4. APROXIMACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS A LAS ECUACIONES DE FLUJO LINEAL

4.1 Introducción

Las ecuaciones de flujo a través del medio poroso son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden con respecto al espacio y de primer orden con respecto al tiempo.En general, estas ecuaciones no pueden ser resueltas analíticamente (de manera exacta) debido a su naturaleza no lineal.Una ecuación diferencial es lineal cuando los coeficientes de la ecuación son constantes o funciones de las variables independientes. Una ecuación diferencial es no lineal cuando no cumple con esta condición. La **linealización** es el proceso de transformar una ecuación no lineal en una ecuación lineal. Se deben utilizar técnicas numéricas (aproximaciones) para resolver estas ecuaciones de flujo.

El método más ampliamente usado en la industria del petróleo es el método de las diferencias finitas.

El método de diferencias finitas se implementa imponiendo un mallado o grillado al reservorio a ser modelado. Este mallado o grillado se utiliza para aproximar las derivadas con respecto al espacio en la ecuación continua.

Estas aproximaciones se obtienen truncando la expansión en series de Taylor de las variables desconocidas (usualmente la presión para problemas de flujo monofásico y presión y saturación para problemas de dos fases) en las ecuaciones. Un proceso similar se realiza en el dominio del tiempo.

En simulación de reservorios se utilizan generalmente dos tipos de grillas: grilla centrada en el bloque y puntos distribuidos en la grilla.

La implementación de la aproximación en diferencias finitas resulta en ecuaciones algebraicas llamadas ecuaciones en diferencias finitas.

Debe destacarse que las soluciones de las ecuaciones en diferencias finitas puede ser obtenida sólo en los puntos discretos definidos por el sistema de grillado.

En otras palabras las presiones calculadas con un simulador de reservorios son conocidas sólo en los puntos (gridpoints) seleccionados dentro del reservorio. En contraste con la solución de las ecuaciones continuas, las cuales pueden ser obtenidas en todos los puntos del reservorio.

La discretización es el proceso de convertir las ecuaciones continuas en ecuaciones en diferencias finitas.

Las ecuaciones que describen el flujo de fluidos a través de un medio poroso en estado no estacionario contienen una derivada segunda de la presión respecto al espacio y una derivada primera de la presión respecto al tiempo.

La derivada segunda en la ecuación de flujo es generalmente aproximada aplicando diferencias centrales debido a la naturaleza de mayor orden de la aproximación. La derivada primera es generalmente aproximada con la derivada hacia atrás.

Estas elecciones están establecidas por la estabilidad del sistema final de ecuaciones. La estabilidad es una propiedad que describe la capacidad de un error pequeño de propagarse y crecer con los cálculos subsiguientes.

4.2 Grillados

En simulación de reservorios los más usados son:
a) Grilla centrada en el bloque
b) Puntos distribuidos en la grilla
En el sistema de grilla centrada en el bloque cada celda de dimensiones conocidas se superpone al reservorio. Para un sistema de coordenadas cartesianas los nodos (gridpoints) se definen en el centro de las celdas.
En el sistema de puntos distribuidos los gridpoints se distribuyen en el reservorio antes que los límites de las celdas se definan. Para una grilla rectangular, el límite de la celda se coloca en la mitad entre dos puntos adyacentes.
El objetivo del grillado es particionar el reservorio en bloques al que se le puedan asignar las propiedades representativas de la roca.
Sin embargo estas celdas debieran ser lo suficientemente pequeñas para describir la naturaleza heterogénea del reservorio y permitir que las propiedades promediadas representen el flujo en el reservorio adecuadamente.
Esto no siempre es posible ya que el tiempo en simulación está directamente asociado al número de celdas usado en el estudio.

4.3 Geometría vertical

Celdas Estratigráficas: siguen la estratigrafía del reservorio. Se usan para incorporar información geológica al modelo de reservorio.

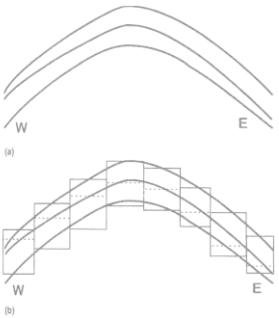

Figura 4.1

Celdas proporcionales: mantienen la relación entre los espesores de capa constantes.

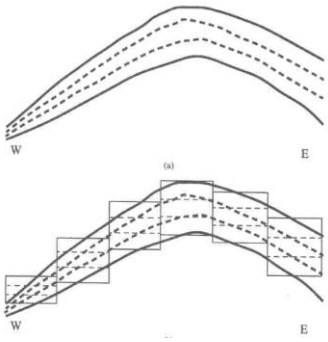

Figura 4.2

Modelos de tanque:

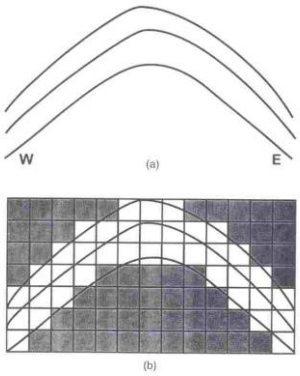

Figura 4.3

4.4 Aproximación en diferencias finitas de la derivada espacial

La ecuación para flujo poco compresible monofásico es:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x + q_{lsc} = \frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l^{\,o}}\frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l}\frac{\partial p}{\partial x}\right)_i \approx \frac{1}{\Delta x_i}\left[\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l}\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+1/2} - \left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l}\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i-1/2}\right] \quad (4.2)$$

A pesar que la igualdad en la ecuación 4.2 es aproximada las ecuaciones siguientes usan el signo igual de modo que el desarrollo sea consistente con los métodos computacionales.

Usando la ecuación 4.2 para aproximar la derivada espacial en el punto i y sustituyendo el resultado en la ecuación 4.1 resulta

$$\frac{1}{\Delta x_i}\left[\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l}\right)_{i+1/2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+1/2} - \left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l}\right)_{i-1/2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i-1/2}\right]\Delta x_i + q_{lsci} = \left(\frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l^{\,o}}\frac{\partial p}{\partial t}\right)_i \quad (4.3)$$

Usamos diferencias centrales para aproximar $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i-1/2}$ y $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+1/2}$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i-1/2} = \frac{p_i - p_{i-1}}{x_{i-1} - x_i} = \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x_{i-1/2}} \qquad (4.4)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+1/2} = \frac{p_{i+1} - p_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x_{i+1/2}} \qquad (4.5)$$

Sustituyendo (4.4) y (4.5) en ecuación (4.3) queda:

$$\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l \Delta x}\right)_{i+1/2} (p_{i+1} - p_i) - \left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l \Delta x}\right)_{i-1/2} (p_i - p_{i-1}) + q_{lsci} = \left(\frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l{}^o}\right)_i \frac{\partial p_i}{\partial t} \quad (4.6)$$

o en términos de trasmisibilidad

$$T_{l\,xi+1/2}(p_{i+1} - p_i) - T_{l\,xi-1/2}(p_i - p_{i-1}) + q_{lsci} = \left(\frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l{}^o}\right)_i \frac{\partial p_i}{\partial t} \quad (4.7)$$

4.5 Aproximación en diferencias finitas de la derivada del tiempo

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} \approx \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \qquad (4.8)$$

Reemplazando (4.8) en (4.7) resulta

$$\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l \Delta x}\right)_{i+1/2} \left(p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}\right) - \left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l \Delta x}\right)_{i-1/2} \left(p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}\right) + q_{lsci} = \left(\frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l{}^o \Delta t}\right)_i \left(p_i^{n+1} - p_i^n\right) \quad (4.9)$$

O en términos de trasmisibilidad

$$T^n_{l_{xi+1/2}} \left(p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}\right) - T^n_{l_{xi-1/2}} \left(p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}\right) + q_{lsci} = \left(\frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l{}^o \Delta t}\right)_i \left(p_i^{n+1} - p_i^n\right) \quad (4.10)$$

Las presiones en el lado izquierdo de las ecuaciones están evaluadas en el nuevo nivel de tiempo n+1. Las trasmisibilidades las evaluamos en el nivel de tiempo anterior.

Si las presiones se evalúan en el nivel de tiempo anterior n se tiene:

$$\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l \Delta x}\right)^n_{i+1/2} \left(p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}\right) - \left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu_l B_l \Delta x}\right)^n_{i-1/2} \left(p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}\right) + q_{lsci} = \left(\frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l^{\,o} \Delta t}\right)_i \left(p_i^{n+1} - p_i^n\right) \quad (4.11)$$

O en términos de trasmisibilidades, si elegimos evaluar las mismas en el nivel de tiempo anterior

$$T^n_{lxi+1/2} \left(p_{i+1}^n - p_i^n\right) - T^n_{lxi-1/2} \left(p_i^n - p_{i-1}^n\right) + q_{lsci} = \left(\frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l^{\,o} \Delta t}\right)_i \left(p_i^{n+1} - p_i^n\right) \quad (4.12)$$

4.6 Implementación de condiciones iniciales y de frontera

4.6.1 Condiciones iniciales:

El objetivo de la simulación de reservorios es predecir la distribución de presiones y caudales de producción a través del tiempo.
Esto se hace mediante el uso de aproximaciones en diferencias finitas para avanzar en la simulación desde un nivel de tiempo conocido (tiempo en que todas las variables dependientes son conocidas, n) hasta un nivel desconocido (tiempo en el cual las variables serán predichas, n+1)
En las ecuaciones en diferencias finitas, el término p^n representa las presiones en los nodos al nivel de tiempo conocido. El proceso para avanzar en la simulación en el tiempo comienza asignando valores conocidos de presión al nivel de tiempo n en las ecuaciones en diferencias finitas. Las ecuaciones pueden ser entonces resueltas para las presiones p^{n+1}. Una vez determinados los valores de p^{n+1} se usan como las presiones conocidas para el próximo salto de tiempo.

4.6.2 Condiciones de frontera

4.6.2.1 Condición de frontera externa

Está vinculada a los límites del reservorio. Se consideran dos tipos importantes de fronteras en simulación de reservorios: cuando se especifica el gradiente de presión (incluye los límites con condición no flujo) y cuando se especifica la presión.
La implementación de las condiciones de frontera depende del grillado usado, grilla centrada en el bloque o puntos distribuidos en la grilla usado en la discretización.

4.6.2.1.1 Gradiente de presión especificado (Neumann)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = C \quad (4.13)$$

Esta ecuación puede usarse para representar una condición de no flujo haciendo C=0
La ecuación (4.13) debe discretizarse para incorporarse en el simulador. La discretización depende del grillado usado.
La figura 4.4 muestra un sistema centrado en el bloque 1D, donde se especifican las condiciones de borde en los límites de la primer y última celda.

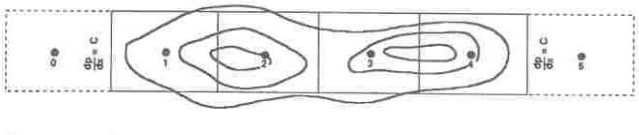

Figura 4.4

Las ecuaciones en diferencias finitas que representan el sistema de la figura son:

Celda 1

$$T^n_{l_{1+1/2}}\left(p_2^{n+1} - p_1^{n+1}\right) - T^n_{l_{1-1/2}}\left(p_1^{n+1} - p_0^{n+1}\right) + q_{lsc1} = \left(\frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l{}^o \Delta t}\right)_1 \left(p_1^{n+1} - p_1^n\right) \quad (4.14)$$

Celda 2

$$T^n_{l_{2+1/2}}\left(p_3^{n+1} - p_2^{n+1}\right) - T^n_{l_{2-1/2}}\left(p_2^{n+1} - p_1^{n+1}\right) + q_{lsc2} = \left(\frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l{}^o \Delta t}\right)_2 \left(p_2^{n+1} - p_2^n\right) \quad (4.15)$$

Celda 3

$$T^{n}_{l_{3+1/2}}\left(p_4^{n+1}-p_3^{n+1}\right)-T^{n}_{l_{3-1/2}}\left(p_3^{n+1}-p_2^{n+1}\right)+q_{lsc3}=\left(\frac{V_b\phi c_l}{\alpha_c B_l{}^{o}\Delta t}\right)_3\left(p_3^{n+1}-p_3^{n}\right) \quad (4.16)$$

Celda 4

$$T^{n}_{l_{4+1/2}}\left(p_5^{n+1}-p_4^{n+1}\right)-T^{n}_{l_{4-1/2}}\left(p_4^{n+1}-p_3^{n+1}\right)+q_{lsc4}=\left(\frac{V_b\phi c_l}{\alpha_c B_l{}^{o}\Delta t}\right)_4\left(p_4^{n+1}-p_4^{n}\right) \quad (4.17)$$

Existen más incógnitas que ecuaciones. Por lo tanto incorporaremos la ecuación (4.13) aplicando aproximación por diferencias centrales en la frontera izquierda ($x=x_{1-1/2}$)y derecha ($x=x_{4+1/2}$)

$$\frac{\partial p}{\partial x}\approx\frac{p_1-p_0}{x_1-x_0}=C \quad (4.18a)$$

o

$$p_0=p_1-C(x_1-x_0) \quad (4.18b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\approx\frac{p_5-p_4}{x_5-x_4}=C \quad (4.19a)$$

o

$$p_5=p_4+C(x_5-x_4) \quad (4.19b)$$

Estas ecuaciones se usan para completar el sistema de ecuaciones en el simulador para el reservorio de la figura.

Si existe una condición de no flujo (C=0) $p_0=p_1$ y $p_4=p_5$

Una alternativa para modelar una condición de no flujo es asignar el valor cero a las trasmisibilidades en las fronteras

$$T^n_{lx1-1/2} = 0 \quad (4.20)$$

y

$$T^n_{lx4+1/2} = 0 \quad (4.21)$$

Si el grillado es de puntos distribuidos en la grilla como se ve la figura 4.5

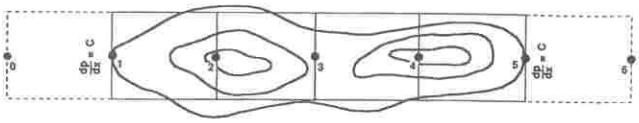

Figura 4.5

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_2 - p_0}{x_2 - x_0} = C \quad (4.22a)$$

o

$$p_0 = p_2 - C(x_2 - x_0) \quad (4.22b)$$

Similarmente

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_6 - p_4}{x_6 - x_4} = C \quad (4.23a)$$

o

$$p_6 = p_4 + C(x_6 - x_4) \quad (4.23b)$$

Si C=0, $p_2=p_0$ y $p_6=p_4$

También podemos usar la trasmisibilidad para modelar la condición de no flujo.

$$T^n_{lx1-1/2} = 0 \quad (4.24)$$

y

$$T^n_{lx5+1/2} = 0 \quad (4.25)$$

4.6.2.1.2 Valor de presión especificado (Dirichlet)

$$p_1 = C \quad (4.26)$$

Si el grillado es centrado en el bloque los valores en el límite deben extrapolarse a partir del punto más próximo.
Para la figura 4.6 una aproximación escrita para la frontera izquierda sería

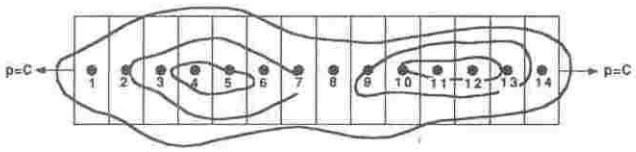

Figura 4.6

$$(1+\Omega)\,p_1 - \Omega p_2 = C \quad (4.27a)$$

$$donde \quad \Omega = \Delta x_1 /(\Delta x_1 + \Delta x_2)$$

$$Si \quad \Delta x_1 = \Delta x_2$$

$$\frac{3}{2}p_1 - \frac{1}{2}p_2 = C \quad (4.27b)$$

Esta ecuación es la forma más común de aproximación que aparece en la literatura.
Si el grillado es de puntos distribuidos, figura 4.7, no es necesario hacer ninguna extrapolación

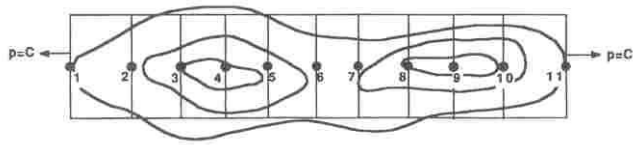

Figura 4.7

4.6.2.2 Condición de frontera interna

Están vinculadas a la presencia de pozos, rocas impermeables y fallas.
La figura muestra una grilla que contiene un pozo. Generalmente las dimensiones del wellbore son pequeñas comparadas con las dimensiones de las celdas.

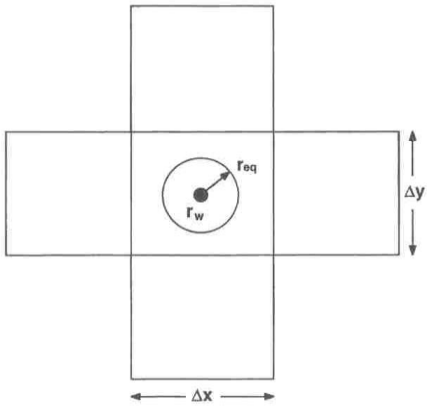

Figura 4.8

El flujo en el wellbore puede estimarse como:

$$q_{lsc_{i,j,k}} = \frac{-2\pi\beta_c k_H h}{\left[\log_e(r_{eq}/r_w)+s\right]}\frac{1}{\mu_l B_l}\left(p_{i,j,k} - p_{wf}\right) \quad (4.28)$$

donde

$$req = 0.28\frac{\left[\left(k_y/k_x\right)^{1/2}(\Delta x)^2 + (kx/ky)^{1/2}(\Delta y)^2\right]^{1/2}}{(ky/kx)^{1/4} + (kx/ky)^{1/4}} \quad (4.29)$$

$$y \quad k_H = \sqrt{k_x k_y} \qquad (4.30)$$

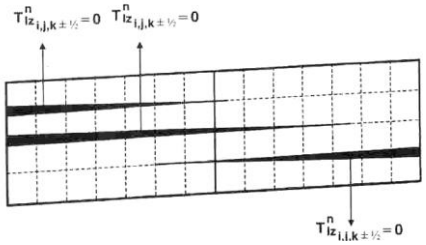

Figura 4.9 Sección transversal mostrando barreras al flujo vertical

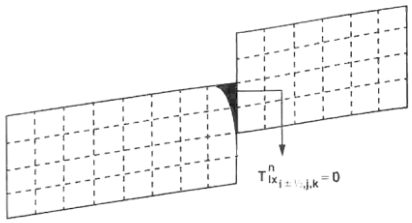

Figura 4.10 Sección transversal mostrando una falla

4.7 Formulación Explícita e Implícita en diferencias finitas

4.7.1 Formulación explícita

$$p_i^{n+1} = p_i^n + \left(\frac{\alpha_c B_l{}^o \Delta t}{V_b \phi c_l}\right)_i q_{lsci} + \left(\frac{\alpha_c B_l{}^o \Delta t}{V_b \phi c_l}\right)_i \times \left[T^n_{l_{xi+1/2}} p^n_{i+1} - \left(T^n_{l_{xi+1/2}} + T^n_{l_{xi-1/2}}\right)p^n_i + T^n_{l_{xi-1/2}} p^n_{i-1}\right] (4.31)$$

Todos los términos de la derecha son conocidos porque todas las presiones que aparecen de este lado están calculadas en el nivel de tiempo anterior n.

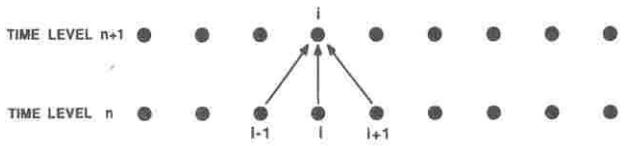

Figura 4.11Representación esquemática de contribuciones de las celdas y sus niveles de tiempo en la formulación explícita para la celda i

4.7.2 Formulación implícita

Tomamos como ejemplo la ecuación de flujo para fluido poco compresible

$$T^{n}_{l_{xi+1/2}} p^{n+1}_{i+1} - \left[\left(\frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l{}^{o} \Delta t} \right)_i + T^{n}_{l_{xi+1/2}} + T^{n}_{l_{xi-1/2}} \right] p^{n+1}_{i} + T^{n}_{l_{xi-1/2}} p^{n+1}_{i-1} = - \left[q_{lsci} + \left(\frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l{}^{o} \Delta t} \right)_i p^{n}_{i} \right] \quad (4.32)$$

La ecuación (4.32) debe ser escrita para todas las celdas y resolver las incógnitas simultáneamente

Bibliografía

-Basic Applied Reservoir Simulation. Ertekin, Abou Kassem, King. SPE TEXTBOOK SERIES VOL 7(2001)

-Petroleum Reservoir Simulation. Aziz y Settari Applied Science Publishers (1979)

-“Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation” . Peaceman Elsevier (1977)