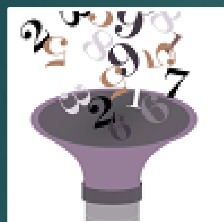
SOLUCION DE LAS ECUACIONES DEL SIMULADOR



Entrada

- Presión del petróleo
- Presión del agua
- Presión del gas
- Saturación de petróleo
- Saturación del gas
- Saturación del agua

Salida

- Producción de petróleo
- Producción de agua
- Producción de gas

Solución de las ecuaciones del simulador

Método IMPES

(Implicito en presiones-explicito en saturaciones)

Métodos totalmente implícitos

(implícito en presiones-implícito en saturaciones)

METODO IMPES

$$A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_o}{\mu_o B_o}\frac{\partial \Phi_o}{\partial x}\right) + q_o = V_R \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) \quad (1)$$

$$A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_w}{\mu_w B_w}\frac{\partial \Phi_w}{\partial x}\right) + q_w = V_R \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) \quad (2)$$

$$A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{k_g}{\mu_g B_g} + \frac{R_{so} k_o}{\mu_o B_o} + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w}\right)\frac{\partial \Phi_g}{\partial x}\right) + q_g = V_R \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w}\right)\right) \quad (3)$$

METODO IMPES

$$\Phi_o = P_o + \rho_o gh \quad (4)$$

$$\Phi_w = P_w + \rho_w gh \quad (5)$$

$$\Phi_g = P_g + \rho_g gh \quad (6)$$

$$P_{cw} = P_o - P_w \quad (7)$$

$$P_{cg} = P_g - P_o \quad (8)$$

$$A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_o \frac{\partial P_o}{\partial x}\right) + A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_g \frac{\partial P_{cg}}{\partial x} - \lambda_w \frac{\partial P_{cw}}{\partial x}\right) +$$

$$A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_g \frac{\partial(\rho_g gh)}{\partial x} + \lambda_o \frac{\partial(\rho_o gh)}{\partial x} + \lambda_w \frac{\partial(\rho_w gh)}{\partial x}\right) = \beta_1 \frac{\partial P_o}{\partial t} + \beta_{2}\quad (9)$$

LA ECUACION EN DIFERENCIAS FINITAS METODO IMPES

$$A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_o^n \frac{\partial P_o{}^{n+1}}{\partial x} \right) + A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_g \frac{\partial P_{cg}}{\partial x} - \lambda_w \frac{\partial P_{cw}}{\partial x} \right)^n +$$

$$A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_g^n \frac{\partial(\rho_g gh)}{\partial x} + \lambda_o^n \frac{\partial(\rho_o gh)}{\partial x} + \lambda_w^n \frac{\partial(\rho_w gh)}{\partial x} \right) = \beta_1^n \frac{\partial P_o^{n+1}}{\partial t} + \beta_2^n \quad (10)$$

LA ECUACION EN DIFERENCIAS FINITAS-METODO IMPES

$$A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_o^n \frac{\partial P_o^{\,n+1}}{\partial x}\right) = A_x \left[\frac{\lambda_{o\,i+1/2}\left(\dfrac{P_{o\,i+1} - P_{o\,i}}{\left(\dfrac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2}\right)}\right) - \lambda_{o\,i-1/2}\left(\dfrac{P_{o\,i} - P_{o\,i-1}}{\left(\dfrac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{2}\right)}\right)}{\Delta x_i} \right] \quad (11)$$

$$\frac{\partial P_{o_i}}{\partial t} = \frac{P_{o_i}^{n+1} - P_{o_i}^{n}}{\Delta t^n} \quad (13)$$

$$\chi_{i+1/2}\left(P_{o\,i+1} - P_{o\,i}\right)^{n+1} - \chi_{i-1/2}\left(P_{o\,i} - P_{o\,i-1}\right)^{n+1} = \frac{\partial P_{o_i}^{n+1}}{\partial t} + C^n \quad (12)$$

LA ECUACION EN DIFERENCIAS FINITAS-METODO IMPES

$$\chi_{i+1/2} P_{o_{i+1}}^{n+1} - \left(\chi_{i+1/2} + \chi_{i-1/2} + \frac{1}{\Delta t^n} \right) P_{o_i}^{n+1} + \chi_{i-1/2} P_{o_{i-1}}^{n+1} = \frac{P_{o_i}^n}{\Delta t^n} + C^n \quad (14)$$

$$\frac{\left(\phi \frac{S_o}{B_o} \right)^{n+1} - \left(\phi \frac{S_o}{B_o} \right)^n}{\Delta t} = \frac{\partial \left(\phi \frac{S_o}{B_o} \right)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_o}{\mu_o B_o} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (15)$$

$$\left(\phi \frac{S_o}{B_o} \right)^{n+1} = \left(\phi \frac{S_o}{B_o} \right)^n + \frac{\Delta t}{\phi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_o}{\mu_o B_o} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] = S_o^n + \sum term \quad (16)$$

SOLUCION SIMULTANEA
METODO IMPLICITO EN PRESIONES-IMPLICITO EN SATURACIONES

- **Consiste en la solución simultánea de las ecuaciones diferenciales para cada fase y así obtener la presión en cada una de ellas.**

- **La saturación se calcula implícitamente usando las relaciones de presión capilar**

- **Se mostrará brevemente en qué consiste el método considerando sólo dos fases: agua y petróleo en una dimensión**

SOLUCION SIMULTANEA
METODO IMPLICITO EN PRESIONES-IMPLICITO EN SATURACIONES

$$A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_o}{\mu_o B_o} \frac{\partial \Phi_o}{\partial x} \right) + q_o = V_R \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) \quad (1)$$

$$A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_w}{\mu_w B_w} \frac{\partial \Phi_w}{\partial x} \right) + q_w = V_R \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) \quad (2)$$

$$\Phi_o = P_o + \rho_o g h \quad (4)$$

$$\Phi_w = P_w + \rho_w g h \quad (5)$$

SOLUCION SIMULTANEA METODO IMPLICITO EN PRESIONES-IMPLICITO EN SATURACIONES

$$S_o + S_w = 1 \qquad (17)$$

$$\frac{\partial S_o}{\partial t} = \frac{\partial (1 - S_o)}{\partial t} = -\frac{\partial S_w}{\partial t} \qquad (18)$$

Teniendo en cuenta la expresión de presión capilar:

$$P_c = \Phi_o - \Phi_w - \Delta\rho g h \qquad (19)$$

Expresamos la variación de saturación respecto a la presión capilar :

$$\frac{\partial S_o}{\partial t} = \frac{\partial S_o}{\partial P_c}\frac{\partial P_c}{\partial t} \qquad (20)$$

$$\frac{\partial (\Delta\rho g h)}{\partial t} = 0$$

SOLUCION SIMULTANEA
METODO IMPLICITO EN PRESIONES-IMPLICITO EN SATURACIONES

$$\frac{\partial S_o}{\partial t} = S_o^{'}\left(\frac{\partial \Phi_o}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_w}{\partial t}\right) \quad (21)$$

reemplazando en (1) *y* (2)

$$A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_o}{\mu_o B_o}\frac{\partial \Phi_o}{\partial x}\right) + q_o = V_R \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) \quad (1)$$

$$A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_w}{\mu_w B_w}\frac{\partial \Phi_w}{\partial x}\right) + q_w = V_R \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) \quad (2)$$

SOLUCION SIMULTANEA METODO IMPLICITO EN PRESIONES-IMPLICITO EN SATURACIONES

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{k_o}{\mu_o B_o}\frac{\partial \Phi_o}{\partial x}\right) = -\phi S_o^{'}\left(\frac{\partial \Phi_o}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_w}{\partial t}\right) \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{k_w}{\mu_w B_w}\frac{\partial \Phi_w}{\partial x}\right) = -\phi S_w^{'}\left(\frac{\partial \Phi_o}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_w}{\partial t}\right) \quad (22)$$

$$\frac{\partial S_o}{\partial P_c} = S_o^{'} = \frac{S^{n+1}}{\Phi_o^{n+1}} - \frac{S^n}{\Phi_o^n} \quad (23)$$

Expandimos las ecuaciones (21) a (23) en diferencias finitas para generar el modelo en los puntos discretos

SOLUCION SIMULTANEA METODO IMPLICITO EN PRESIONES-IMPLICITO EN SATURACIONES

Para la fase petróleo en la celda i la formulación totalmente implícita es:

$$\frac{1}{\Delta x}=\left[\left(\frac{ko}{\mu o}\right)_{i+1/2}\left(\frac{\Phi_{o_{i+1}}^{n+1}-\Phi_{o_i}^{n+1}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{ko}{\mu o}\right)_{i-1/2}\left(\frac{\Phi_{o_i}^{n+1}-\Phi_{o_{i-1}}^{n+1}}{\Delta x}\right)\right]=$$

$$=\frac{\phi S_o^{'}}{\Delta t}\left[\left(\Phi_{oi}^{n+1}-\Phi_{oi}^{n}\right)-\left(\Phi_{wi}^{n+1}-\Phi_{wi}^{n}\right)\right] \quad (24)$$

$$e\Phi_{o_{i-1}}^{n+1}+f\Phi_{o_i}^{n+1}+g\Phi_{o_{i+1}}^{n+1}+h\Phi_{w_i}^{n+1}=D_{o_i} \quad (25)$$

SOLUCION SIMULTANEA METODO IMPLICITO EN PRESIONES-IMPLICITO EN SATURACIONES

Para la fase acuosa en la celda i la formulación totalmente implícita es:

$$a\Phi_{w_{i-1}}^{n+1} + b\Phi_{w_i}^{n+1} + c\Phi_{w_{i+1}}^{n+1} + d\Phi_{o_i}^{n+1} = D_{w_i} \qquad (26)$$

Las ecuaciones (25) y (26) se escriben para cada celda en la grilla generando un set de ecuaciones simultáneas donde los potenciales de petróleo y agua al nivel de tiempo considerado son las únicas incógnitas

SOLUCION SIMULTANEA METODO IMPLICITO EN PRESIONES- IMPLICITO EN SATURACIONES

Sea un sistema de tres celdas a los que se aplica (25) y (26)

Celda 1

$$e_1\Phi_{o_0}^{n+1} + f_1\Phi_{o_1}^{n+1} + g_1\Phi_{o_2}^{n+1} + h_1\Phi_{w_1}^{n+1} = D_{o_1}$$

$$a_1\Phi_{w_0}^{n+1} + b_1\Phi_{w_1}^{n+1} + c_1\Phi_{w_2}^{n+1} + d_1\Phi_{o_1}^{n+1} = D_{w_1}$$

Celda 2

$$e_2\Phi_{o_2}^{n+1} + f_2\Phi_{o_2}^{n+1} + g_2\Phi_{o_3}^{n+1} + h_2\Phi_{w_2}^{n+1} = D_{o_2}$$

$$a_2\Phi_{w_1}^{n+1} + b_2\Phi_{w_2}^{n+1} + c_2\Phi_{w_3}^{n+1} + d_2\Phi_{o_2}^{n+1} = D_{w_2}$$

Celda 3

$$e_3\Phi_{o_2}^{n+1} + f_3\Phi_{o_3}^{n+1} + g_3\Phi_{o_4}^{n+1} + h_3\Phi_{w_3}^{n+1} = D_{o_3}$$

$$a_3\Phi_{w_2}^{n+1} + b_3\Phi_{w_3}^{n+1} + c_3\Phi_{w_4}^{n+1} + d_3\Phi_{o_3}^{n+1} = D_{w_3}$$

SOLUCION SIMULTANEA METODO IMPLICITO EN PRESIONES-IMPLICITO EN SATURACIONES

$$\begin{bmatrix} b_1 & d_1 & c_1 & 0 & & \\ h_1 & f_1 & 0 & g_1 & & \\ a_2 & 0 & b_2 & d_2 & c_2 & 0 \\ 0 & e_2 & h_2 & f_2 & 0 & g_2 \\ & & a_3 & 0 & b_3 & d_3 \\ & & 0 & e_3 & h_3 & f_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Phi_{w_1} \\ \Phi_{o_1} \\ \Phi_{w_2} \\ \Phi_{o_2} \\ \Phi_{w_3} \\ \Phi_{o_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{w_1} \\ D_{o_1} \\ D_{w_2} \\ D_{o_2} \\ D_{w_3} \\ D_{o_3} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_o, \Phi_w$$

$$P_c = \Phi_o - \Phi_w - \Delta\rho g h \;\; \rightarrow S_w$$

CALCULO DE PERMEABILIDADES RELATIVAS

- **En un simulador de reservorios, el flujo se calcula entre los elementos o celdas adyacentes de la grilla.**
- **Este flujo es función principalmente de la movilidad λ y de ΔP.**

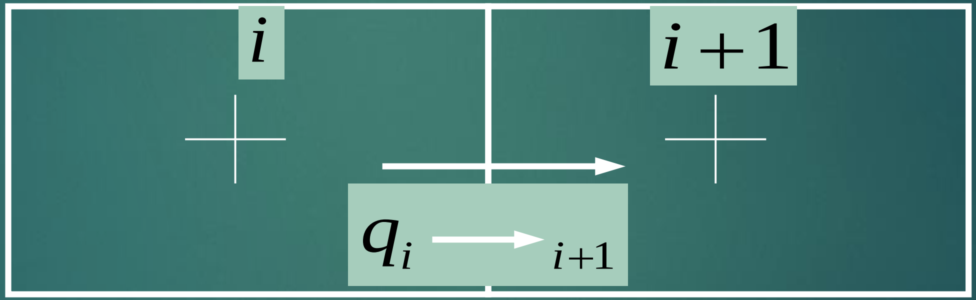
$$q_{1\to 2} = \frac{kk_{ro}(P_1 - P_2)}{\mu \Delta x} \quad (27)$$

$$q = \lambda \Delta P \quad (28)$$

$$\lambda, \Delta P \neq 0$$

CALCULO DE PERMEABILIDADES RELATIVAS

- **Consideremos dos celdas adyacentes i e i+1 y que el gradiente de presiones sea tal que $P_i > P_{i+1}$ donde a la celda i se la ubica aguas arriba y a la celda i+1 aguas abajo.**



¿cómo se calcula λ?

CALCULO DE PERMEABILIDADES RELATIVAS

En la literatura existen cuatro métodos:

- **Cálculo aguas arriba: La movilidad del fluido se basa en datos de permeabilidad y viscosidad calculados a partir de las saturaciones y presiones de la celda i**

$$q = \lambda_i (P_i - P_{i+1}) \quad (29)$$

- **Cálculo aguas abajo: La movilidad del fluido se basa en datos de permeabilidad y viscosidad calculados a partir de las saturaciones y presiones de la celda i+1 (no se usa)**

$$q = \lambda_{i+1} (P_i - P_{i+1}) \quad (30)$$

CALCULO DE PERMEABILIDADES RELATIVAS

- **Cálculo promedio: Se trata de un promedio pesado de las movilidades y las viscosidades entre las celdas i e i+1**

$$q = \left[w\lambda_i + (1-w)\lambda_{i+1} \right] \left(P_i - P_{i+1} \right) \qquad (31)$$

- **Cálculo armónico: En el promedio armónico se considera a las movilidades como una serie de resistencias,**

$$q = \frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{\lambda_i + \lambda_{i+1}} \left(P_i - P_{i+1} \right) \qquad (32)$$

MOVILIDAD AGUAS ABAJO

Si el flujo va desde i a i+1

$$P_i > P_{i+1}$$

Si se cumple que:

$$S_{oi+1} > S_{oc} \;\; y \;\; S_{oi} < S_{oc}$$

la celda i está por detrás del frente en un desplazamiento por agua.

La movilidad aguas abajo se calcula en S_{oi+1}

$$\lambda_{i+1} > 0$$

$$q = \lambda_{i+1}(P_i - P_{i+1})$$

MOVILIDAD AGUAS ARRIBA

- **La movilidad aguas arriba se calcula en S_{oi}**
- **Si Soi<Soc**

$$q = \lambda_i (P_i - P_{i+1}) \qquad (29)$$

$$\lambda_i = 0$$

$$q = 0$$

Las movilidades aguas arriba son las más confiables

PROMEDIO ARMONICO

Conduce a errores cuando hay cambios bruscos de saturación.

Por ejemplo:

$$P_i > P_{i+1}$$

$$kr_{oi} = 0.6$$

$$kr_{oi+1} = 0$$

$$para \quad Soi >>> Soi + 1$$

$$q = \frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{\lambda_i + \lambda_{i+1}} (P_i - P_{i+1}) \quad {}_{(32)} \rightarrow q = 0$$

Resultado incorrecto

PERMEABILIDADES RELATIVAS Y DISPERSION

- **Si bien el cálculo de movilidades aguas arriba conduce a obtener los resultados físicos, también conduce a una gran dispersión numérica de los frentes de flujo siendo muy sensible este problema a la orientación de las grillas.**

- **Para disminuir este problema Todd et al, sugirieron el esquema de dos puntos o de permeabilidades extrapoladas.** **(extrapolación lineal de kr usando dos puntos aguas arriba)**

PERMEABILIDADES RELATIVAS Y DISPERSION

$$y_{n+1} = y_n + \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_n \Delta x_n \qquad (33)$$

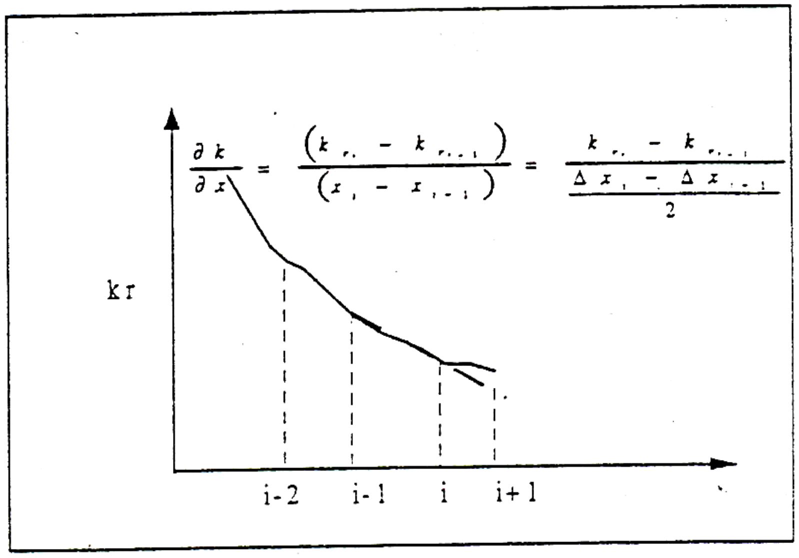


Fig. 1-b: Extrapolación lineal de las permeabilidades relativas

PERMEABILIDADES RELATIVAS Y DISPERSION

$$k_{ri+1/2} = k_{ri} + \frac{k_{r\,i} - k_{r\,i-1}}{\frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{2}} \frac{\Delta x_i}{2} \qquad (34)$$

$$k_{ri+1/2} = k_{ri} + \frac{k_{r\,i} - k_{r\,i-1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \Delta x_i \qquad (35)$$

$$k_{ri-1/2} = k_{ri-1} + \frac{k_{r\,i-1} - k_{r\,i-2}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2}} \Delta x_{i-1} \qquad (36)$$

PERMEABILIDADES RELATIVAS Y DISPERSION. Ecuación general

$$k_{ri\pm 1/2} = k_{rup} + \left[\frac{k_{r\,up} - k_{r\,up-1}}{\sum_{j=1}^{2} \Delta x_{up}} \right] \Delta x_{up} \quad (37)$$

FIN