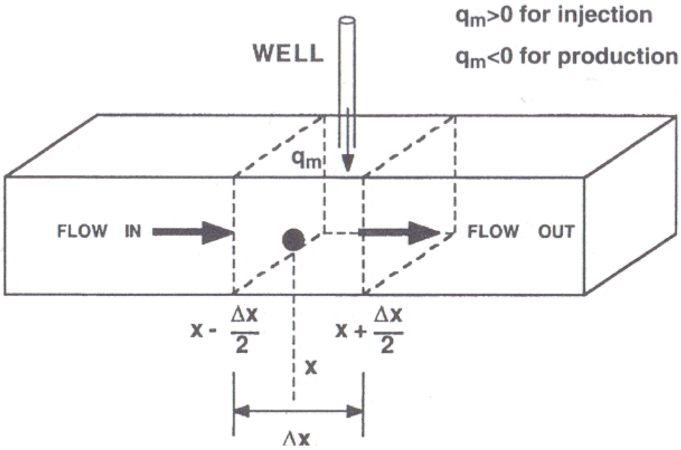

Fig. 1.1 Volumen de control para flujo unidimensional en coordenadas cartesianas

$$m_i\big|_{x-\Delta x/2} - m_o\big|_{x+\Delta x/2} + m_s\big|_x = m_a \quad (1.2)$$

o

$$w_x\big|_{x-\Delta x/2}\Delta t - w_x\big|_{x+\Delta x/2}\Delta t + q_m\Delta t = \Delta t(V_b m_v) \ (1.3)$$

$$w_x\big|_{x-\Delta x/2} = (\dot{m}_x A_x)\big|_{x-\Delta x/2} \ (1.4)$$

$$w_x\big|_{x+\Delta x/2} = (\dot{m}_x A_x)\big|_{x+\Delta x/2} \ (1.5)$$

$$\Delta t(V_b m_v) = V_b(m_v\big|_{t+\Delta t} - m_v\big|_t) \ (1.6)$$

$\dot{m}_x$ Componente x del vector flujo másico (flujo de masa por unidad de área y por unidad de tiempo)

m_v masa de fluido contenida en la unidad de volumen de reservorio

w_x componente x del caudal másico (masa por unidad de tiempo)

q_m caudal másico a través del pozo(masa por unidad de tiempo)

Reemplazando (1.4), (1.5) y (1.6) en (1.3) y acomodando los términos

$$-\left[(\dot{m}_x A_x)\big|_{x+\Delta x/2} - (\dot{m}_x A_x)\big|_{x-\Delta x/2}\right]\Delta t + q_m\Delta t = V_b\left(m_v\big|_{t+\Delta t} - m_v\big|_t\right) \ (1.8)$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación (8) por Δt y multiplicando y dividiendo el primer término del lado izquierdo de la ecuación por Δx,

$$-\left[\frac{(\dot{m}_x A_x)\big|_{x+\Delta x/2} - (\dot{m}_x A_x)\big|_{x-\Delta x/2}}{\Delta x}\right]\Delta x + q_m = V_b\left[\frac{m_v\big|_{t+\Delta t} - m_v\big|_t}{\Delta t}\right] \ (1.9)$$

Si Δx y Δt tienden a cero los límites de los términos entre corchetes se vuelven derivadas parciales y la ecuación resulta en la expresión buscada para la

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\dot{m}_x A_x)\Delta x = V_b \frac{\partial}{\partial t}(m_v) - q_m \quad (1.10)$$

conservación de masa en coordenadas rectangulares.

La ecuación (1.10) aparece en la literatura en formas diferentes. Por ejemplo, si A_x es independiente de x, entonces $V_b = A_x . \Delta x$ y la ecuación se reduce a

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\dot{m}_x) = \frac{\partial}{\partial t}(m_v) - \frac{q_m}{V_b} \quad (1.11)$$

Para flujo monofásico $m_v = \phi . \rho$, entonces

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\dot{m}_x) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) - \frac{q_m}{V_b} \quad (1.12)$$

También el vector flujo másico puede ser expresado como el producto de la densidad del fluido y la velocidad

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) = \frac{1}{\alpha_c}\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) - \frac{q_m}{\alpha_c V_b} \quad (1.13)$$

α_c= factor de conversión de unidades de volumen

En tres dimensiones

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\dot{m}_x A_x)\Delta x - \frac{\partial}{\partial y}(\dot{m}_y A_y)\Delta y - \frac{\partial}{\partial z}(\dot{m}_z A_z)\Delta z = V_b \frac{\partial}{\partial t}(m_v) - q_m \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_x &= \alpha_c \rho u_x \\ \dot{m}_y &= \alpha_c \rho u_y \\ \dot{m}_z &= \alpha_c \rho u_z \quad (1.15) \\ m_v &= \rho\phi \\ q_m &= \alpha_c \rho q \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.15) en (1.14) y dividiendo la ecuación resultante por $\alpha_c \rho_{sc}$ y usando la definición de $B_l=\rho_{lsc}/\rho_l$ se llega a otra expresión de la ecuación de conservación de masa.

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(A_x \frac{u_{lx}}{B_l}\right)\Delta x - \frac{\partial}{\partial y}\left(A_y \frac{u_{ly}}{B_l}\right)\Delta y - \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z \frac{u_{lz}}{B_l}\right)\Delta z = \frac{V_b}{\alpha_c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_l}\right) - q_{lsc} \quad (1.16)$$

$$donde \quad l = o, w, g$$

1.3 Ecuación básica para flujo monofásico

La ecuación de flujo para flujo monofásico puede obtenerse combinando la ley de Darcy (Ver punto 2.2) y la ecuación de conservación de masa (1.16). La densidad del fluido es expresada en función de la presión.

$$\vec{u} = -\beta_c \frac{k}{\mu}\vec{\nabla}\Phi \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma_l \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right]\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left[\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu_l B_l}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \gamma_l \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right]\Delta y +$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\beta_c \frac{k_z A_z}{\mu_l B_l}\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma_l \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right]\Delta z = \frac{V_b}{\alpha_c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_l}\right) - q_{lsc} \quad (1.18)$$

$$donde \quad l = o, w, g$$

Esta es la ecuación fundamental usada en la simulación de reservorios. En la derivación de la misma no se han realizado suposiciones acerca de la naturaleza del fluido (incompresible, poco compresible o compresible) por lo tanto es válida para flujo monofásico de petróleo, agua o gas.

2.ECUACIÓN DE DARCY

La ecuación de Darcy es una relación empírica entre el caudal de un fluido a través de un medio poroso y el gradiente de potencial de flujo.
Para flujo monofásico unidimensional puede expresarse en forma diferencial como:

$$\frac{q}{A_x} = u_x = -\beta_c \frac{k_x}{\mu} \frac{d\Phi}{dx} \quad (2.1)$$

$\beta c =$ Factor de conversión de unidades para el coeficiente de trasmisibilidad

$$\vec{u} = -\beta_c \frac{k}{\mu} \vec{\nabla}\Phi \quad (2.2)$$

Para flujo en tres dimensiones la forma diferencial de la ley de Darcy es

Reemplazando el gradiente de potencial de flujo

$$\vec{u} = -\beta_c \frac{k}{\mu} \left(\vec{\nabla} p - \gamma \vec{\nabla} Z \right) \quad (2.3)$$

Cuando se usa esta forma de la ley de Darcy se deben tener en cuenta las siguientes suposiciones y limitaciones:

- El fluido es homogéneo, monofásico y newtoniano.
- No existe reacción química entre el fluido y el medio poroso.
- Flujo laminar
- La k es es independiente de la presión, la temperatura y del fluido.
- No existe efecto klinkenberg
- No hay efectos electrocinéticos

$$\vec{u}_l = -\beta_c \frac{k k_{rl}}{\mu_l} \vec{\nabla}\Phi_l \quad (2.4)$$

$$l = o, w, g$$

Para flujo multifásico la ley de Darcy para cada fase puede expresarse como:

Reemplazando el gradiente de potencial

$$\vec{u}_l = -\beta_c \frac{k k_{rl}}{\mu_l} \left(\vec{\nabla} p_l - \gamma_l \vec{\nabla} Z \right) \quad (2.5)$$

3. FORMULACION DE LAS ECUACIONES BASICAS PARA FLUJO MONOFASICO

3.1 Introducción

Se presentan las ecuaciones básicas que describen el transporte de una sola fase a través del medio poroso. Estas ecuaciones que describen los procesos físicos de interés en el reservorio, están en la forma de ecuaciones en derivadas parciales y consideran las relaciones dinámicas entre el fluido, el medio poroso y las condiciones de flujo presentes en el sistema.

3.2 Ecuación de continuidad en varias geometrías de flujo

La ecuación de continuidad (ecuación diferencial de conservación de masa) puede ser desarrollada escribiendo una ecuación de balance de masa sobre un elemento de volumen a través del cual está fluyendo un fluido. La forma de este volumen de control depende del sistema de coordenadas usado para describir el problema de flujo.
El sistema de coordenadas debe estar en concordancia con la geometría del flujo definida por las líneas equipotenciales y líneas de flujo, esto es definida por los límites físicos y distribución de las propiedades del reservorio.
Las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 muestran tres geometrías de flujo usadas comúnmente en modelado de reservorios.

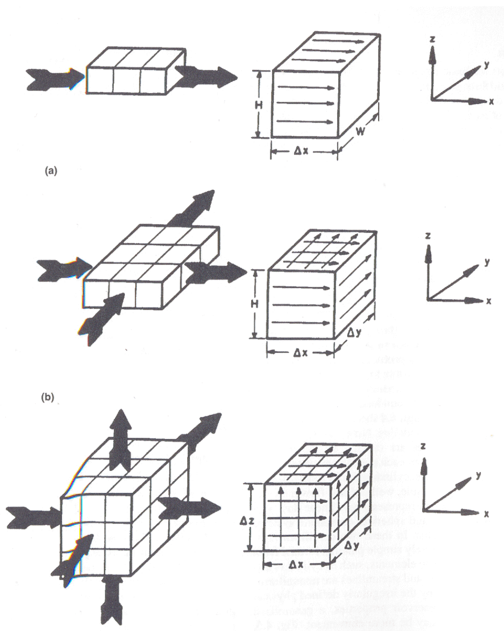

Figura 3.1 Flujo 1D, 2D y 3D en coordenadas cartesianas

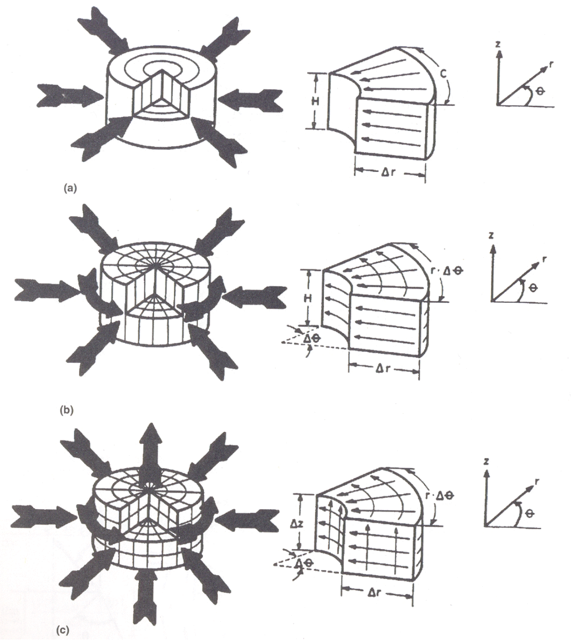

Figura 3.2 Flujo 1D, 2D y 3D en coordenadas cilíndricas

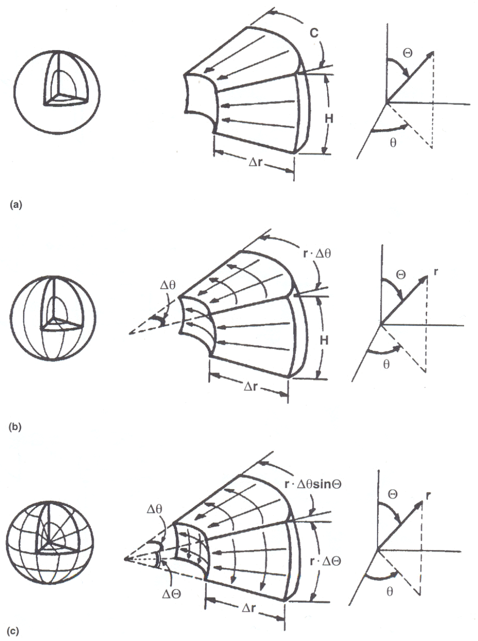

Figura 3.3 Flujo 1D, 2D y 3D en coordenadas esféricas

Para expresar matemáticamente el flujo de fluidos a través del medio poroso, es necesario usar las siguientes leyes:

1. Ley de conservación de masa
2. Ecuación de estado: describe la densidad del fluido como una función de la temperatura o presión.
3. Ecuación de Darcy

3.3 Derivación de la Ecuación de flujo generalizada

La ecuación de continuidad es la expresión matemática de un balance material. En coordenadas cartesianas el elemento de volumen es un prisma rectangular de dimensiones Δx, Δy y Δz.
Para el volumen de control de la figura 3.4, el balance másico es

$$(m_i - m_o) + (m_s) = m_a \qquad (3.1)$$

Obviamente, de la multiplicación del caudal, q, y la densidad se obtiene el caudal másico que entra o sale del volumen de control por unidad de tiempo ya que

$$\left[q\left(\frac{L^3}{t}\right)\right]\left[\rho\left(\frac{m}{L^3}\right)\right] = \left[w\left(\frac{m}{t}\right)\right] \qquad (3.2)$$

La figura 3.4 muestra una flecha rayada que indica que una cantidad adicional de fluido puede ser inyectada (o producida de) en el volumen de control a un caudal de q_m (m/t).

Por convención se usa signo positivo para la inyección y signo negativo para la producción.

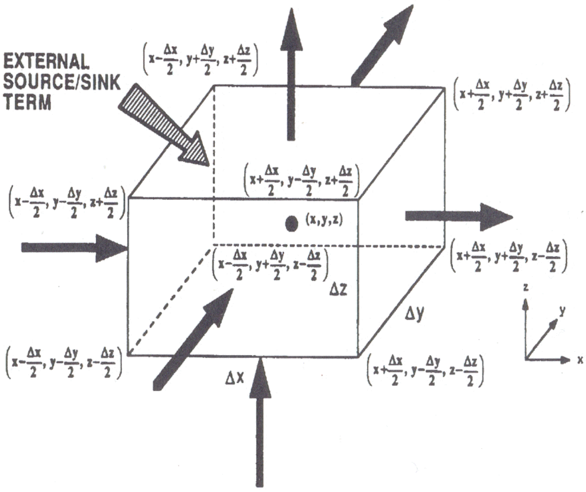

Figura 3.4 Volumen de control en coordenadas rectangulares

$$\left[w_x\big|_{x-\Delta x/2}\Delta t + w_y\big|_{y-\Delta y/2}\Delta t + w_z\big|_{z-\Delta z/2}\Delta t \right]$$
$$-\left[w_x\big|_{x+\Delta x/2}\Delta t + w_y\big|_{y+\Delta y/2}\Delta t + w_z\big|_{z+\Delta z/2}\Delta t \right] + q_m\Delta t = \left(\phi\Delta x\Delta y\Delta z\rho\right)_{t+\Delta t} - \left(\phi\Delta x\Delta y\Delta z\rho\right)_t \quad (3.3)$$

Donde

$$w_x = \dot{m}_x \Delta y \Delta z = \dot{m}_x A_x \quad (3.4a)$$
$$w_y = \dot{m}_y \Delta x \Delta z = \dot{m}_y A_y \quad (3.4b)$$
$$w_z = \dot{m}_x \Delta x \Delta y = \dot{m}_z A_z \quad (3.4c)$$

y

$$\dot{m}_x = \alpha_c \rho u_x \quad (3.5a)$$
$$\dot{m}_y = \alpha_c \rho u_y \quad (3.5b)$$
$$\dot{m}_z = \alpha_c \rho u_z \quad (3.5c)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.5 en 3.4

$$w_x = \alpha_c \rho u_x A_x \quad (3.6a)$$
$$w_y = \alpha_c \rho u_y A_y \quad (3.6b)$$
$$w_z = \alpha_c \rho u_z A_z \quad (3.6c)$$

Sustituyendo ecuaciones 3.6 en 3.3

$$-\Big[(\rho u_x A_x)_{x+\Delta x/2} - (\rho u_x A_x)_{x-\Delta x/2} + (\rho u_y A_y)_{y+\Delta y/2} - (\rho u_y A_y)_{y-\Delta y/2} +$$
$$(\rho u_z A_z)_{z+\Delta z/2} - (\rho u_z A_z)_{z-\Delta z/2}\Big] + \frac{q_m}{\alpha_c} = \frac{1}{\alpha_c}\frac{(\phi\Delta x\Delta y\Delta z\rho)_{t+\Delta t} - (\phi\Delta x\Delta y\Delta z\rho)_t}{\Delta t} \quad (3.7)$$

Dividiendo la ecuación 3.7 por Δx, Δy, Δz y sabiendo que V_b=Δx Δy Δz

$$-\left[\frac{(\rho u_x)_{x+\Delta x/2} - (\rho u_x)_{x-\Delta x/2}}{\Delta x}\right]$$
$$-\left[\frac{(\rho u_y)_{y+\Delta y/2} - (\rho u_y)_{y-\Delta y/2}}{\Delta y}\right]$$
$$-\left[\frac{(\rho u_z)_{z+\Delta z/2} - (\rho u_z)_{z-\Delta z/2}}{\Delta z}\right] + \frac{q_m}{\alpha_c V_b} = \frac{1}{\alpha_c}\frac{(\phi\rho)_{t+\Delta t} - (\phi\rho)_t}{\Delta t} \quad (3.8)$$

Tomando límites para Δx ,Δy, Δz y Δt tendiendo a cero

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) + \frac{q_m}{\alpha_c V_b} = \frac{1}{\alpha_c}\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \quad (3.9)$$

Multiplicando (3.9) por V_b

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x A_x)\Delta x - \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y A_y)\Delta y - \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z A_z)\Delta z + \frac{q_m}{\alpha_c} = \frac{V_b}{\alpha_c}\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \quad (3.10)$$

Ecuación 3.10 Ecuación de continuidad o de conservación de masa en tres dimensiones

Ahora consideremos las dos leyes restantes, la ecuación de estado y la ecuación de Darcy.
Una ecuación de estado relaciona la densidad de un fluido con la presión y la temperatura. Una manera simple de expresar esta relación es a través del factor de formación de volumen
(El factor de volumen puede expresarse como una relación entre volúmenes o entre densidades)

$$B = \frac{\rho_{sc}}{\rho} \quad (3.11)$$

ρ_{sc}=densidad en condiciones standard

ρ=densidad en condiciones de reservorio

La ley de Darcy establece que

$$u_x = -\beta_c \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3.12a)$$

$$u_y = -\beta_c \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (3.12b)$$

$$u_z = -\beta_c \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.12c)$$

$\beta c =$ Factor de conversión de unidades para el coeficiente de trasmisibilidad

Y expresando q_m como un caudal volumétrico más que un caudal másico (los fluidos producidos se miden y expresan como unidades volumétricas)

$$q_m\left(\frac{m}{t}\right) = \alpha_c\left(\frac{L^3}{L^3}\right) q_{sc}\left(\frac{L^3}{t}\right) \rho_{sc}\left(\frac{m}{L^3}\right) (3.13a)$$

$$o$$

$$q_m = \alpha_c q_{sc}\, \rho_{sc} \quad (3.13b)$$

Sustituimos ecuación (3.11) y (3.13b) en (3.10) para obtener

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu B} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\Delta x - \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu B} \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\Delta y - \frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c \frac{k_z A_z}{\mu B} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\Delta z + q_{sc} = \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B}\right) \quad (3.14)$$

Esta es la forma más general de la ecuación de flujo monofásico. En esta ecuación no se hacen suposiciones acerca del tipo de fluido (incompresible, poco compresible, compresible) o de la dependencia de las propiedades de la roca y fluidos con la presión. La porosidad se asume que es función de la presión y q_{sc}= caudal en condiciones standard

Si consideramos gradiente de presiones en vez de gradiente de potencial (asumimos flujo horizontal e ignoramos las fuerzas gravitacionales en la dirección z)

$$\vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla} p \quad (3.15)$$

Por lo tanto (3.14) toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu B}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu B}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c \frac{k_z A_z}{\mu B}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z+q_{sc}=\frac{V_b}{\alpha_c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B}\right) \quad (3.16)$$

3.4 Diferentes formas de las ecuaciones de flujo

En la siguiente sección se modificará la ecuación general de flujo teniendo en cuenta la dependencia de la densidad del fluido con la presión.

3.4.1 Ecuación de flujo para fluido incompresible

Si el fluido es incompresible, la densidad es constante, en otras palabras, B es constante. Si no hay expansión térmica (α_T=0) B=1.
Además para un fluido incompresible la viscosidad es constante, por lo tanto la ecuación 3.14 puede reescribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c k_x A_x \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c k_y A_y \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\Delta y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c k_z A_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\Delta z+\mu q_{sc}=0 \quad (3.17)$$

Está claro que la solución de (3.17) es independiente del tiempo. La dependencia del tiempo se removió cuando B se consideró constante para fluidos incompresibles (también el medio poroso se considera incompresible) Esta ecuación representa un problema de flujo en estado estacionario siempre que las condiciones de borde sean independientes del tiempo.
La ecuación 3.17 también indica que las presiones (mapa isobárico) quedan establecidas en forma instantánea.
Además en flujo incompresible no existe acumulación o depletación . En otras palabras todo lo que atraviese las fronteras físicas del reservorio debe desplazar un volumen equivalente de fluido.

Si los términos gravitatorios se desprecian podemos reemplazar el gradiente de potencial por el gradiente de presiones, por lo que se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c k_x A_x \frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c k_y A_y \frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c k_z A_z \frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z+\mu q_{sc}=0 \quad (3.18)$$

Si el medio es homogéneo

$$k_x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+k_z\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{\mu q_{sc}}{\beta_c V_b}=0 \quad (3.19)$$

Si el medio es homogéneo e isótropo

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{\mu q_{sc}}{\beta_c k V_b}=0 \quad (3.20)$$

Si no hay pozo en el dominio de interés (q_{sc}=0) se obtiene

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0 \quad (3.21)$$

$$\nabla^2 p = 0 \qquad (3.22)$$

La ecuación (3.21) describe la distribución de presión p=p(x,y,z) en el campo de flujo de un fluido incompresible en un medio homogéneo e isótropo donde no hay fuente o sumidero externo (pozo). Esta ecuación se llama ECUACION DE LAPLACE. Otra observación importante de esta ecuación es que no contiene ningún término de permeabilidad. Esto implica que la distribución de presiones está gobernada por la configuración geométrica del reservorio y las condiciones de frontera. Los efectos de la k no se reflejan en la distribución de presiones.

3.4.2 Ecuación de flujo para fluido poco compresible

Para un flujo de un fluido poco compresible, se asume que la compresibilidad del fluido es pequeña y permanece constante dentro del rango de interés de la presión.
B puede ser aproximado como

$$B = B^o / \left[1 + c(p - p^o)\right] \quad (3.23)$$

$\mathrm{c} = \text{compresibilidad del fluido}$

$\mathrm{p^o} = \text{presión de referencia}$

$\mathrm{B^o} = \text{B a la presión de referencia}$

Volviendo a la ecuación (3.14) sustituyendo B en el lado derecho de la misma por la ecuación (3.23) y considerando medio poroso incompresible

$$\frac{V_b}{\alpha_c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B}\right)=\frac{V_b\phi}{\alpha_c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[1+c(p-p^o)\right]/B^o\right\}=\frac{V_b\phi c}{\alpha_c B^o}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (3.24)$$

Por lo tanto la ecuación de flujo para fluidos poco compresibles queda:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c\frac{k_xA_x}{\mu B}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c\frac{k_yA_y}{\mu B}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\Delta y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c\frac{k_zA_z}{\mu B}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\Delta z+q_{sc}=\frac{V_b\phi c}{\alpha_c B^o}\frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.25)$$

Ignorando términos gravitatorios

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c\frac{k_xA_x}{\mu B}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c\frac{k_yA_y}{\mu B}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c\frac{k_zA_z}{\mu B}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z+q_{sc}=\frac{V_b\phi c}{\alpha_c B^o}\frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.26)$$

Sustituyendo B en el lado izquierdo de la ecuación y considerando la viscosidad del fluido constante

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c k_x A_x\left[1+c(p-p^o)\right]\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c k_y A_y\left[1+c(p-p^o)\right]\frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y+$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c k_z A_z\left[1+c(p-p^o)\right]\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z+B^o\mu q_{sc}=\frac{V_b\mu\phi c}{\alpha_c}\frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.27)$$

Expandiendo las derivadas en el lado izquierdo de (3.27)

$$\left[1+c(p-p^o)\right]\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c k_x A_x\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x+\beta_c k_x A_x c\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\Delta x+$$
$$\left[1+c(p-p^o)\right]\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c k_y A_y\frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y+\beta_c k_y A_y c\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\Delta y+$$
$$\left[1+c(p-p^o)\right]\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c k_z A_z\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z+\beta_c k_z A_z c\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\Delta z+$$
$$B^o\mu q_{sc}=\frac{V_b\mu\phi c}{\alpha_c}\frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.28)$$

En muchos casos se asume que

$$\left[1+c(p-p^o)\right]\approx 1$$

para fluidos poco compresibles ya que c es muy pequeña. (para petróleos 10^{-5}-10^{-6} 1/psi)
Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c k_x A_x\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c k_y A_y\frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c k_z A_z\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z$$
$$>>c\left[\beta_c k_x A_x\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\Delta x+\beta_c k_y A_y\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\Delta y+\beta_c k_z A_z\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\Delta z\right] \quad (3.29)$$

Si $\Delta x=\Delta y=\Delta z$, $k_x=k_y=k_z$ y $A_x=A_y=A_z$ entonces

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}>>c\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right] \quad (3.30)$$

c es pequeña para fluidos poco compresibles y los gradientes de presión también son relativamente pequeños (por lo tanto sus cuadrados son más pequeños aún). Obviamente esto es cierto para gradientes < 1 psi/ft condición que no se cumple en las cercanías del pozo (wellbores)
Considerando la ecuación (3.28) asumiendo

$$\left[1 + c(p - p^o)\right] \approx 1$$

y despreciando los términos cuadráticos se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c k_x A_x \frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c k_y A_y \frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c k_z A_z \frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z +$$
$$B^o \mu q_{sc} = \frac{V_b \mu \phi c}{\alpha_c}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (3.31)$$

3.31 Ecuación para flujo monofásico de un líquido poco compresible en un medio heterogéneo y anisótropo

Para un medio homogéneo e isótropo la ecuación puede simplificarse

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{B^o \mu q_{sc}}{\beta_c k V_b} = \frac{\mu \phi c}{\beta_c \alpha_c k}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (3.32)$$

Y si no existen fuentes o sumideros externos

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\mu \phi c}{\beta_c \alpha_c k}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (3.33)$$

La ecuación de flujo para fluidos poco compresibles a diferencia de la ecuación para fluidos incompresibles describen un problema dependiente del tiempo de modo que la solución de la ecuación (3.33) determina una presión que es función de las variables independientes x,y,z y t.

3.4.3 Ecuación de flujo para fluido compresible

Para el flujo de gas es imposible asumir una compresibilidad y viscosidad constante. Por lo tanto la ecuación de estado del gas real es usada para describir la variación de la densidad del gas con la presión.
Partiendo de la ecuación (3.14) y aplicando las siguientes relaciones

$$q_{mg} = \alpha_c q_g \, \rho_g \qquad (3.34)$$
$$\rho_g = \rho_{gsc} / B_g \alpha_c \qquad (3.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c \frac{\rho_{gsc} k_x A_x}{\alpha_c \mu_g B_g}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c \frac{\rho_{gsc} k_y A_y}{\alpha_c \mu_g B_g}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c \frac{\rho_{gsc} k_z A_z}{\alpha_c \mu_g B_g}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z +$$
$$\frac{q_{gsc}\rho_{gsc}}{\alpha_c} = \frac{V_b}{\alpha_c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi \rho_{gsc}}{\alpha_c B_g}\right) \qquad (3.36)$$

Despreciando efectos gravitatorios y dividiendo la ecuación por ρ_{gsc}/α_c

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_g B_g}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu_g B_g}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c \frac{k_z A_z}{\mu_g B_g}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z+$$
$$q_{gsc}=\frac{V_b}{\alpha_c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_g}\right) \quad (3.37)$$

Asumiendo que la porosidad es independiente de la presión y sustituyendo Bg

$$B_g=\frac{p_{sc}TZ}{\alpha_c T_{sc}\, p} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_g B_g}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu_g B_g}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c \frac{k_z A_z}{\mu_g B_g}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z+$$
$$q_{gsc}=\frac{V_b\phi T_{sc}}{p_{sc}T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{Z}\right) \quad (3.39)$$

La ecuación (3.39) es una EDP no lineal y sólo puede ser resuelta numéricamente. La no linealidad reside en la fuerte dependencia de μ_g, B_g,y Z con la presión que es la variable dependiente.

Quantity	Symbol	System of Units		Conversion Factor*
		Customary Unit	Metric Unit	
Length	*x,y,z,r*	ft	m	0.3048
Area	*A*	ft^2	m^2	0.09290304
Permeability	*k*	darcy	μm^2	0.9869233
Phase viscosity	μ	cp	Pa.s	0.001
Gas FVF	*Bg*	RB/scf**	m^3/std m^3**	5.5519314
Liquid **FVF**	*Bo, Bw*	RB/STB**	m^3/std m^3	1.0
Solution-gas/oil ratio	*Rs*	scf/STB	std m^3/std m^3	0.1801175
Pressure	Φ,p	psia	kPa	6.894757
Pressure gradient	$\vec{\nabla}\Phi,\vec{\nabla}p$	psi/ft	KPa/m	*22.62059*
Phase gravity	γ	psi/ft	KPa/m	*22.62059*
Gas flow rate	q_{sc}, q_{gsc}	scf/D	std m^3/d	0.02863640
Liquid flow rate	q_{sc},q_{osc},q_{wsc}	STB/D	std m^3/d	0.1589873
Volumetric velocity	*u, q/A*	RB/(D-ft^2)	m^3/(d.m^3)	1.7103717
Gridblock bulk volume	V_b	ft^3	m^3	0.02831685
Phase density	ρ	Ibm/ft^3	kg/m^3	16.01846
Gravitational acceleration	*9*	32.174 ft/s^2	9.8066352 m/s^2	0.3048
Compressibility	*c*	psi^{-1}	kPa^{-1}	*0.1450377*
Absolute temperature	*T*	ºR	K	0.55555556
Relative permeability	k_r	fraction	fraction	1.0
Porosity	ϕ	fraction	fraction	1.0
Phase saturation	S	fraction	fraction	1.0
Compressibility factor	*Z*	dimensionless	dimensionless	1.0

Time	t	day	day	1.0
Angle	θ	rad	rad	1.0
Transmissibility conversion factor	β_c	1.127	$86.4x10^{-6}$	-
Gravity conversion factor	γ_c	$0.21584x10^{-3}$	10^{-3}	-
Volume conversion factor	α_c	5.614583	1	-

'Mutiply customary unit by conversion factor to obtain metric unit
"STB and scf are measured at 60°F and 14.696 psia; std m^3 is measured at 15°C and 100 kPa.

Tabla 3.1

3.5 Condiciones iniciales y de frontera

La ecuación (3.40) representa el flujo de una sola fase, fluido y medio poroso 3D incompresible, homogéneo e isotrópo.
(Ec. 3.40 representa un fenómeno de estado estacionario)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0 \quad (3.40)$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones: Par elegir una solución particular de las infinitas, se deben especificar condiciones adicionales en la frontera del dominio bajo consideración. Estas condiciones son llamadas condiciones de frontera.
El problema de encontrar la solución a la ecuación (3.40) que satisface las condiciones de frontera se llama *problema de valor de frontera*.
La siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{\phi\mu c}{\beta_c\alpha_c k}\ \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.41)$$

representa un problema de estado no estacionario, y describe un fenómeno dependiente del tiempo.
Las condiciones de frontera deben ser satisfechas para

$$t \geq 0$$

En el caso de la ecuación (3.41), las condiciones iniciales deben también ser especificadas en cada punto del dominio en el instante particular de tiempo en que el proceso físico comienza, t=0.
El problema de encontrar la solución de la ecuación (3.41) que satisface las condiciones específicas iniciales y de frontera se llama *problema de valor inicial y de frontera.*
Consideremos la figura 3.5.

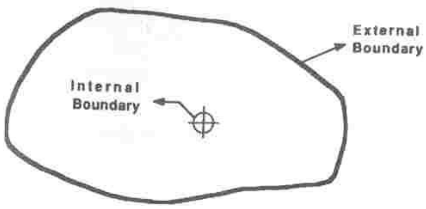

Figura 3.5

El dominio del flujo descripto por la ecuación 3.41 es el área entre los límites del reservorio y del wellbore. Por lo tanto, podemos agrupar las fronteras bajo dos denominaciones generales: externas, que son los límites físicos del dominio de flujo e internas que están referidas al pozo.
Ahora veremos las distintas condiciones de frontera que encontramos en los problemas de flujos en medios porosos.

3.5.1 Presión especificada en la frontera. Problema de Dirichlet

En las fronteras internas esta especificación implica que existe un pozo inyectando o produciendo con presión constante frente a la formación.
Por otro lado en las fronteras externas, tal especificación implica que la presión en los límites permanece constante.
Este tipo de condición de frontera se da cuando el reservorio está influenciado por la presencia de una acuífera, de modo que la presión en la interfase del reservorio y la acuífera permanece constante.

3.5.2 Gradiente de Presión especificado en la frontera. Problema de Neumann

Especificando un gradiente de presión normal a la frontera se determina el flujo (o velocidad) normal a la frontera.

$$q = -\frac{2\pi\beta_c r_w kh}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=rw} \quad (3.42)$$

La ecuación puede ordenarse como

$$\frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=rw} = -\frac{q\mu}{2\pi\beta_c r_w kh} \quad (3.43)$$

q= caudal frente a la formación (sandface)

La especificación de un gradiente de presión en la frontera externa resulta en la especificación de un flujo normal a la frontera.
Un caso especial que se encuentra en la ingeniería de reservorios es cuando no existe flujo a través de la frontera. Esto implica que el gradiente de presión es cero. El reservorio es cerrado.

$$\frac{\partial p_o}{\partial n} = \frac{\partial p_g}{\partial n} = \frac{\partial p_w}{\partial n} = 0 \quad (3.44)$$

n=dirección normal al límite del reservorio.
El problema de resolver la distribución de presiones en un dominio con la especificación de un gradiente de presión a través de sus límites se conoce como Problema de Neumann.

3.5.3 Gradiente de Presión y Presión especificados en la frontera.

A veces el potencial y su derivada se especifican sobre distintos segmentos de los límites. En este caso se habla de una condición de frontera mixta.

En problemas dependientes del tiempo (estado no estacionario), las condiciones de frontera deben ser especificadas para todo

$$t \geq 0$$

Para completar la descripción matemática del problema, debemos especificar las condiciones iniciales para las variables dependientes del tiempo. Se deben especificar las presiones en cada punto al tiempo inicial.

La naturaleza y magnitud de las condiciones iniciales y de frontera están gobernadas por el problema físico con que se cuenta.
Una EDP con apropiadas condiciones de frontera e iniciales definirá un problema bien planteado si la solución existe y es única.

Bibliografía

-Basic Applied Reservoir Simulation. Ertekin, Abou Kassem, King. SPE TEXTBOOK SERIES VOL 7(2001)

-Petroleum Reservoir Simulation. Aziz y Settari Applied Science Publishers (1979)

-“Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation” . Peaceman Elsevier (1977)