



## FACULTAD DE INGENIERÍA ROBOTICA II

**10mo. Semestre de la carrera  
Ingeniería en Mecatrónica**



FACULTAD DE INGENIERIA  
en acción continua...





# ROBOTICA II

## UNIDAD 2

### Modelo Dinámico del Robot

**Ing. Roberto HAARTH**

**Ingeniería en Mecatrónica**

**Facultad de Ingeniería. UNCuyo**

**Mendoza. ARGENTINA**



# UNIDAD 2 - ROBOTICA II

## *Modelo Dinámico de Robots*

- *Caracterización de los modelos dinámicos.*
- *Modelo Dinámico directo e inverso.*
- *Modelos dinámicos de robots.*
- *Modelo dinámico.*
- *Formulación de Newton-Euler.*
- *Formulación de Lagrange.*



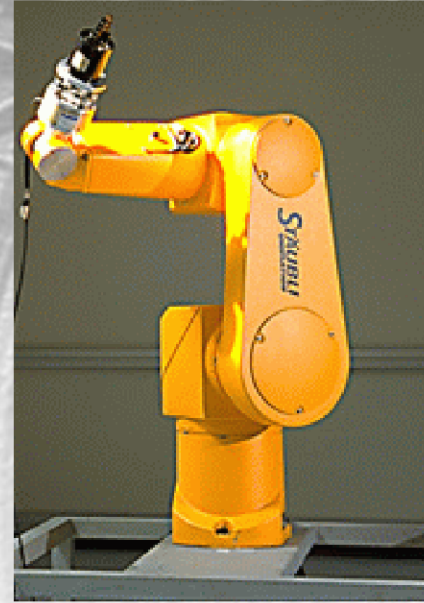




**ABB IRB2400 – (RAPID)  
RobotStudio**



**KUKA – (KRL)  
Kuka Sim Pro**



**STAUBLI – (V+)  
Staubli Robotics  
Suite**

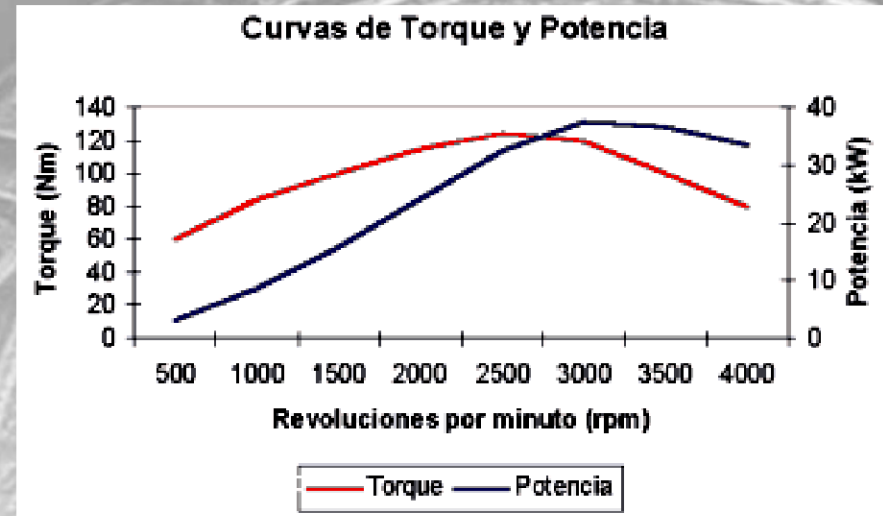
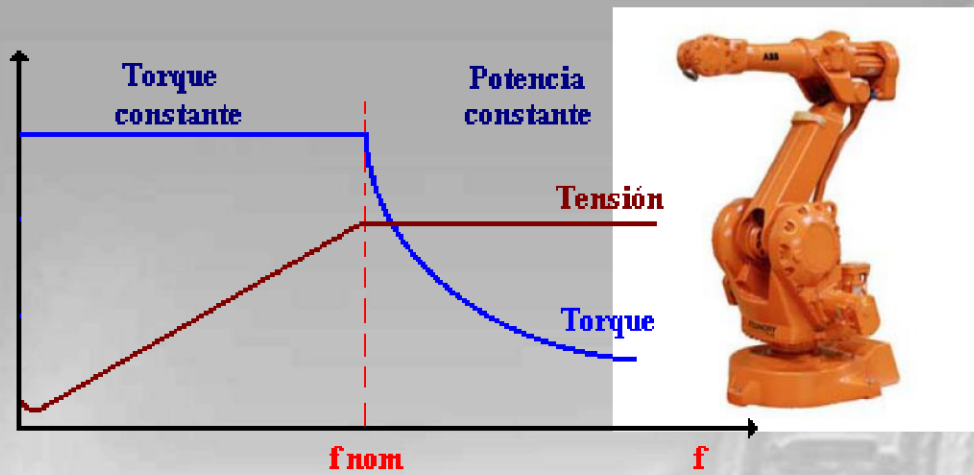


**FANUC  
M900iB –(KAREL)  
Roboguide**





# Modelo Dinámico del Robot



**Torque en la Articulación**

$$\tau = ?$$

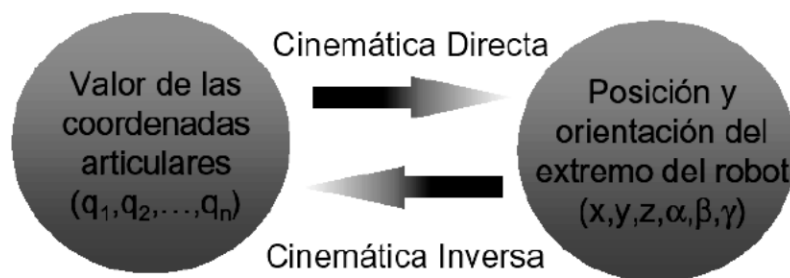
**Torque en el Actuador**



## U2-Modelo Dinámico del Robot

## OBJETIVO de la CINEMATICA

**CINEMATICA DIRECTA:** Proporciona la posición y orientación del extremo operativo del robot en función de las coordenadas articulares.

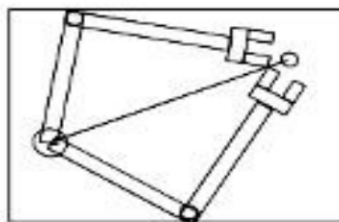


**CINEMATICA INVERSA:** Permite obtener la configuración del robot para posturas en el espacio de la tarea.



Generación de referencias en el espacio del robot.

No siempre tiene solución única.



Se resuelve por optimización

integrar

$$\dot{x} = J^+ \dot{q}$$
$$\dot{q} \rightarrow q$$

## U2- Modelo Dinámico del Robot

### CINEMATICA

Solo se consideran las posiciones estáticas y de movimiento sin considerar las fuerzas que actúan.

### DINAMICA

Considera la aplicación de Momentos de torsión y fuerzas en las articulaciones de los eslabones. Los movimientos se deben a Fuerzas Externas aplicadas por los actuadores en las articulaciones.

### PROBLEMA QUE PLANTEA LA DINAMICA

Conocido un punto de trayectoria (posición, velocidad y aceleración)

➔ ***Se necesita encontrar el momento de torsión de la articulación a aplicar (**Dinámica Inversa**)***

➔ ***Se necesita calcular como se moverá el mecanismo al aplicar el Momento de Torsión.*** Es decir, calcular el movimiento resultante del robot (posición, velocidad y aceleración) (**Dinámica Directa**)







## **INTRODUCCION**

### **Modelo Dinámico del Robot**



### *Relaciona matemáticamente*

- La localización del robot definida por sus variables articulares o localización de su extremo y sus derivadas: velocidad y aceleración.
- Las fuerzas y pares aplicados en las articulaciones o extremo del Robot
- Los parámetros dimensionales del robot: longitud, dimensiones, masa e inercias de sus elementos.







### **Utilidad del modelo dinámico de un robot**

- Permite realizar simulaciones del movimiento real del robot.
- Permite diseñar y evaluar la estructura mecánica del robot.
- Permite dimensionar los motores y actuadores que utilizará el robot.
- Permite diseñar y evaluar el control dinámico del robot.

**A medida que el número de grados de libertad aumenta, el planteo y obtención del modelo se complica :**

- Por este motivo no siempre es posible obtener un modelo dinámico expresado de una forma cerrada.*
- El modelo dinámico debe ser resuelto de manera iterativa mediante la utilización de un procedimiento numérico.*

## Modelo Dinámico del Robot

**Modelo dinámico directo:** expresa la evolución temporal de las coordenadas articulares y sus derivadas, en función de las fuerzas y torques que intervienen.

**Modelo dinámico inverso:** expresa las fuerzas y torques que intervienen, en función de la evolución temporal de las coordenadas articulares y sus derivadas.

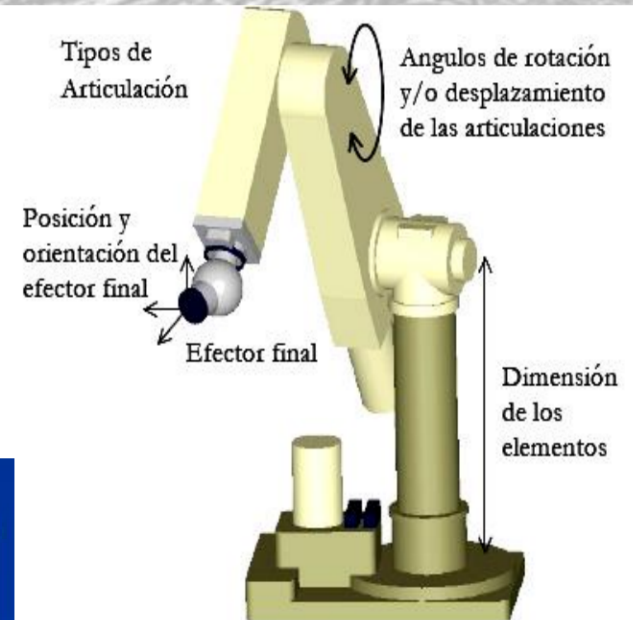
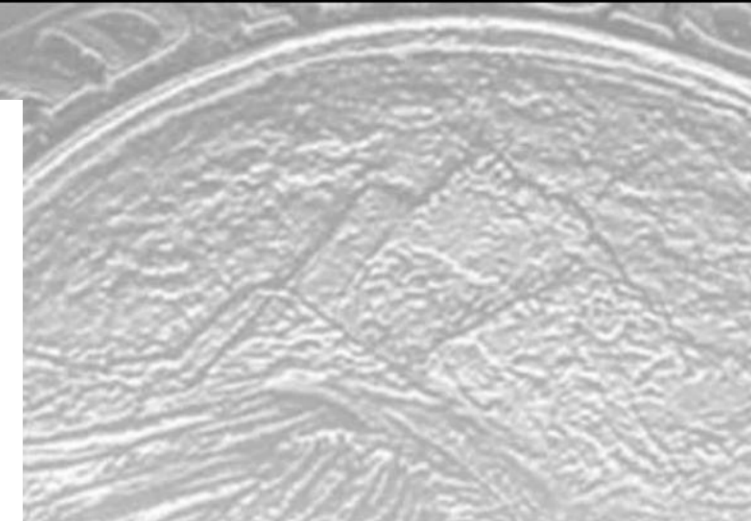
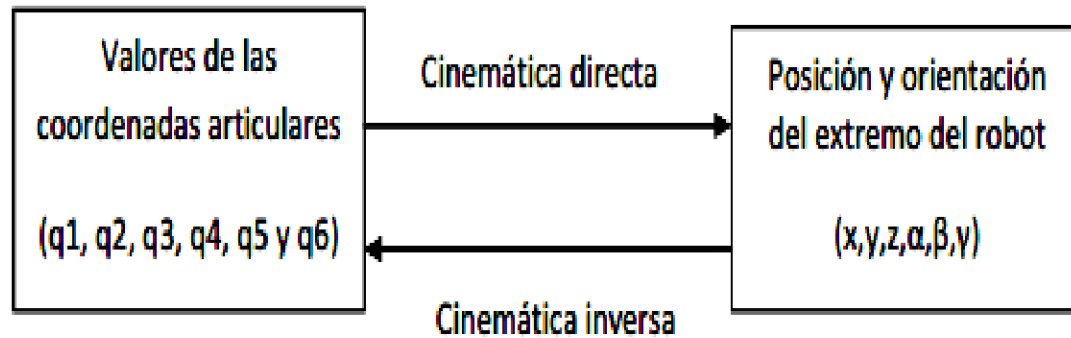


➡ ¿Qué relación tiene el Modelo Dinámico con el Modelo Cinemático ?

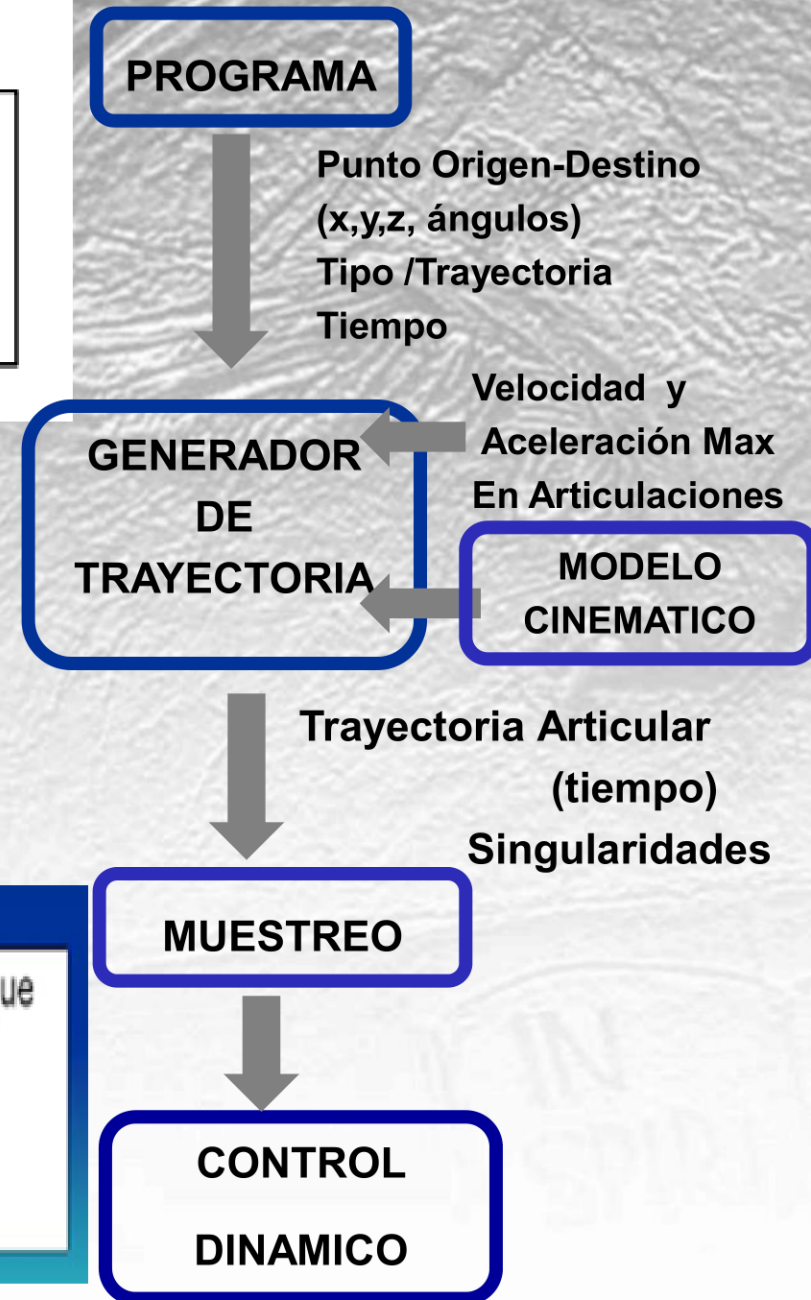
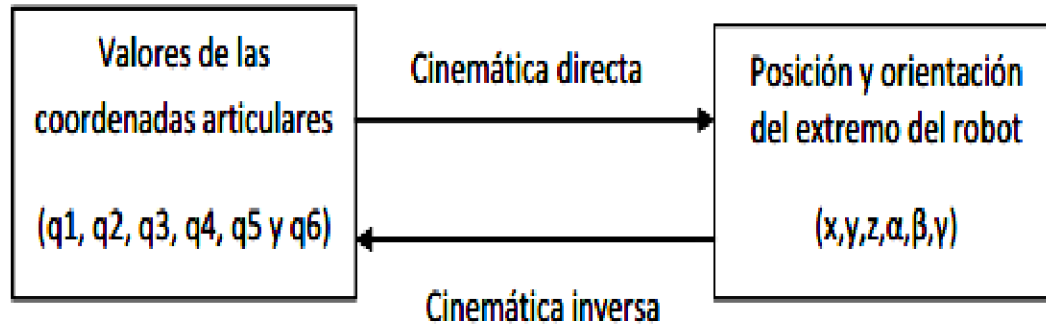
➡ ¿Existe un único resultado de aplicar la Dinámica Directa?

➡ ¿Lo mismo ocurre para la Dinámica Indirecta?

# Modelo Dinámico del Robot



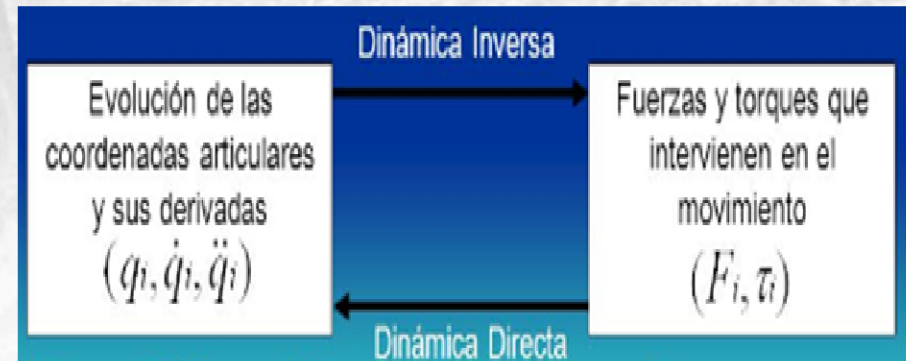
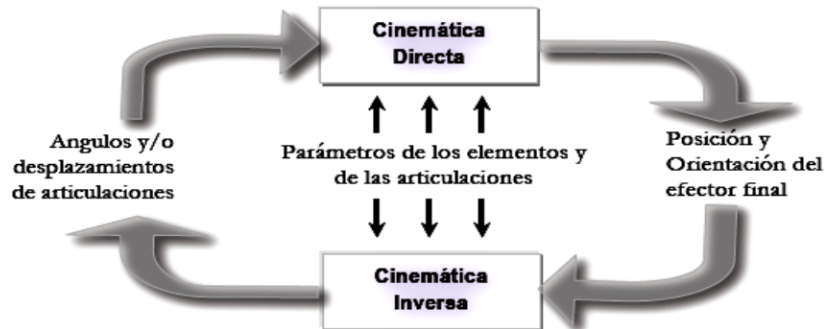
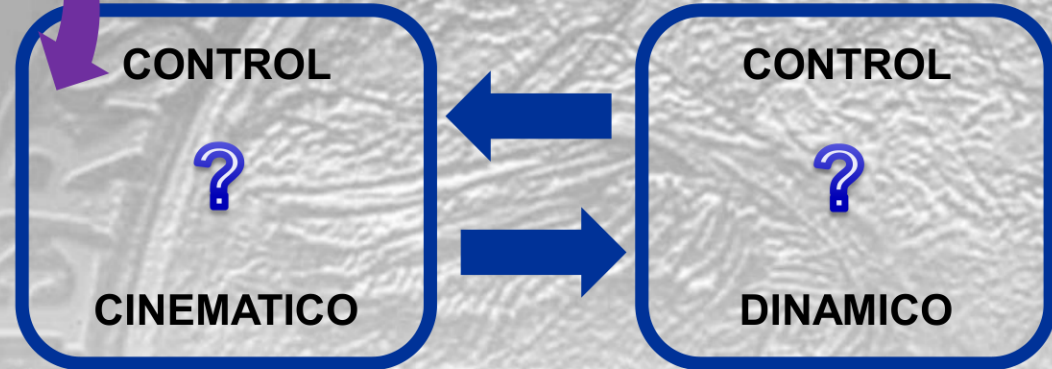
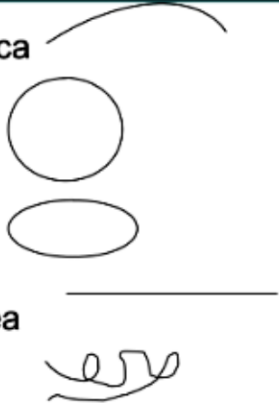




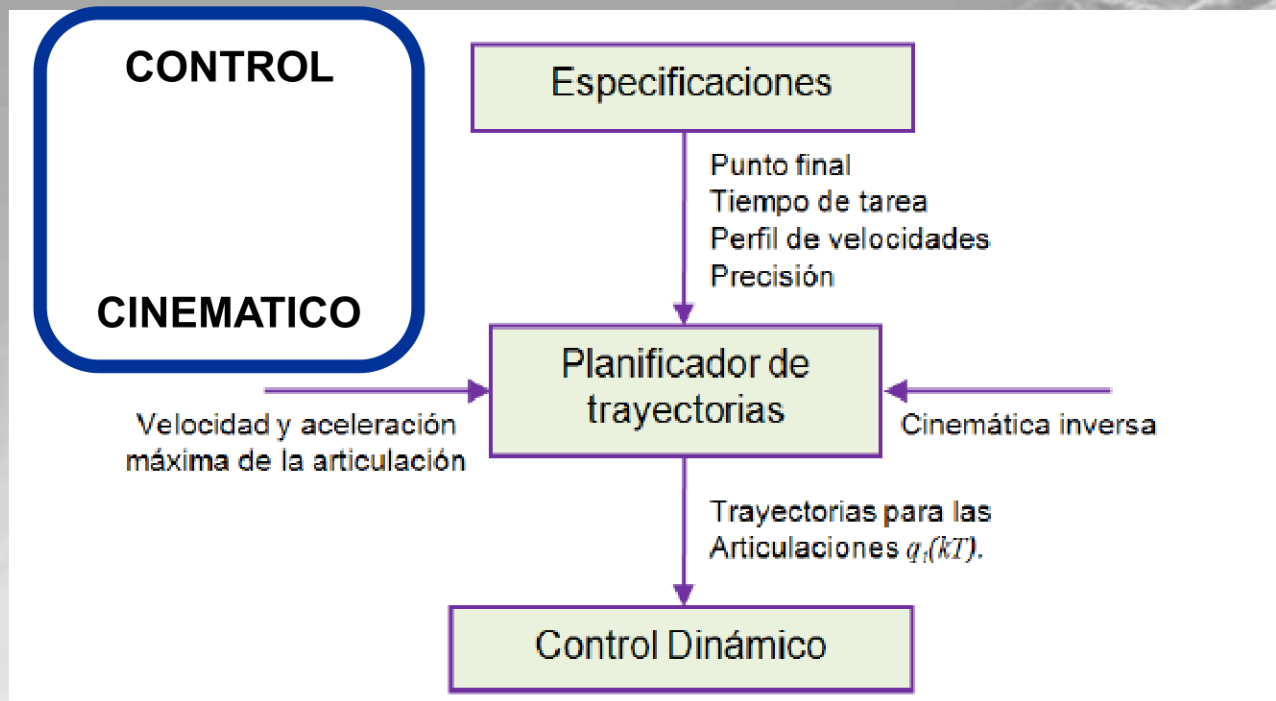


## Tipos De Trayectoria

- Trayectoria Parabólica
- Trayectoria Circular
- Trayectoria Elíptica
- Trayectoria Rectilínea
- Trayectoria Irregular







**Trayectorias punto a punto:** Cada articulación evoluciona desde su posición inicial a la final sin considerar la evolución de las demás articulaciones. Los Actuadores trabajan independientemente.

**Trayectorias coordinadas o isócronas:** Evitar que los Actuadores trabajen forzando sus velocidades y aceleraciones, teniendo que esperar a la articulación más lenta, Objetivo: Invertir el mismo tiempo en el movimiento. Los Actuadores finalizan simultáneamente

**Trayectorias continuas:** La trayectoria que sigue el extremo del robot es conocida por el usuario. Es preciso calcular de manera continua las trayectorias articulares.

## Control Dinámico

CONTROL

DINAMICO

**Justificación:** El control cinemático selecciona trayectorias que idealmente deberá seguir el robot, Se ajusta lo mejor posible a las especificaciones del movimiento dadas por el usuario.

En la práctica este ajuste del movimiento del robot a las especificaciones del usuario no será del todo posible, pues las *características dinámicas del robot* (*inercias, rozamiento, holguras, etc.*) impiden que las trayectorias real y deseada coincidan

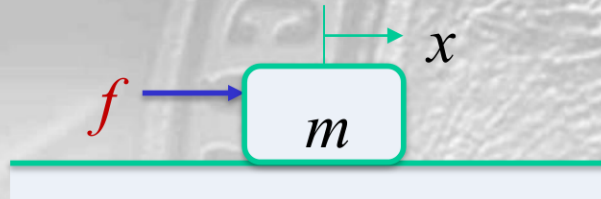
## Objetivo del Control Dinámico

Procurar que las trayectorias realmente seguidas por el robot  $q(t)$  sean lo más parecidas posible a las propuestas por el control cinemático como trayectorias deseadas  $q_d(t)$ . Para llevar a cabo esa tarea se hace uso del conocimiento del modelo dinámico del robot y de las herramientas de análisis y diseño aportadas por la teoría del Control.

- ¿Qué es la Dinámica de un Robot?
  - Respuesta a: ¿por qué se mueve?
  - Estudio de las causas del movimiento
  - Estudio de las fuerzas y torques y su efecto en el movimiento

$$f = m\ddot{x}$$

Segunda ley de Newton



$m$ : masa  
 $x$ : posición  
 $f$ : fuerza

$$\tau = J\ddot{\theta}$$

Segunda ley de Euler

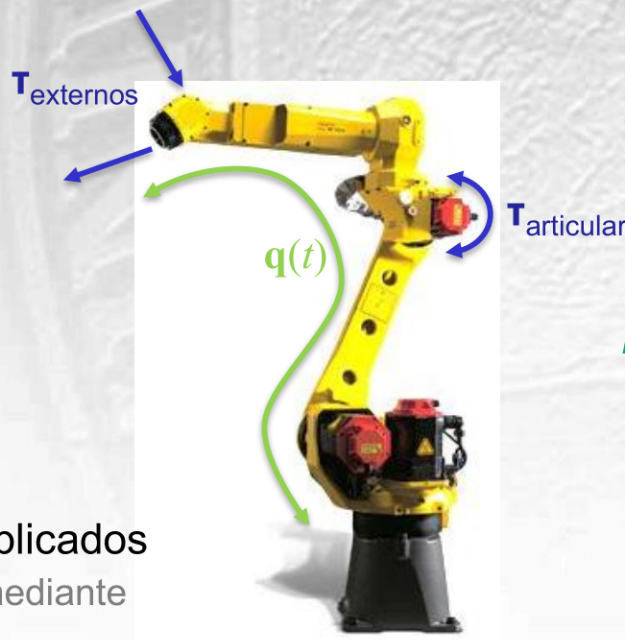
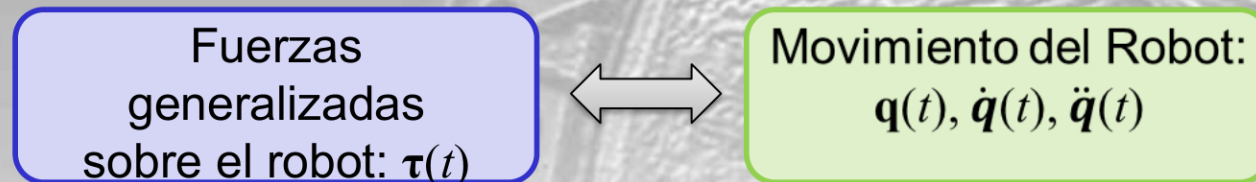


$J$ : momento de inercia  
 $\theta$ : ángulo  
 $\tau$ : torque (momento)

Dinámica: expresiones de segundo orden



## La Dinámica en Robots establece la relación entre:



### *Fuerzas generalizadas:*

- $\tau_{\text{articular}}$ : torques en las articulaciones (motores)
- $\tau_{\text{externos}}$ : fuerzas/torques aplicados por o sobre el entorno (mediante alguna parte del robot)

### *Movimiento del robot:*

- Trayectoria articular
- Trayectoria Cartesiana (del efector final)

## Modelo Dinámico de un Robot

- **Modelo dinámico** (en el espacio articular  $q$ ):

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad \leftarrow \text{Segundo orden}$$

donde:  $\mathbf{q}$ : Coordenadas articulares generalizadas

$M(\mathbf{q})$ : Matriz de masa o inercia

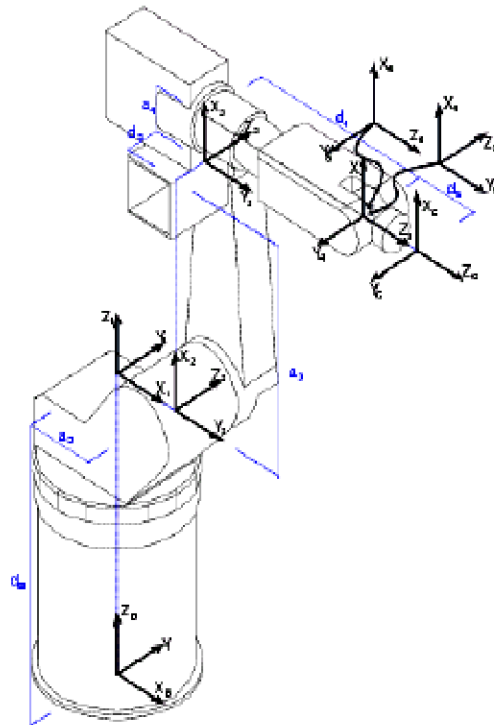
$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ : Fuerzas centrífugas y de Coriolis

$\mathbf{g}(\mathbf{q})$ : Fuerzas de gravedad

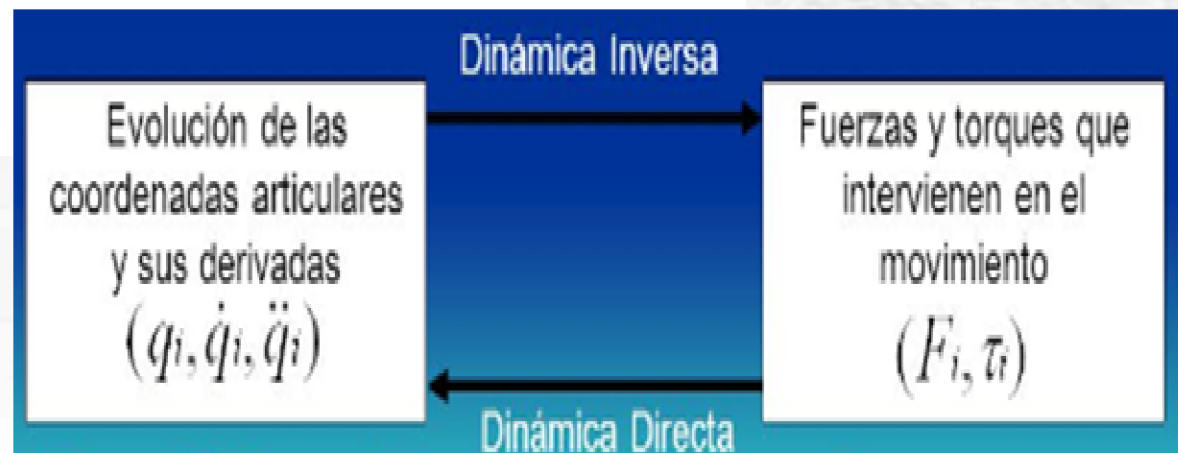


- Para modelar dinámicamente un robot se necesita:
  - Encontrar  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{G}$  porque definen el modelo dinámico del robot
  - Modelo dinámico permite control y simulación
  - Queda establecido para las las Trayectorias del movimiento planificado.

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$



Para un robot “Real” las ecuaciones dinámicas pueden ser considerablemente complejas





## Dinámica Inversa

**Determina los torques y/o fuerzas ( $\tau$ ) necesarios para realizar un movimiento deseado ( $\ddot{q}$ )**

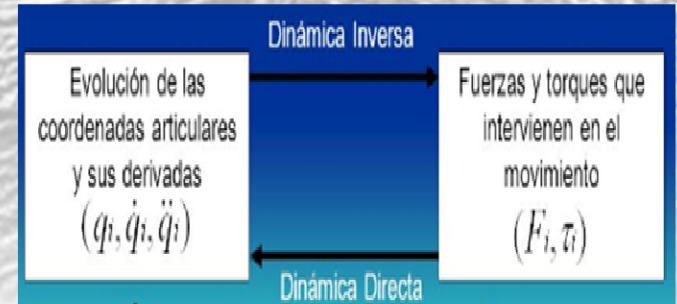
$$\mathbf{q}_d(t), \dot{\mathbf{q}}_d(t), \ddot{\mathbf{q}}_d(t)$$

Movimiento  
deseado



$$\tau_d(t)$$

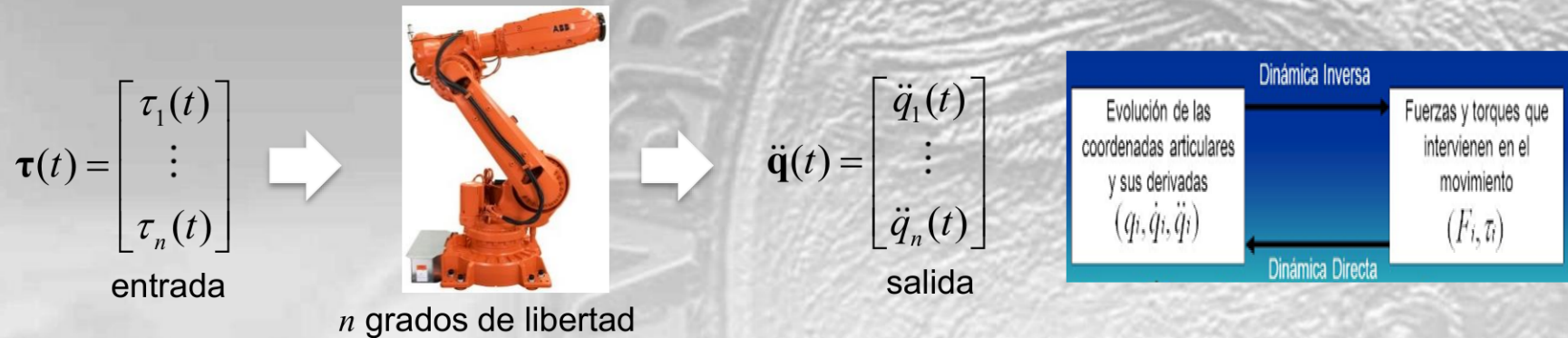
Torque/fuerzas



- **Aplicación principal: control**

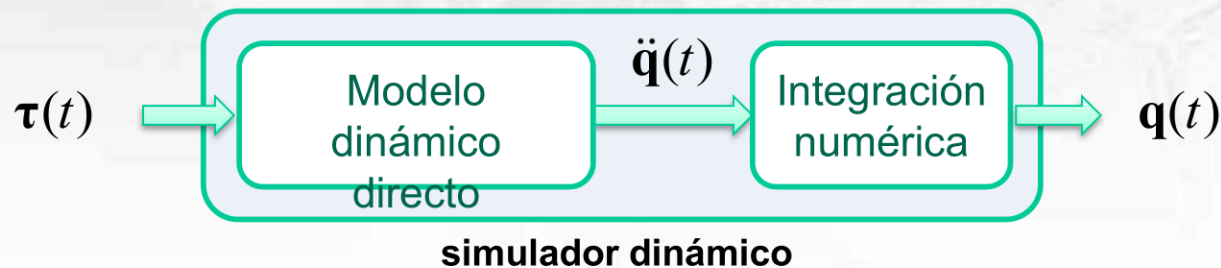
## Dinámica Directa

Aplicar torques/fuerzas ( $\tau$ ) y obtener el movimiento del robot ( $\ddot{q}$ ).



- **Aplicación principal: Simulación Dinámica**

Se usa el modelo dinámico directo y se integra numéricamente las ecuaciones diferenciales



## EL MODELO DINAMICO


Para un número mayor de grados de libertad en un robot, deben considerarse otros aspectos de valoración, fuerzas de inercia y gravedad, fuerzas de Coriolis debido a la interacción, movimiento relativo existente entre los elementos, además de las fuerzas centrípetas que dependen de la posición del robot.


Este planteo requiere de mayor formulación y variables que hacen muy compleja la solución por este método. Solo es útil para uno o dos grados de libertad de un robot.

Dinámica Inversa

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)$$

 ***El modelo dinámico completo de un robot debe incluir no solo la dinámica de sus elementos (barras o eslabones), sino la dinámica de sus sistemas de transmisión, de los actuadores y sus equipos electrónicos de mando.***

 ***Estos elementos incorporan al modelo dinámico nuevas inercias, rozamientos, saturaciones de los circuitos electrónicos, etc. aumentando aun más su complejidad.***



## EL MODELO DINAMICO

### EFFECTOS DE FRICCIÓN EN LOS ROBOTS



**Fricción Viscosa**, donde el momento de torsión es proporcional a la velocidad del movimiento de la articulación

**Fricción de Coulomb**, que es constante solo que se debe considerar el signo en la velocidad de la articulación

En Mecanismos reales es común la interacción de elementos móviles con una fuerte presencia de fuerzas de fricción que es considerable.

Influencia equivalente al 25% del momento de torsión

**Fricción Viscosa**

$$\tau_{fricción} = v\dot{\theta}$$

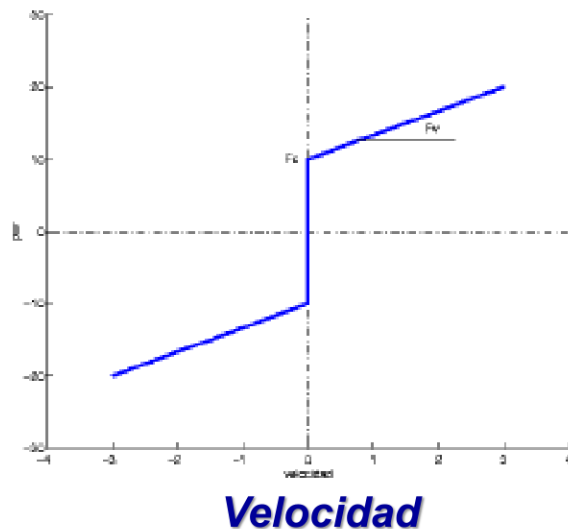
SE SUMAN

**Fricción de Coulomb**

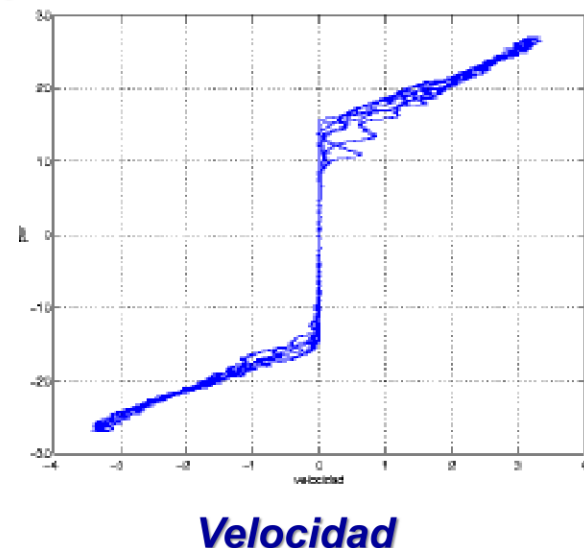
$$\tau_{fricción} = c \operatorname{sgn}(\dot{\theta})$$

- Característica de fricción, modelo estático.  $\tau_f = F_c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + F_v \dot{\theta}$
- La Fricción es un fenómeno fuertemente no lineal difícil de modelar que degrada el comportamiento de los robots manipuladores

## Torque



## Torque

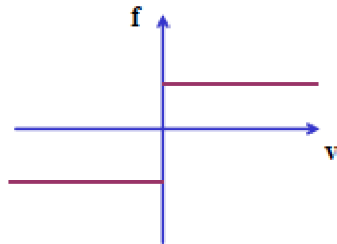


### MODELOS DE ROZAMIENTO

#### ROZAMIENTO ESTÁTICO O ROZAMIENTO SECO:

Esfuerzo que se opone a que empiece a moverse

$$f_r = k_e \operatorname{signo}(v)$$

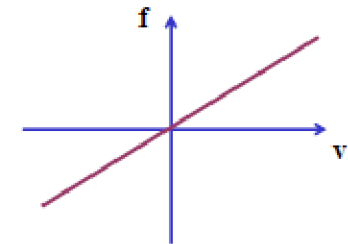


### MODELOS DE ROZAMIENTO

#### ROZAMIENTO VISCOSO O DINÁMICO:

esfuerzo proporcional a la velocidad.

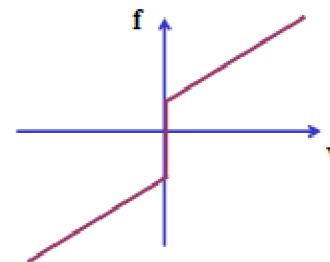
$$f_r = k_d \cdot v$$



### MODELOS DE ROZAMIENTO

Composición de los dos anteriores

$$f_r = k_e \operatorname{signo}(v) + k_d \cdot v$$


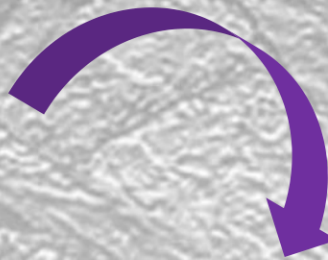




### MODELO DINAMICOS INVERSOS

1. *Newton-Euler*
2. *Lagrange o Lagrange-Euler*
3. *Formulación de d'Alembert.*
4. *Gibbs-Appel*
5. *Walker-Orin*

$$\vec{\tau}(t) = D(\vec{q}(t)) \cdot \ddot{\vec{q}}(t) + H(\vec{q}(t), (\dot{\vec{q}}(t))) + C(\vec{q}(t)) + F_v \cdot \dot{\vec{q}}(t) + F_s \cdot \text{sign}(\dot{\vec{q}}(t)) + \vec{\tau}_p(t)$$



Representa las fuerzas generalizadas aplicadas como entradas a las articulaciones del sistema.

### MODELO DINAMICOS DIRECTOS

1. *Método de Resolución por Sistemas Lineales,*
2. *Método de Walker & Orin.*
3. *Formulación de Gibbs-Appell.*

$$\ddot{\vec{q}} = f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \Gamma, f_e)$$

## MODELO DINAMICO DIRECTO

Aunque no es la parte más desarrollada dentro de la dinámica de un sistema robótico, la obtención de una solución es fundamental si se desean realizar tareas de simulación en pos de definir el movimiento del sistema robótico a partir de unos pares predefinidos. Esta solución implica una integración de las aceleraciones para dar lugar a las coordenadas articulares para cada instante y, además, precisa conocer la dinámica inversa previamente.

## Método de Resolución por Sistemas de Ecuaciones

A partir de un modelo dinámico ( caso de 6 articulaciones) se puede modificar la representación con ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}\tau_1(t) &= k_1\ddot{q}_1(t) + k_2\ddot{q}_2(t) + k_3\ddot{q}_3(t) + \dots \\ &\vdots \\ \tau_6(t) &= k_{19}\ddot{q}_1(t) + k_{20}\ddot{q}_2(t) + k_{21}\ddot{q}_3(t) + \dots\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}k_1 &= -I_{zz6} \\ k_2 &= m_5y_5a_1 + m_6z_6a_1 \\ k_3 &= m_6a_2z_6 + m_5y_5a_2 \\ k_4 &= m_5y_5a_3 + m_6z_6a_3 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Se obtienen un total de 6 ecuaciones con 26 constantes ( por simplificación).

Estas expresiones se resuelven empleando procedimientos de resolución de sistemas de ecuaciones.

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \Gamma, f_e)$$

## MODELO DINAMICO DIRECTO

### Método de Walker & Orin

Para poder simular la formulación de la dinámica hacia delante, directa o integral, dando así el movimiento de las articulaciones en términos de los pares realizados en los actuadores, se necesita hacer uso del modelo dinámico del sistema robótico.

**Walker y Orin** (Walker, et al., 1982) han descripto varios métodos para calcular la **dinámica directa** de una **cadena cinemática abierta** utilizando la formulación de **Newton-Euler** (o lo que es lo mismo, del modelo dinámico).

El método comienza resolviendo la ecuación general del robot. De ésta, se puede observar que las fuerzas y pares resultantes de las articulaciones son funciones lineales de las aceleraciones articulares:

$$\vec{\tau}(t) = D(\vec{q}(t)) \cdot \ddot{\vec{q}}(t) + H(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) + C(\vec{q}(t)) + F_v \cdot \dot{\vec{q}}(t) + F_s \cdot \text{sign}(\dot{\vec{q}}(t)) + \vec{\tau}_p(t)$$

Si se define un vector

$$B(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) = H(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) + C(\vec{q}(t)) + F_v \cdot \dot{\vec{q}}(t) + F_s \cdot \text{sign}(\dot{\vec{q}}(t)) + \vec{\tau}_p(t)$$

Combinando las expresiones se obtienen las variables

$$\ddot{\vec{q}}(t) = D^{-1}(\vec{q}(t)) [\vec{\tau}(t) - B(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)]$$

$$\ddot{\vec{q}} = f(q, \dot{q}, \Gamma, f_e)$$



### MODELO DINAMICO DIRECTO

#### Método de Gibbs-Appell

utilizando las ecuaciones de Gibbs-Appell, ecuaciones que fueron introducidas por Gibbs en 1879 y formalizadas por Appell veinte años después. Estas ecuaciones constituyen, a pesar de su relativa poca utilización, una de las formulaciones dinámicas más simples. Ésta permite expresar las ecuaciones del robot de forma lineal con respecto a los parámetros dinámicos, lo cual es sumamente conveniente para la identificación de los mismos. Además proporcionan otras ventajas muy interesantes como, por ejemplo, permitir la inclusión del efecto de la dinámica de los actuadores de una forma simple y directa

Las ecuaciones de la dinámica de Gibbs-Appell parten de la definición de la función de Gibbs

$$G(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), \ddot{\vec{q}}(t), t) = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T(t) D(\vec{q}(t)) \cdot \ddot{\vec{q}}(t) + \vec{\Xi}^T \ddot{\vec{q}}(t) + f(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$$

Las ecuaciones de Gibbs-Appell se obtienen derivando parcialmente la función de Gibbs con respecto a las aceleraciones generalizadas:

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_i(t)} G(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), \ddot{\vec{q}}(t), t) = Q_i \rightarrow D(\vec{q}(t)) \cdot \ddot{\vec{q}}(t) + \vec{\Xi} = Q_i$$

$$\ddot{\vec{q}} = f(q, \dot{q}, \Gamma, f_e)$$

### MODELO DINAMICO INVERSO

### FORMULACION DE D'ALAMBERT

El Principio del Trabajo Virtual representa un método de análisis que engloba el concepto del **trabajo virtual** y el **Principio de d'Alembert**, mediante los cuales se formulan directamente las ecuaciones dinámicas de manera conjunta para todo un sistema y no partícula a partícula.

Si bien esta característica también se presenta con la Formulación de Lagrange, el principio del trabajo virtual no involucra los inconvenientes presentes cuando las coordenadas generalizadas no son libres, representando así **el método más eficiente en el análisis de robots paralelos**.

#### Desplazamientos Virtuales

Donde

$\delta W$  Trabajo Virtual

$\vec{Q}_i$  representa el vector de fuerzas generalizadas I-ésimo y la variable

$\delta \vec{r}_i$  hace referencia al de desplazamientos virtuales.

$$\delta W = \sum \vec{Q}_i \delta \vec{r}_i = 0$$

### MODELO NEWTON - EULER

El estudio dinámico de un sistema robótico es el **estudio del movimiento** de dicho mecanismo y la dinámica de un mecanismo cualquiera que representa el cálculo de las **fuerzas y pares** de todas las articulaciones del sistema mecánico para todo instante de tiempo. A diferencia de la cinemática, la dinámica analiza los movimientos del robot **teniendo en consideración pesos e inercias** y, por ende, toma en cuenta los valores de fuerzas y pares que aparecen durante el movimiento.

$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \sum \vec{F}(t)$$
$$\mathbf{I} \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} + \vec{\omega}(t) \times (\mathbf{I} \vec{\omega}(t)) = \vec{T}(t)$$

La dinámica se basa fundamentalmente en el planteamiento del equilibrio de fuerzas establecido en la 2ª Ley de Newton y la Ley de Euler (su equivalente para movimientos de rotación):

#### **IMPORTANTE**

Este método encuentra su aplicación generalmente en el análisis de robots seriales, ya que para el caso de robots paralelos genera un gran número de ecuaciones y por ello representa un método muy poco eficiente (Cisneros Limón, 2006).



## MODELO DE LAGRANGE

La Formulación de Lagrange-Euler es un método comprendido dentro de la llamada **dinámica analítica**, la cual consiste en una serie de técnicas basadas en el tratamiento puramente abstracto y analítico de los sistemas mecánicos. Este método fue formulado por Joseph Louis Lagrange y tiene la ventaja de dejar fuera del análisis las fuerzas de contacto mediante la definición de coordenadas y fuerzas generalizadas.

### PLANTEO DEL METODO.

Puesto que este método se basa en el **Principio de Conservación de la Energía**, la Función Lagrangiana  $L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$  se define como la diferencia entre la energía cinética  $K(\dot{q}_i(t), t)$  y potencial  $V(q_i(t), t)$  de un sistema

$$L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = K(\dot{q}_i(t), t) - V(q_i(t), t)$$

$$K(\dot{q}_i(t), t) = \frac{1}{2} \sum \left( \vec{v}_{Gi}^T(t) m_i \vec{v}_{Gi}(t) + \omega_{\omega i}^T(t) {}^U I_i \omega_{\omega i}(t) \right)$$

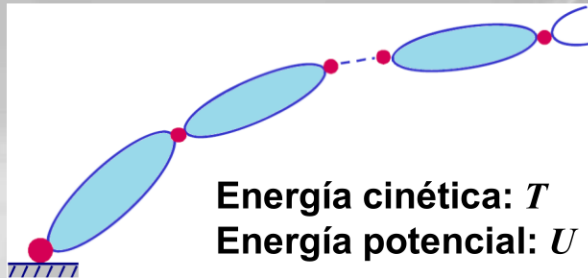
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau$$

$$\mathcal{L} = k - u$$

### Métodos para Calcular la Dinámica

#### Euler-Lagrange

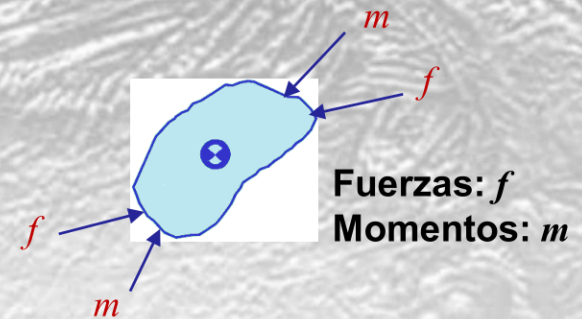
(basado en energía)



- Ecuaciones en forma simbólica
- Apropiado para:
  - Estudio de propiedades dinámicas
  - Análisis de esquemas de control

#### Newton-Euler

(basado en balance fuerzas/torques)



- Ecuaciones en forma numérica (recursiva)
- Apropiado para:
  - Dinámica inversa en tiempo real
  - Implementación de esquemas de control

# MODELO DINÁMICO INVERSO

Obtención del modelo dinámico

## Formulación Lagrange-Euler

Se basa en el balance de **energía** a través del **lagrangiano**. Permite describir la dinámica del robot considerándolo como una caja negra y teniendo en cuenta la energía almacenada en términos de energía **cinética** y **potencial**.

Lagrangiano  $L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q)$

Ecuación de movimiento  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$

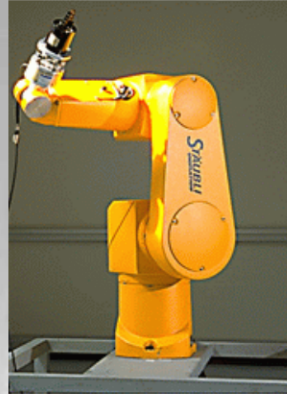
## Formulación Newton-Euler

Se basa en efectuar un **balance de fuerzas y momentos** o pares existentes. Para ello, se formulan las ecuaciones que describen el movimiento lineal y angular de cada eslabón del robot.

Newton		Euler
$\sum F = m \dot{v}$	$\Rightarrow$	$\sum T = I \dot{w} + w \times (I w)$



**PLANTEOS DE MODELOS DINAMICOS**



# Modelo Dinámico del Robot

## MODELO DINAMICO

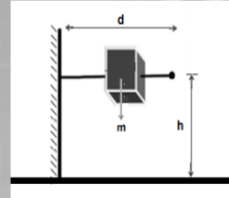
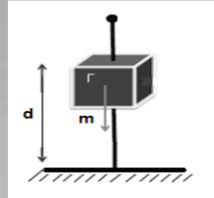
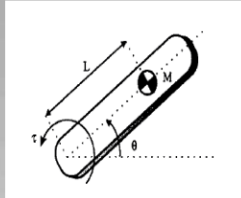


### MODELO MONOARTICULAR

1GDL R

1GDL T

1GDL T



EFFECTO  
GRAVEDAD (G)



EFFECTO  
SIN GRAVEDAD



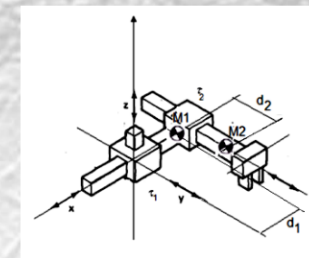
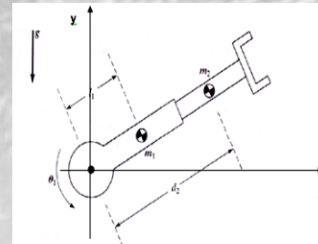
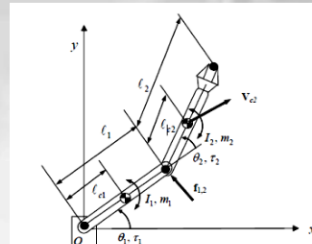
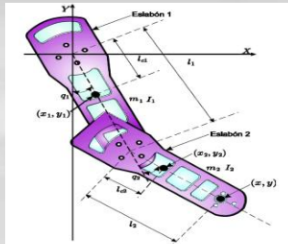
### MODELO MULTIARTICULAR

2GDL R+R

2GDL R+R

2GDL R+T

2GDL T+T

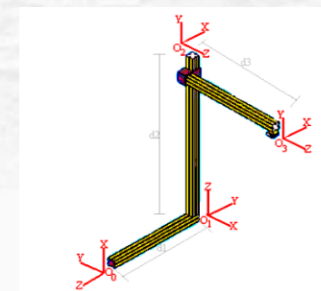
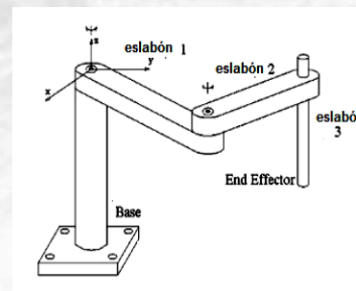
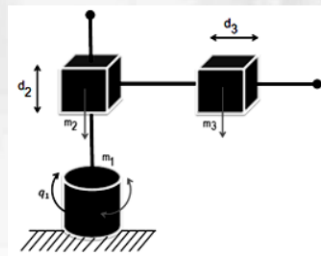
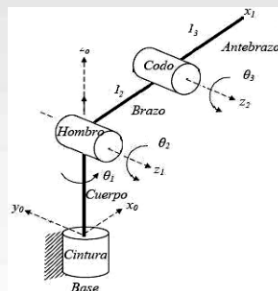


3GDL R+R+R

3GDL R+T+T

3GDL R+R+T

3GDL T+T+T





### MODELO NEWTON - EULER

El estudio dinámico de un sistema robótico es el **estudio del movimiento** de dicho mecanismo y la dinámica de un mecanismo cualquiera que representa el cálculo de las **fuerzas y pares** de todas las articulaciones del sistema mecánico para todo instante de tiempo. A diferencia de la cinemática, la dinámica analiza los movimientos del robot **teniendo en consideración pesos e inercias**. Toma en cuenta los valores de fuerzas y pares que aparecen durante el movimiento.

$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \sum \vec{F}(t)$$

$$\sum \vec{T}(t) = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = I \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} + \vec{\omega}(t) \times (I\vec{\omega}(t))$$

$$I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega)$$

La dinámica se basa fundamentalmente en el planteamiento del equilibrio de fuerzas establecido en la 2ª Ley de Newton y la Ley de Euler (su equivalente para movimientos de rotación).

Ley de Euler que define la sumatoria de momentos como la derivada temporal del momento angular (producto de la matriz de inercias por la velocidad angular del cuerpo) siempre refiriendo las magnitudes vectoriales a un sistema inercial.

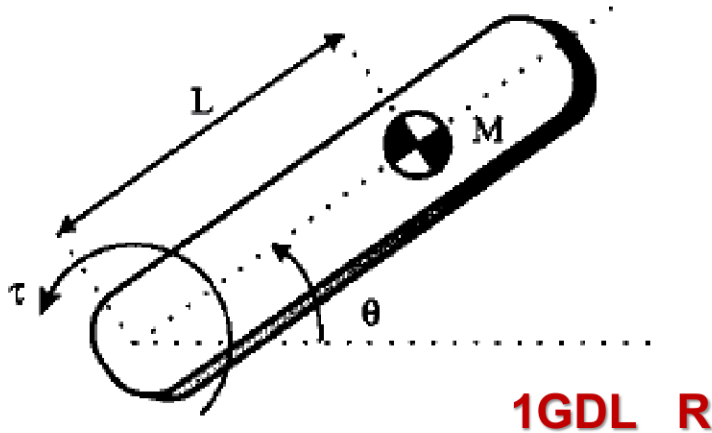
**Donde:**  $m$  es la masa del elemento, que se supone concentrada en un punto llamado centro de masas,  $v$  es la velocidad lineal de este punto.  $I$  representa la matriz de inercias respecto al centro de masas,  $\omega$  es la velocidad angular y  $\dot{\omega}$  la aceleración angular del elemento

**IMPORTANTE.** Este método encuentra su aplicación generalmente en el análisis de robots seriales. Para el caso de robots paralelos genera un gran número de ecuaciones y por ello representa un método poco eficiente (Cisneros Limón, 2006).



## MODELO DINAMICO NEWTON – EULER

### CASO A - MODELO MONOARTICULAR



$$\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2} + MgL\cos\theta = \boxed{ML^2\ddot{\theta} + MgL\cos\theta}$$

Momento dinámico por la aceleración articular mas el momento estático del sistema .

La obtención del modelo dinámico se basa fundamentalmente en el planteamiento del equilibrio de fuerzas establecido en la segunda ley de Newton, o su equivalente para movimientos de rotación, la denominada ley de Euler

## MODELO DINAMICO NEWTON – EULER



se basa en el planteo del Equilibrio de Fuerzas

### MODELO NEWTON - EULER

**Newton-Euler se basa principalmente en 3 leyes de la mecánica clásica**

1. Toda acción tiene una reacción igual y de sentido contrario. Si el eslabón 6 ejerce un par  $\tau$  y una fuerza  $f$  sobre el eslabón 5, entonces el eslabón 5 ejerce un par  $-\tau$  y una fuerza  $-f$ .
2. La derivada del momento lineal aplicado al centro de masas es igual a la suma de fuerzas aplicadas sobre el eslabón.
3. La derivada del momento angular de un eslabón es igual a la resultante de todos los pares aplicados sobre dicho eslabón.

**Se trata de un método recursivo en el que se parte de unas condiciones iniciales conocidas, como son las velocidades y aceleraciones lineales y angulares del eslabón 0 o base del robot manipulador, para recorrer cada eslabón desde 0 hasta n resolviendo las ecuaciones cinemáticas correspondientes para las velocidades y aceleraciones.**

**Posteriormente, mediante los valores de aceleraciones y velocidades calculados y una serie de condiciones terminales definidas en el extremo del eslabón n, relativas a las fuerzas y pares aplicados en dicho extremo, se recorren los eslabones desde n hasta 0 calculando esta vez las expresiones de fuerzas y pares asociados a cada uno.**

## MODELO NEWTON - EULER

Los valores de las variables iniciales son generalmente:

Estas condiciones podrían ser distintas si el robot manipulador estuviera montado sobre una base móvil, como ocurre en el caso de la Figura 2.2, y por tanto tuviera una velocidad distinta de 0 o una aceleración lineal no nula. Por ejemplo, fijar una aceleración  $\mathbf{a}_0 = [0, 0, -g]^T$  igual a la aceleración de la gravedad (con magnitud dada por la variable  $g$  de valor  $9.8 \text{ m/s}^2$  y con sentido negativo en el eje  $z$ ), equivale a incluir el efecto de la fuerzas gravitatoria de cada vínculo en el término masa por aceleración.

$$\mathbf{v}_0 = [0 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{a}_0 = [0 \ 0 \ 0]$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = [0 \ 0 \ 0]$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = [0 \ 0 \ 0]$$



Figura 2.2

## FUNDAMENTO

Los valores terminales pueden ser muy variables según el tipo de simulación que se desee realizar, pero de manera general se considera que no hay ningún par ni fuerza aplicada en el extremo del robot manipulador en el momento de realizar las simulaciones:

$$\mathbf{f}^{ext} = \boldsymbol{\tau}^{ext} = 0$$

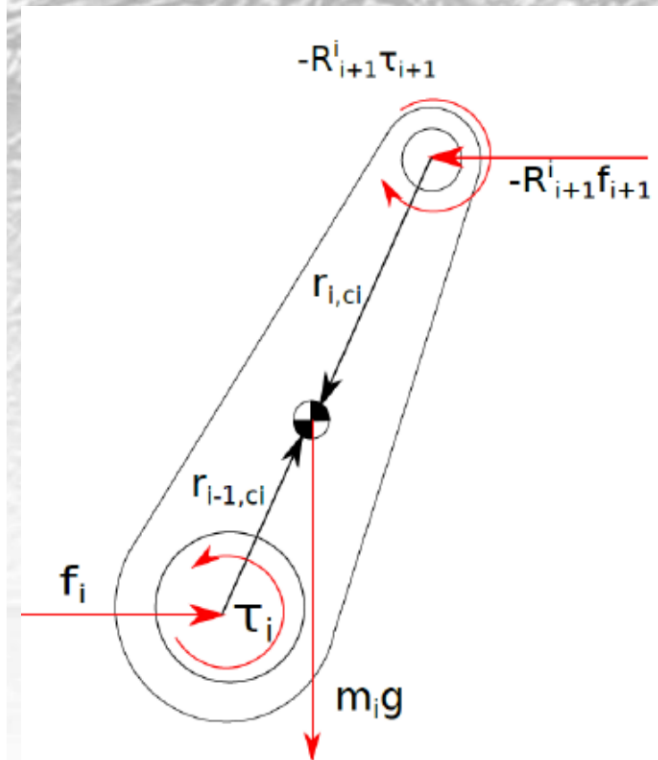


## MODELO NEWTON - EULER

### Nomenclatura en las ecuaciones.

Esquema con una representación simple de un eslabón cualquiera  $i$ , sobre el mismo se han definido las fuerzas y pares que actúan

- $r_{i-1,ci}$  = vector que une el origen del sistema de referencia  $S_{i-1}$  al centro de masas del eslabón  $i$ .
- $r_{i-1,i}$  = vector que une el origen del sistema  $S_{i-1}$  al origen de  $S_i$ .
- $r_{i,ci}$  = vector que une el origen de  $S_i$  con el centro de masas del eslabón  $i$ .
- $f_i$  = fuerza ejercida por el eslabón  $i - 1$  sobre el eslabón  $i$ .
- $\tau_i$  = par ejercido por el eslabón  $i - 1$  sobre el eslabón  $i$ .
- $m_i$  = masa del eslabón  $i$ .
- $I_i$  = matriz de inercia del eslabón  $i$ -ésimo con respecto a un sistema de referencia paralelo al  $S_i$  centrado en el centro de masas
- $a_{c,i}$  = aceleración absoluta del centro de masas del eslabón  $i$ .
- $a_{e,i}$  = aceleración del final del eslabón  $i$ , coincidente con el origen de  $S_{i+1}$ .
- $g_i$  = aceleración de la gravedad expresada en el sistema  $S_i$ .
- $\omega_i$  = velocidad angular del sistema de referencia  $S_i$ .
- $\alpha_i$  = aceleración angular de  $S_i$ .
- $z_i$  = eje de rotación del sistema coordenado  $S_i$  respecto de  $S_0$ .
- $R_{i+1}^i$  = matriz de rotación de  $S_i$  respecto de  $S_{i+1}$ .



Fuerzas y pares ejercidos sobre el eslabón  $i$

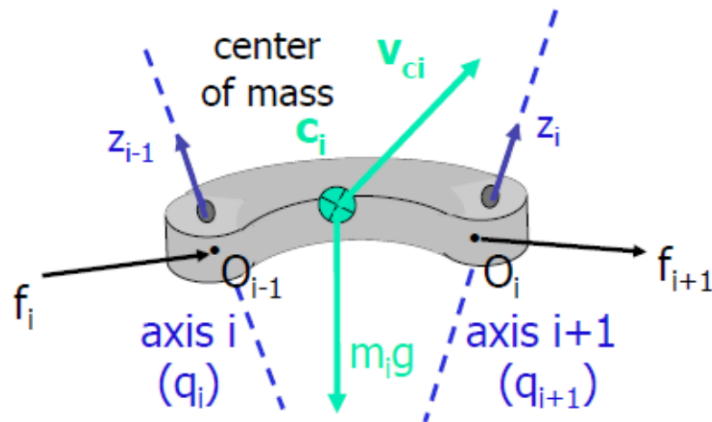
# MODELO NEWTON - EULER

Modelo Recursivo de Newton Euler. Modelo Interactivo (Autor: Alessandro De Luca)



## Newton-Euler equations - 1

link i



FORCES

$f_i$  force applied from link (i-1) on link i

$f_{i+1}$  force applied from link i on link (i+1)

$m_i g$  gravity force

all vectors expressed in the same RF (better  $RF_i$ )

Newton equation

$$f_i - f_{i+1} + m_i g = m_i a_{ci}$$

N

linear acceleration of  $c_i$

# MODELO NEWTON - EULER

Modelo Recursivo de Newton Euler. Modelo Interactivo (Autor: Alessandro De Luca)



## Newton-Euler equations - 2

link i

### TORQUES

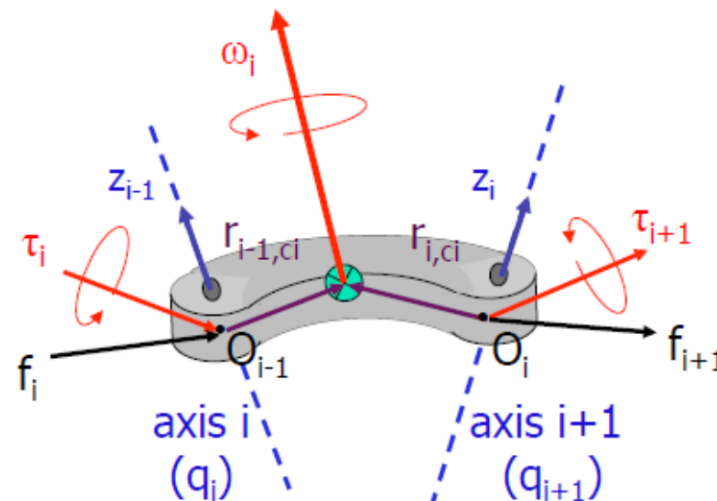
$\tau_i$  torque applied  
from link (i-1) on link i

$\tau_{i+1}$  torque applied  
from link i on link (i+1)

$\mathbf{f}_i \times \mathbf{r}_{i-1, c_i}$  torque due to  $\mathbf{f}_i$  w.r.t.  $\mathbf{c}_i$

$-\mathbf{f}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i, c_i}$  torque due to  $-\mathbf{f}_{i+1}$  w.r.t.  $\mathbf{c}_i$

Euler equation



all vectors expressed in  
the same RF ( $\mathbf{RF}_i$  !!)

gravity force gives  
no torque at  $\mathbf{c}_i$

$$\tau_i - \tau_{i+1} + \mathbf{f}_i \times \mathbf{r}_{i-1, c_i} - \mathbf{f}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i, c_{i+1}} = \mathbf{I}_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (\mathbf{I}_i \omega_i)$$

E

angular acceleration of body<sub>i</sub>



# MODELO NEWTON - EULER

Modelo Recursivo de Newton Euler. Modelo Interactivo (Autor: Alessandro De Luca)



## Forward recursion

### Computing velocities and accelerations

- "moving frames" algorithm (as for velocities in Lagrange)
- wherever there is no leading superscript, it is the same as the subscript  
( $\omega_i = {}^i\omega_i$ )
- for simplicity, only revolute joints  
(see textbook for the more general treatment)

### initializations

$$\omega_i = {}^{i-1}R_i^T [\omega_{i-1} + \dot{q}_i z_{i-1}]$$

←  $\omega_0$

$$\dot{\omega}_i = {}^{i-1}R_i^T [\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{q}_i z_{i-1} - \dot{q}_i z_{i-1} \times (\omega_{i-1} + \dot{q}_i z_{i-1})]$$

AR

$$= {}^{i-1}R_i^T [\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{q}_i z_{i-1} + \dot{q}_i \omega_{i-1} \times z_{i-1}]$$

←  $\dot{\omega}_0$

$$a_i = {}^{i-1}R_i^T a_{i-1} + \dot{\omega}_i \times {}^i r_{i-1,i} + \omega_i \times (\omega_i \times {}^i r_{i-1,i})$$

←  $a_0 - {}^0g$

$$a_{ci} = a_i + \dot{\omega}_i \times r_{i,ci} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,ci})$$

the gravity force term can be skipped in Newton equation, if added here



# MODELO NEWTON - EULER

Modelo Recursivo de Newton Euler. Modelo Interactivo (Autor: Alessandro De Luca)



## Backward recursion Computing forces and torques

from  $N_i$   $\longrightarrow$  to  $N_{i-1}$  eliminated, if inserted  
in forward recursion ( $i=0$ ) initializations

**F/TR** 
$$f_i = f_{i+1} + m_i(a_{ci} - \cancel{g})$$

$$\tau_i = \tau_{i+1} - f_i \times (r_{i-1,i} + r_{i,c_i}) + f_{i+1} \times r_{i,c_i} + I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_i \omega_i)$$

from  $E_i$   $\longrightarrow$  to  $E_{i-1}$

at each step of this recursion, we have two vector equations ( $N_i + E_i$ ) at the joint providing  $f_i$  and  $\tau_i$  : these contain ALSO the **reaction forces/torques** at the joint axis  $\Rightarrow$  they should be next "projected" along/around this axis

**FP** 
$$u_i = \begin{cases} f_i^T z_{i-1} + \eta_i \dot{q}_i & \text{for prismatic joint} \\ \tau_i^T z_{i-1} + \eta_i \dot{q}_i & \text{for revolute joint} \end{cases}$$

$\uparrow$  generalized forces add here dissipative terms

(in rhs of Euler-Lagrange eqs) (here viscous friction only)

$\Rightarrow$  N scalar equations at the end

# MODELO NEWTON - EULER

Modelo Recursivo de Newton Euler. Modelo Interactivo (Autor: Alessandro De Luca)

### Comments on Newton-Euler method

---



- the previous forward/backward recursive formulas can be evaluated in symbolic or numeric form
  - **symbolic**
    - substituting expressions in a recursive way
    - at the end, a closed-form dynamic model is obtained, which is identical to the one obtained using Euler-Lagrange (or any other) method
    - there is **no** special convenience in using N-E in this way
  - **numeric**
    - substituting numeric values (numbers!) at each step
    - **computational complexity** of each step remains constant  $\Rightarrow$  grows **in a linear fashion** with the number **N** of joints ( $O(N)$ )
    - strongly recommended for real-time use, especially when the number **N** of joints **is large**

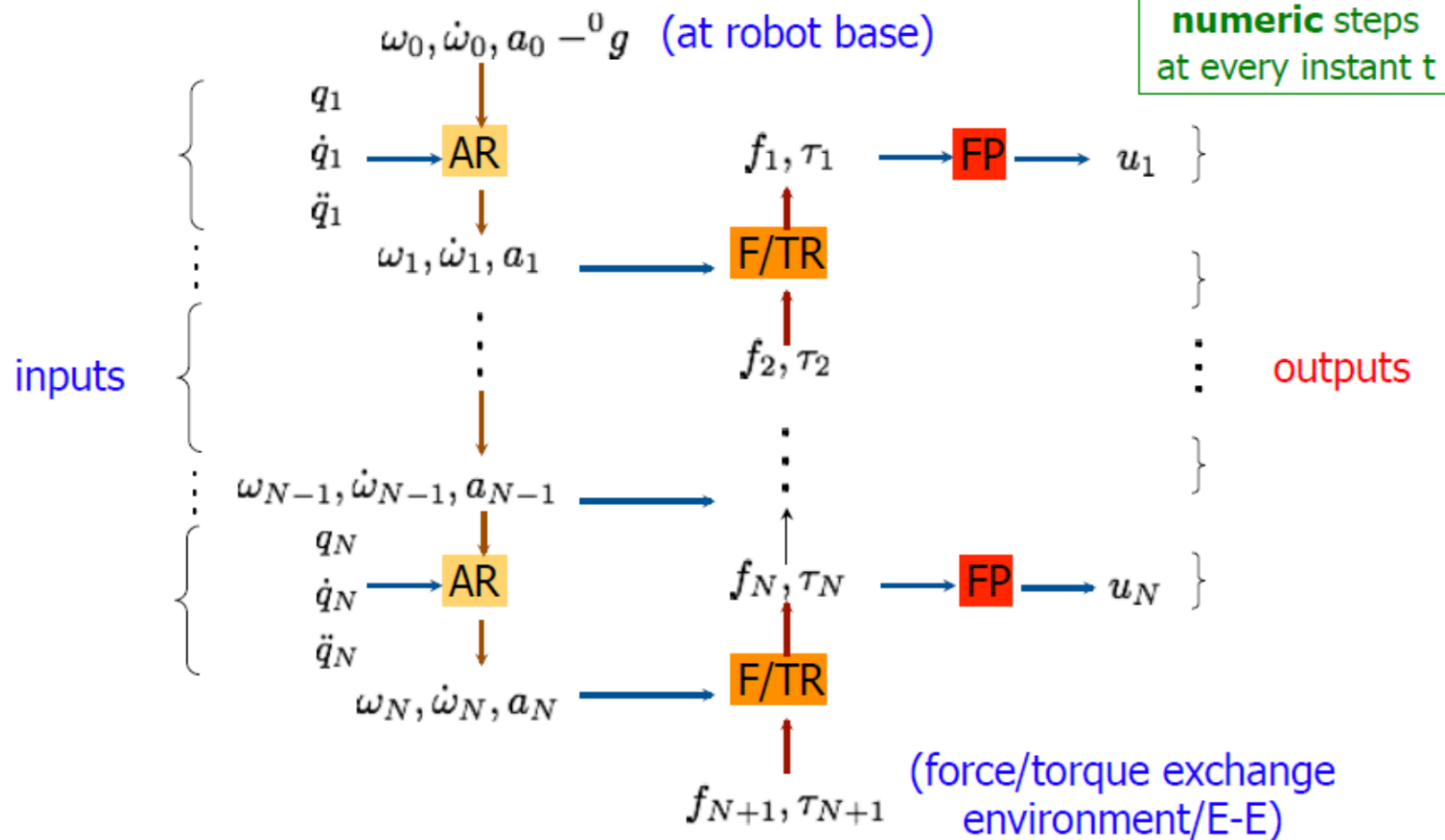




# MODELO NEWTON - EULER

Modelo Recursivo de Newton Euler. Modelo Interactivo (Autor: Alessandro De Luca)

## Newton-Euler algorithm efficient computational scheme for inverse dynamics

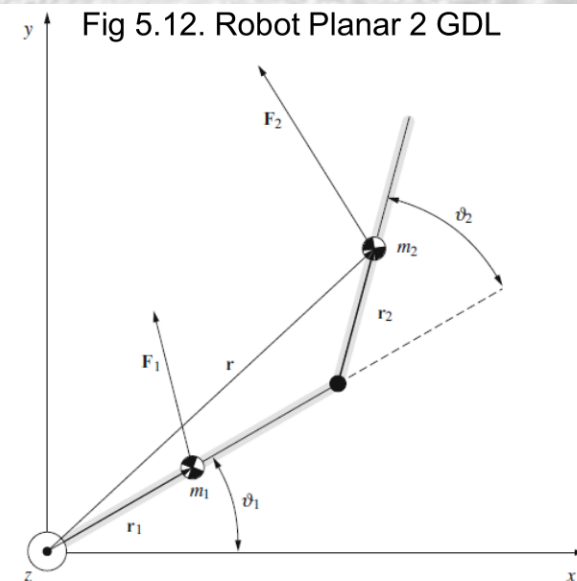
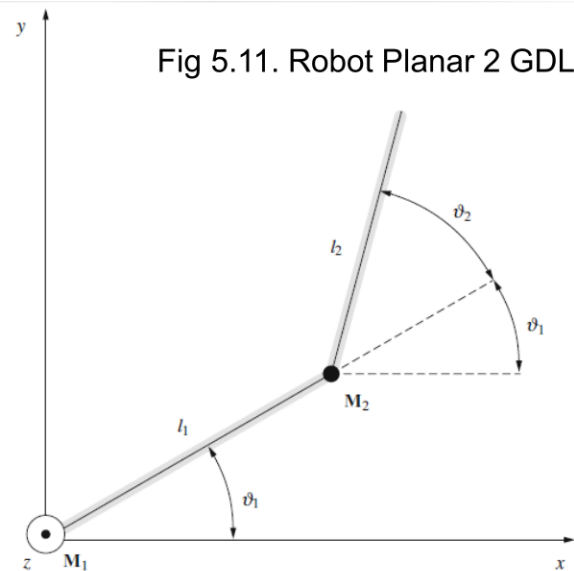


## MODELO NEWTON - EULER

## CASO B - Modelo Recursivo de Newton Euler. Sistema Multiarticular 2GDL (Planar 2R)

For illustration purposes, we shall study the planar, two-segment robot manipulator as shown in Fig. 5.11. The segments of length  $l_1$  and  $l_2$  may move in the vertical  $x$ - $y$  plane, their positions being described by angles with respect to the horizontal ( $x$ ) axis;  $\vartheta_1$  and  $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$ . Actuators at the joints provide torques  $M_1$  and  $M_2$ , whose positive direction is defined by increasing angles, i.e., along the positive direction of the  $z$  axis of our reference coordinate frame.

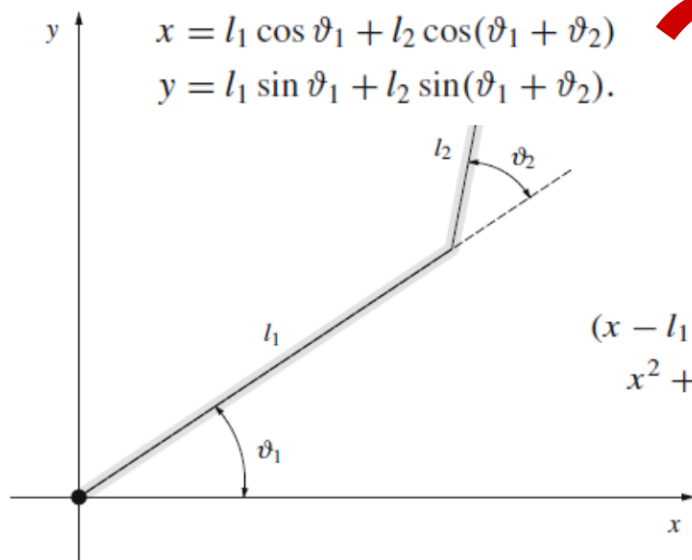
We now approximate the segments by point masses  $m_1$  and  $m_2$  at the midpoints of rigid, but otherwise massless rods (see Fig. 5.12). Let  $\mathbf{r}_1$  denote the position of point mass  $m_1$  with respect to the first joint, which is at the origin of our coordinate frame. Let  $\mathbf{r}_2$  denote the position of point mass  $m_2$  with respect to the second joint, which is at the junction of the two segments.



## MODELO NEWTON - EULER

### CASO B - Sistema Multiarticular 2GDL (Planar 2R ).

### Situaciones Geométricas

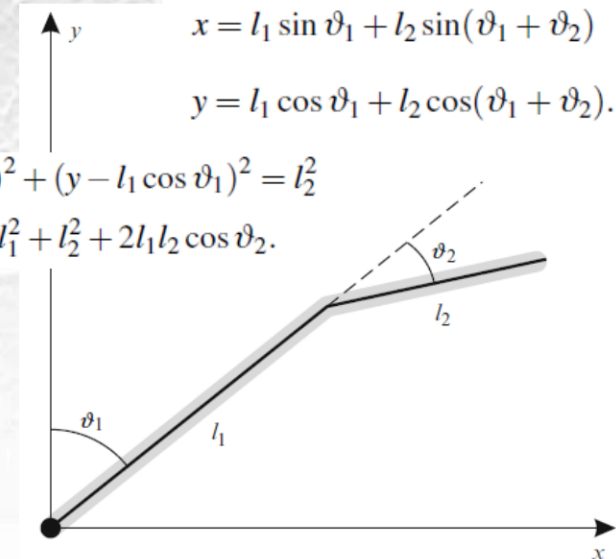
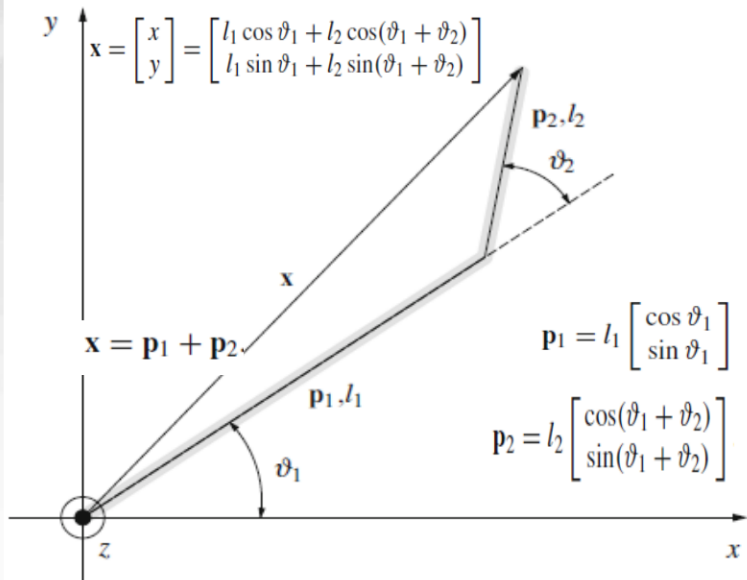
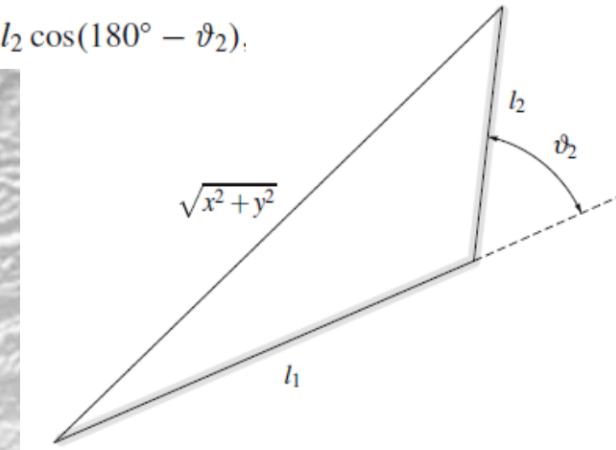


$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(180^\circ - \vartheta_2).$$

Primero se elevan al cuadrado y luego se suman, se obtienen las ecuaciones de un círculo

$$(x - l_1 \cos \vartheta_1)^2 + (y - l_1 \sin \vartheta_1)^2 = l_2^2$$

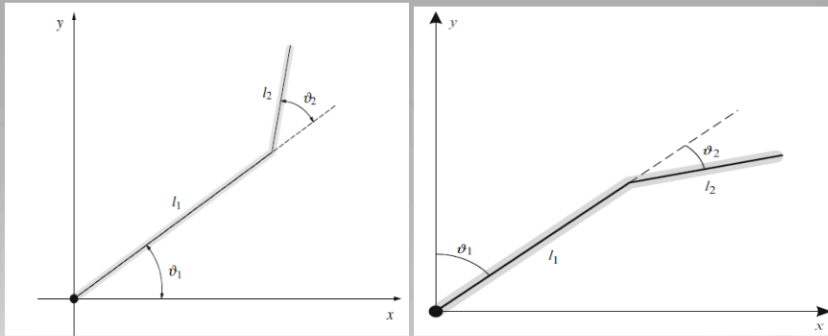
$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos \vartheta_2.$$



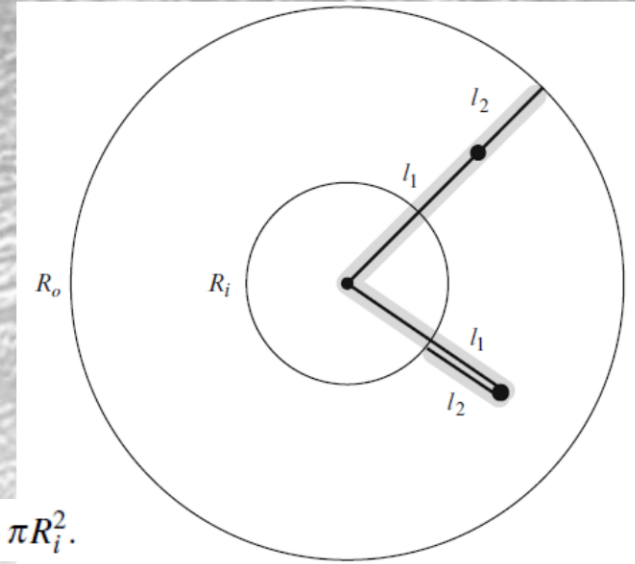
$$(x - l_1 \sin \vartheta_1)^2 + (y - l_1 \cos \vartheta_1)^2 = l_2^2$$

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos \vartheta_2.$$

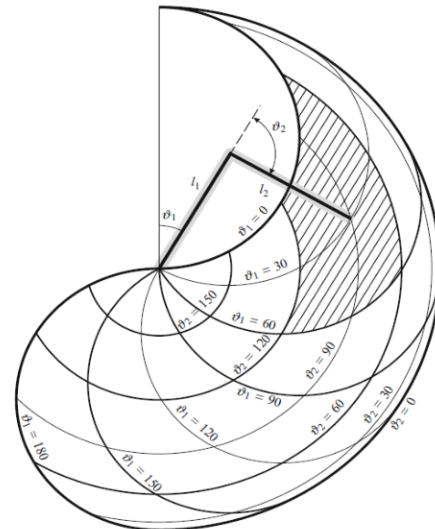
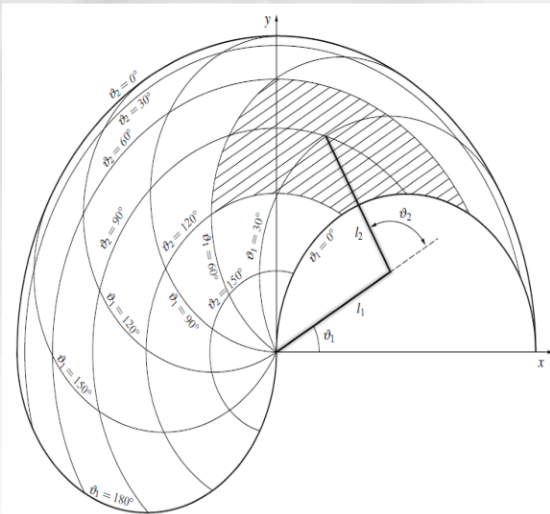




The working area of such a manipulator is a ring with inner radius  $R_i = l_1 - l_2$  and outer radius  $R_o = l_1 + l_2$ . It is our aim to find the ratio of the segments lengths  $l_1$  and  $l_2$  resulting in the largest working area at constant collective length of both segments  $R_o$ . The working area of the described two-segment robot manipulator is



$$A = \pi R_o^2 - \pi R_i^2.$$



$$R_i^2 = (l_1 - l_2)^2 = (2l_1 - R_o)^2$$

$$A = \pi R_o^2 - \pi (2l_1 - R_o)^2$$

$$\frac{\partial A}{\partial l_1} = 2\pi(2l_1 - R_o) = 0.$$

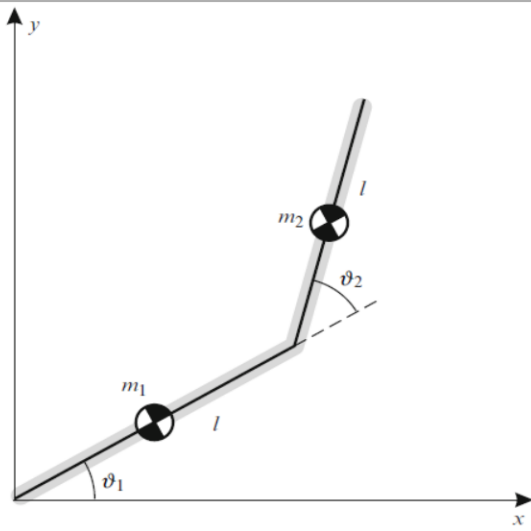
Solución particular: misma longitud

$$l_1 = \frac{R_o}{2},$$

$$l_1 = l_2.$$

## MODELO NEWTON - EULER

### CASO B - Modelo Recursivo de Newton Euler. Sistema Multiarticular 2GDL (Planar 2R)



The point masses  $m_1$  and  $m_2$  are acted upon by the forces that are transmitted by the massless rods, as well as by the force of gravity. Newton's law claims that the vector sum of all the forces acting on a particle is equal to the product of the particle mass and its acceleration. Therefore,

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \mathbf{a}_1 \quad \text{and} \quad \mathbf{F}_2 = m_2 \mathbf{a}_2, \quad (5.31)$$

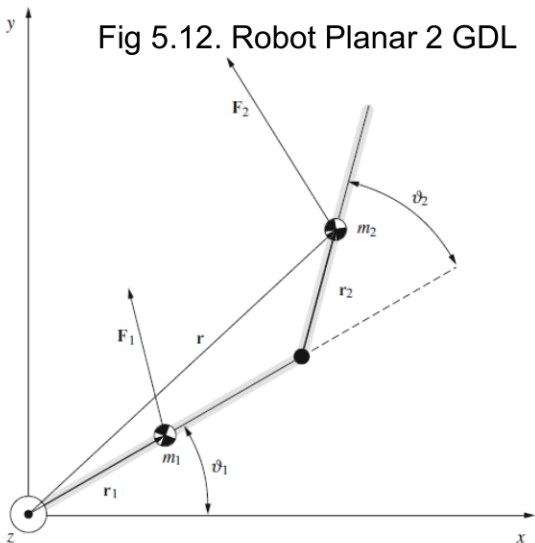
where  $\mathbf{F}_1$  and  $\mathbf{F}_2$  represent the sums of all forces (i.e., the force of the rod and the force of gravity), acting on each of the point masses  $m_1$  and  $m_2$ , while  $\mathbf{a}_1$  and  $\mathbf{a}_2$  are their accelerations with respect to the origin of the coordinate frame. So, a calculation of the accelerations amounts to the determination of the forces on the two "particles".

The position of  $m_1$  with respect to the reference frame origin, is given by  $\mathbf{r}_1$ , while the position of  $m_2$  is given by  $\mathbf{r} = 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$  (see Fig. 5.12). The corresponding accelerations are therefore  $\mathbf{a}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_1$  and  $\mathbf{a}_2 = \ddot{\mathbf{r}}$ , where the two dots above the vector symbol denote second derivatives with respect to time. Therefore,

$$\mathbf{a}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad \text{and} \quad \mathbf{a}_2 = \ddot{\mathbf{r}} = 2\ddot{\mathbf{r}}_1 + \ddot{\mathbf{r}}_2. \quad (5.32)$$

Now,  $\mathbf{r}_1$  and  $\mathbf{r}_2$  represent rigid rods, so their lengths are fixed. Therefore, these vectors can only rotate. Let us remind ourselves of basic physics, which says that a rotating vector describes a particle in circular motion. Such motion may have two components of acceleration (Fig. 5.13, see also Appendix ??). The first component is the radial or centripetal acceleration  $\mathbf{a}_r$ , which is directed towards the center of rotation. It is due to the change only of the direction of velocity and is thus present also in uniform circular motion. It is given by the expression

$$\mathbf{a}_r = -\omega^2 \mathbf{r}, \quad (5.33)$$



## MODELO NEWTON - EULER

### CASO B - Modelo Recursivo de Newton Euler. Sistema Multiarticular 2GDL (Planar 2R)

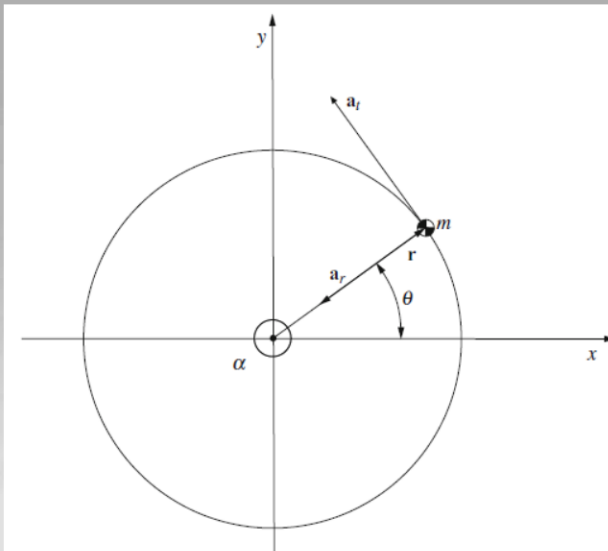


Fig 5.13. Vector giratorio  $r$  de longitud fija, describe un movimiento circular

where  $\omega$  is the angular velocity  $\omega = \dot{\theta}$ . The second component is the tangential acceleration, which is directed along the tangent to the circle (Fig. 5.13). It is due to the change of the magnitude of velocity and is present only in circular motion with angular acceleration  $\alpha = \ddot{\theta}$ . It is given by

$$\mathbf{a}_t = \alpha \times \mathbf{r}, \quad (5.34)$$

where  $\alpha$  is the vector of angular acceleration, which is perpendicular to the plane of motion, i.e., it is along the  $z$  axis of our reference coordinate frame. The total acceleration is obviously

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t = -\omega^2 \mathbf{r} + \alpha \times \mathbf{r}. \quad (5.35)$$

Let us now calculate the second derivatives with respect to time of the vectors  $\mathbf{r}_1$  and  $\mathbf{r}_2$ . As noted above, each of these derivatives has two components corresponding to the radial and to the tangential acceleration. So

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\omega_1^2 \mathbf{r}_1 + \alpha_1 \times \mathbf{r}_1 \quad \text{and} \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\omega_2^2 \mathbf{r}_2 + \alpha_2 \times \mathbf{r}_2. \quad (5.36)$$

The magnitude of the angular velocity  $\omega_1$  and the vector of angular acceleration  $\alpha_1$  of the first segment are

$$\omega_1 = \dot{\vartheta}_1 \quad \text{and} \quad \alpha_1 = \ddot{\vartheta}_1 \mathbf{k}, \quad (5.37)$$

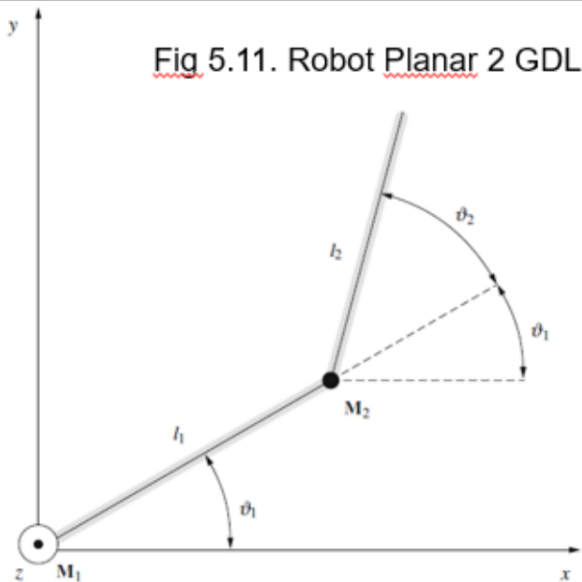
where  $\mathbf{k}$  is the unit vector along the  $z$  axis. The angular velocity  $\omega_2$  and the angular acceleration  $\alpha_2$  of the second segment are

$$\omega_2 = \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2 \quad \text{and} \quad \alpha_2 = \ddot{\vartheta} \mathbf{k} = (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) \mathbf{k}. \quad (5.38)$$



## MODELO NEWTON - EULER

### CASO B - Modelo Recursivo de Newton Euler. Sistema Multiarticular 2GDL (Planar 2R)



Here we used  $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$  (see Figs. 5.11 and 5.12). The second derivatives of vectors  $\mathbf{r}_1$  and  $\mathbf{r}_2$  may be written as

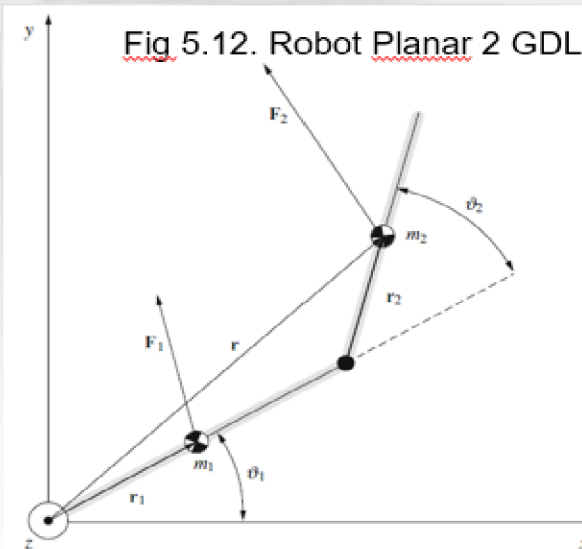
$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\omega_1^2 \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{r}_1 = -\dot{\vartheta}_1^2 \mathbf{r}_1 + \ddot{\vartheta}_1 \mathbf{k} \times \mathbf{r}_1 \quad (5.39)$$

and

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\omega_2^2 \mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\alpha}_2 \times \mathbf{r}_2 = -\dot{\vartheta}^2 \mathbf{r}_2 + \ddot{\vartheta} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_2 = \\ &= -(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 \mathbf{r}_2 + (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) \mathbf{k} \times \mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (5.40)$$

We may now use these expressions to calculate the accelerations of the two point masses  $m_1$  and  $m_2$  corresponding to our two-segment robot. The acceleration  $\mathbf{a}_1$  of  $m_1$  is

$$\mathbf{a}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\dot{\vartheta}_1^2 \mathbf{r}_1 + \ddot{\vartheta}_1 (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_1). \quad (5.41)$$



The acceleration  $\mathbf{a}_2$  of  $m_2$  is

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 = \ddot{\mathbf{r}} &= 2\ddot{\mathbf{r}}_1 + \ddot{\mathbf{r}}_2 = \\ &= -2\dot{\vartheta}_1^2 \mathbf{r}_1 + 2\ddot{\vartheta}_1 (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_1) - (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 \mathbf{r}_2 + (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (5.42)$$

From these accelerations we get the total forces acting on particles  $m_1$  and  $m_2$

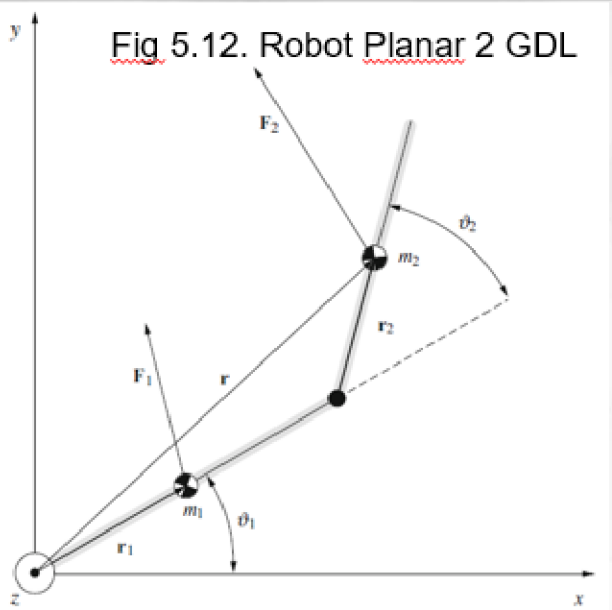
$$\mathbf{F}_1 = m_1 \mathbf{a}_1 \quad \text{and} \quad \mathbf{F}_2 = m_2 \mathbf{a}_2. \quad (5.43)$$

We can now calculate the torques of these forces with respect to the coordinate frame origin

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{a}_1 \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = (2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times m_2 \mathbf{a}_2. \quad (5.44)$$

## MODELO NEWTON - EULER

### CASO B - Modelo Recursivo de Newton Euler. Sistema Multiarticular 2GDL (Planar 2R)



$$\mathbf{a}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\dot{\vartheta}_1^2 \mathbf{r}_1 + \ddot{\vartheta}_1 (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_1).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 = \ddot{\mathbf{r}} &= 2\ddot{\mathbf{r}}_1 + \ddot{\mathbf{r}}_2 = \\ &= -2\dot{\vartheta}_1^2 \mathbf{r}_1 + 2\ddot{\vartheta}_1 (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_1) - (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 \mathbf{r}_2 + (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_2). \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{a}_1 \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = (2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times m_2 \mathbf{a}_2. \quad (5.44)$$

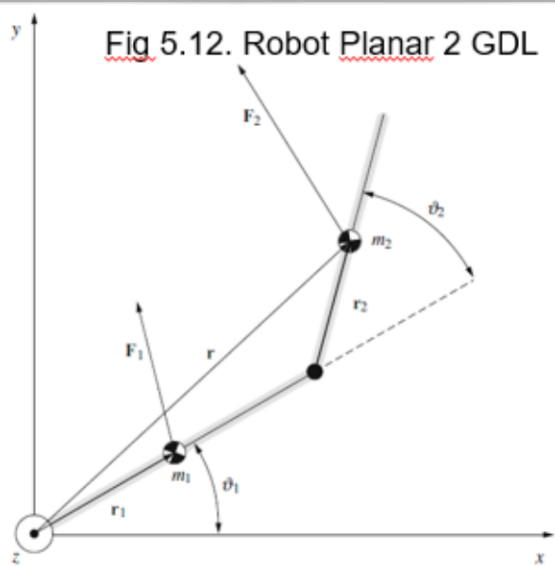
Inserting expressions for  $\mathbf{a}_1$  and  $\mathbf{a}_2$  as derived above, reminding ourselves of the double vector product  $[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})]$ , and by patiently doing the lengthy algebra, we obtain

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_1 &= m_1 r_1^2 \ddot{\vartheta}_1 \mathbf{k} \\ \text{and} \\ \boldsymbol{\tau}_2 &= [\ddot{\vartheta}_1 (4m_2 r_1^2 + 4m_2 r_1 r_2 \cos \vartheta_2 + m_2 r_2^2) + \\ &\quad + \ddot{\vartheta}_2 (m_2 r_2^2 + 2m_2 r_1 r_2 \cos \vartheta_2) - \\ &\quad - \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 4m_2 r_1 r_2 \sin \vartheta_2 - \dot{\vartheta}_2^2 2m_2 r_1 r_2 \sin \vartheta_2] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

The sum of both torques on the two “particles” of our system is obviously  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2$ .

## MODELO NEWTON - EULER

### CASO B - Modelo Recursivo de Newton Euler. Sistema Multiarticular 2GDL (Planar 2R)



On the other hand, we may consider our two-segment system consisting of two point masses and two massless rods from a different viewpoint. As a consequence of Newton's third law (To every action there is an equal but opposite reaction), we have a theorem stating that internal torques in a system cancel out, so that only torques of external forces are relevant. The torques of external forces on our robot system are the torques of gravity and the torque exerted by the base on which the robot stands. The torque of the base is equal to the torque  $\mathbf{M}_1$  of the actuator in the first joint. The sum of these torques of external forces (base + gravity) must be equal to  $\tau_1 + \tau_2$  (derived above), as both results represent two ways of viewing the total torque on the same system. So

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{g} + \mathbf{r} \times m_2 \mathbf{g} = \tau_1 + \tau_2. \quad (5.46)$$

With  $\mathbf{r} = 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$  we have the torque of the actuator in the first joint

$$\mathbf{M}_1 = \tau_1 + \tau_2 - \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{g} - (2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times m_2 \mathbf{g}. \quad (5.47)$$

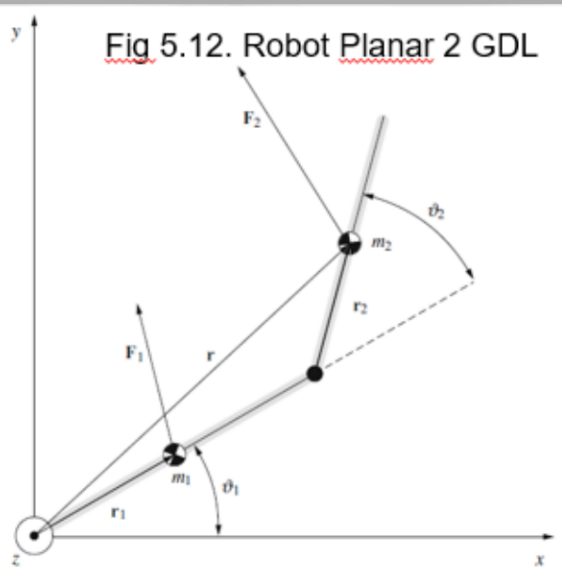
Remembering that  $\mathbf{g}$  points vertically downward (i.e., along  $-y$ ) and inserting the above results for  $\tau_1$  and  $\tau_2$ , we finally get

$$\begin{aligned} M_1 = & \ddot{\vartheta}_1(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + 4m_2 r_1^2 + 4m_2 r_1 r_2 \cos \vartheta_2) + \\ & + \ddot{\vartheta}_2(m_2 r_2^2 + 2m_2 r_1 r_2 \cos \vartheta_2) - \\ & - \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 4m_2 r_1 r_2 \sin \vartheta_2 - \dot{\vartheta}_2^2 2m_2 r_1 r_2 \sin \vartheta_2 + \\ & + m_1 g r_1 \cos \vartheta_1 + 2m_2 g r_1 \cos \vartheta_1 + m_2 g r_2 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2). \end{aligned} \quad (5.48)$$



## MODELO NEWTON - EULER

### CASO B- Modelo Recursivo de Newton Euler. Sistema Multiarticular 2GDL (Planar 2R)



In order to obtain the torque  $M_2$  of the actuator in the second joint, we will first consider the total force  $F_2$  acting on the point mass  $m_2$ . The force  $F_2$  is a sum of two contributions. One is the force of gravity  $m_2g$ , the other is the force  $F'_2$  exerted on  $m_2$  by the massless and rigid rod of the second segment. So

$$F_2 = F'_2 + m_2g. \quad (5.49)$$

To this equation we apply a vector product of  $r_2$  from the left and obtain

$$r_2 \times F_2 = r_2 \times F'_2 + r_2 \times m_2g. \quad (5.50)$$

The first term on the right-hand side is the vector product of  $r_2$  with the force  $F'_2$  exerted on  $m_2$  by the massless and rigid rod. This term is equal to the torque  $M_2$  of the actuator in the second joint. (Note that the rod may also exert a force on  $m_2$  directed along the rod, but the vector product of that component with  $r_2$  vanishes). We therefore obtain

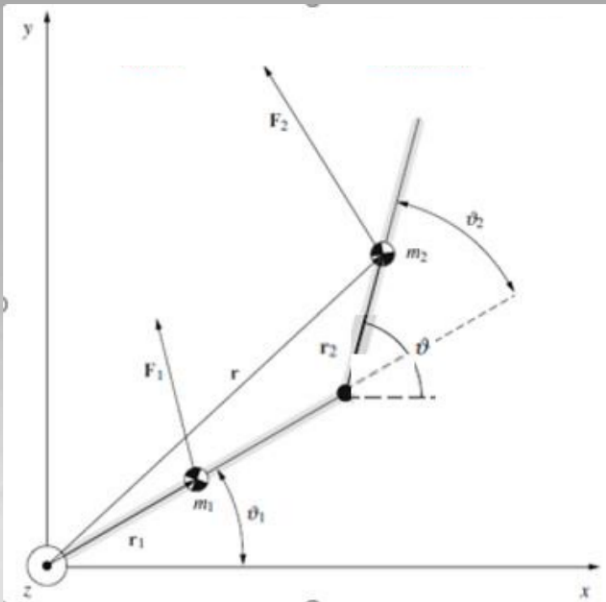
$$M_2 = r_2 \times F_2 - r_2 \times m_2g. \quad (5.51)$$

Substituting  $m_2a_2$  for  $F_2$  and the expression derived previously for  $a_2$ , leads to

$$M_2 = \ddot{\vartheta}_1(m_2r_2^2 + 2m_2r_1r_2 \cos \vartheta_2) + \ddot{\vartheta}_2m_2r_2^2 + \dot{\vartheta}_1^2 2m_2r_1r_2 \sin \vartheta_2 + m_2r_2g \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2). \quad (5.52)$$

## MODELO NEWTON - EULER

### CASO B - Modelo Recursivo de Newton Euler. Sistema Multiarticular 2GDL (Planar 2R)



$$M_1 = \ddot{\vartheta}_1(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + 4m_2 r_1^2 + 4m_2 r_1 r_2 \cos \vartheta_2) + \ddot{\vartheta}_2(m_2 r_2^2 + 2m_2 r_1 r_2 \cos \vartheta_2) - \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 4m_2 r_1 r_2 \sin \vartheta_2 - \dot{\vartheta}_2^2 2m_2 r_1 r_2 \sin \vartheta_2 + m_1 g r_1 \cos \vartheta_1 + 2m_2 g r_1 \cos \vartheta_1 + m_2 g r_2 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2).$$

$$\tau = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \ddot{\vartheta}_1(m_2 r_2^2 + 2m_2 r_1 r_2 \cos \vartheta_2) + \ddot{\vartheta}_2 m_2 r_2^2 + \dot{\vartheta}_1^2 2m_2 r_1 r_2 \sin \vartheta_2 + m_2 r_2 g \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2).$$

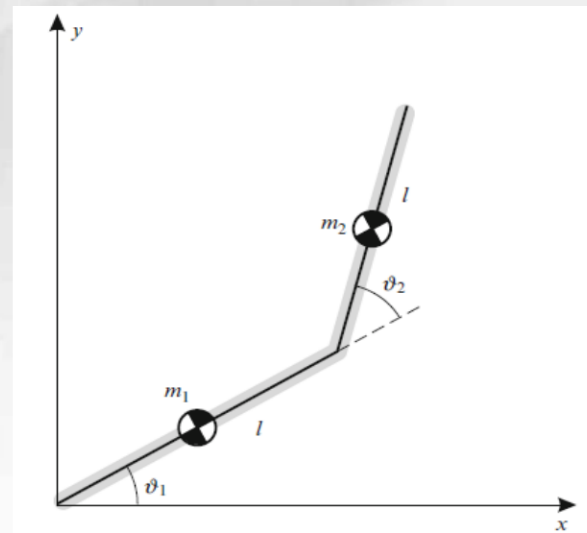
$$q = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tau = \mathbf{D}(q)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathbf{g}(q)$$

$$\mathbf{D}(q) = \begin{bmatrix} m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + 4m_2 r_1^2 + 4m_2 r_1 r_2 \cos \vartheta_2 & m_2 r_2^2 + 2m_2 r_1 r_2 \cos \vartheta_2 \\ m_2 r_2^2 + 2m_2 r_1 r_2 \cos \vartheta_2 & m_2 r_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\dot{\vartheta}_2 4m_2 r_1 r_2 \sin \vartheta_2 & -\dot{\vartheta}_2 2m_2 r_1 r_2 \sin \vartheta_2 \\ \dot{\vartheta}_1 2m_2 r_1 r_2 \sin \vartheta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(q) = \begin{bmatrix} m_1 g r_1 \cos \vartheta_1 + 2m_2 g r_1 \cos \vartheta_1 + m_2 g r_2 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ m_2 r_2 g \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix}$$

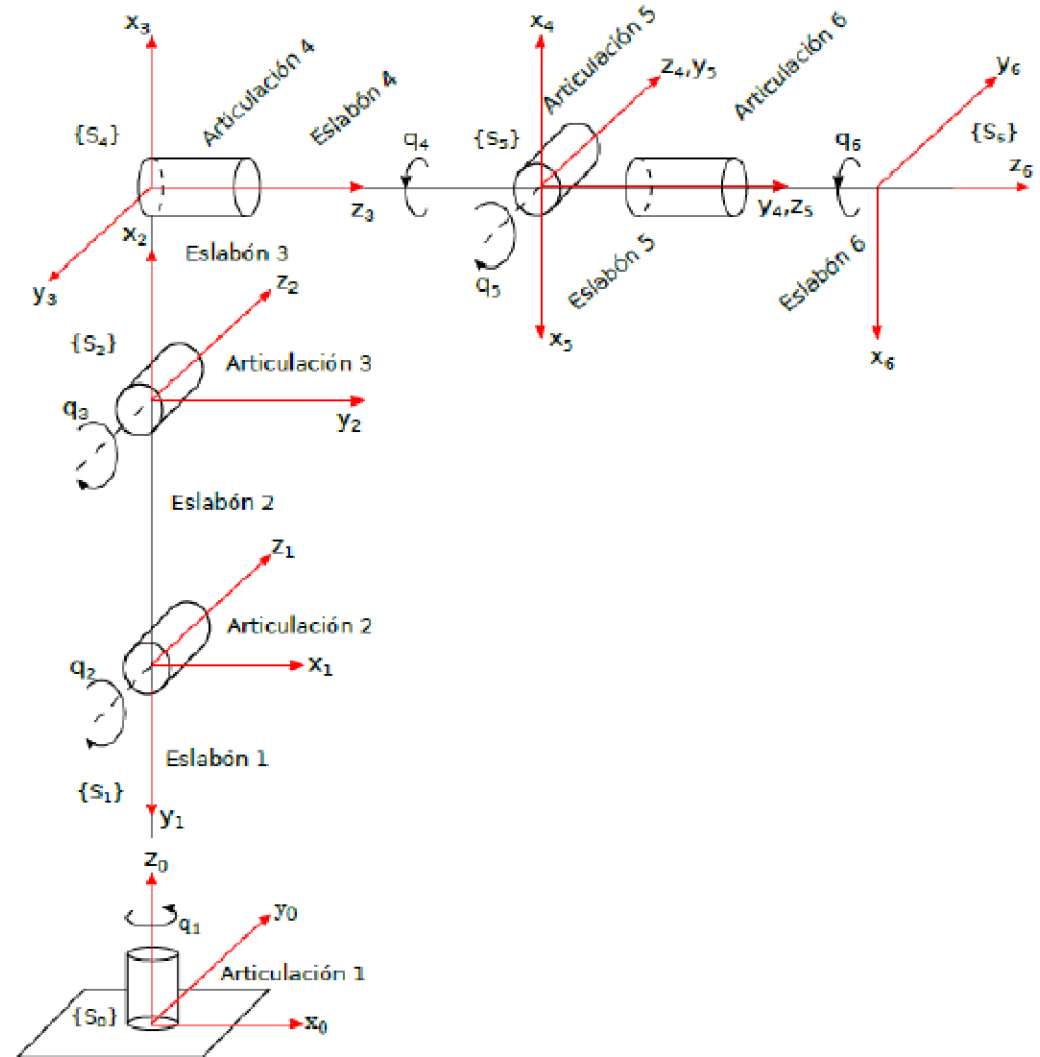


### OTRAS ESTRUCTURAS DINAMICAS

ROBOT ABB- IRB 120. 6 GDL



La Solución Dinámica es compleja de resolver por métodos analíticos. Se usan algoritmos recursivos computacionales como el método de Newton-Euler





# MODELO DINAMICO LAGRANGE

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau$$
$$\mathcal{L} = K - U$$

- **Método basado en la energía del sistema:  $L=K-U$**

- **Energía Cinética (K)**

- Debida al movimiento de un cuerpo (rígido):

$$U = mgh$$

(h: altura)

- **Energía Potencial (U)**

- Debida a la posición o a la configuración del cuerpo (rígido):

- Lagrangiano

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q)$$

Energía  
cinética

Energía  
potencial

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

$$\tau = \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial k}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \tau = M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\dot{\theta})$$

$\tau$  = Fuerzas/Pares generalizados en las articulaciones

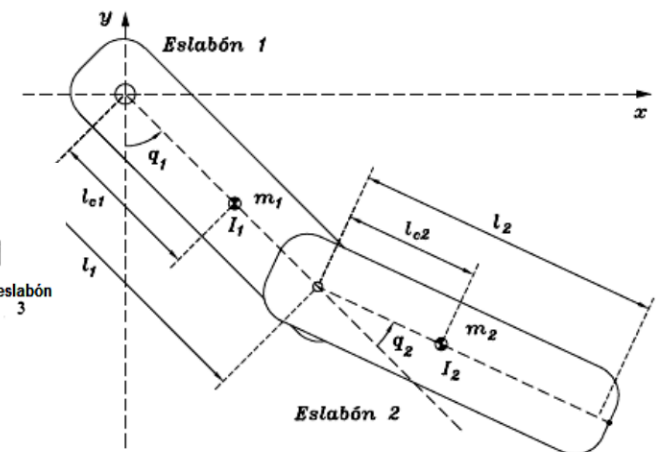
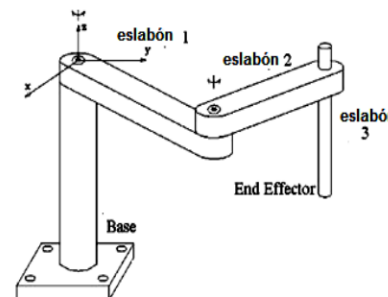
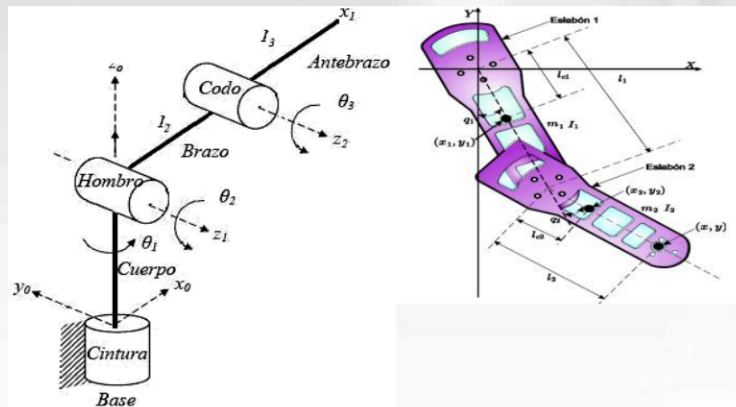
$\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$  = Coordenadas generalizadas y derivadas

$M(\theta)$  = Matriz de Inercia (Simétrica)

$V(\theta, \dot{\theta})$  = Vector de términos de Coriolis - Centrifugos

$G(\theta)$  = Vector de términos gravitatorios

$F(\dot{\theta})$  = Vector de fuerzas de rozamiento



## MODELO DINAMICO LAGRANGE

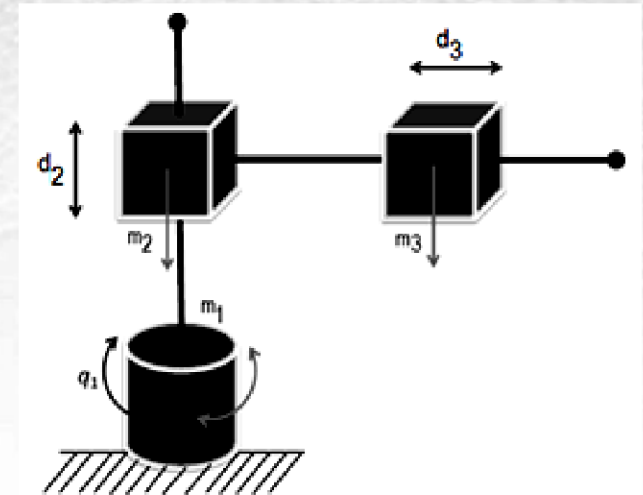
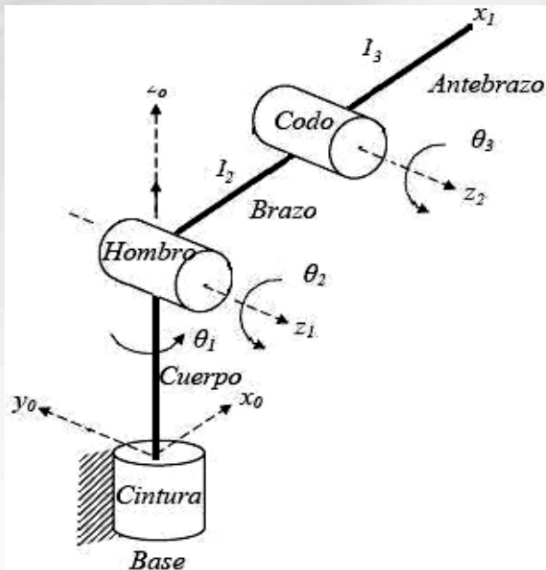
- Ecuaciones del movimiento
  - Formulación de Euler-Lagrange término a término:
- (Nota: El método suele llamarse Lagrange o Euler-Lagrange)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$$

$i = 1, \dots, n$   
 $n$  coordenadas  
 generalizadas

Fuerzas generalizadas  
 (hacen trabajo sobre  
 $q_i$ )

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$$





# MODELO DINAMICO LAGRANGE

- Lagrangiano:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$$

Energía  
cinética

Energía  
potencial

- Energía Cinética ( **K** )

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

$M(\mathbf{q})$  : matriz de inercia o masa

- Energía Potencial ( **U** )

$$U = - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{c_i}$$

$\mathbf{g}_0$  : vector de aceleración de gravedad

$\mathbf{p}_{c_i}$  : posición del CM del eslabón  $i$

$$M(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n m_i J_v^{iT} J_v^i + J_\omega^{iT} R_i \tilde{I}_i R_i^T J_\omega^i$$

$\tilde{I}_i$  : tensor de inercia del eslabón  $i$  en el sistema de referencia del eslabón  $i$  (constante)

$J_v^i$  : Jacobiano de velocidad lineal del centro de masa del eslabón  $i$

$J_\omega^i$  : Jacobiano de velocidad angular del eslabón  $i$

$m_i$  : masa del eslabón  $i$

$R_i$  : rotación (sistema del eslabón  $i$  con respecto al sistema de base)

$n$  : Número de articulaciones

CM: Centro de Masa

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

- Lagrangiano

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{c_i}$$

- Formulación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \boldsymbol{\tau}_{tot}$$

- Reemplazando se Obtiene

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\left( \dot{M}(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{\partial M(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right)}_{C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\left( - \sum_{i=1}^n J_v^{iT}(\mathbf{q}) m_i \mathbf{g}_0 \right)}_{\mathbf{g}(\mathbf{q})} = \boldsymbol{\tau}_{tot}$$

- Modelo dinámico:  $M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}_{tot}$

Nota:  $J_v^i(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{p}_{c_i}}{\partial \mathbf{q}}$

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

- Dinámica del robot en forma vectorial:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}_{tot}$$

donde

$\mathbf{q}$ : Coordenadas articulares generalizadas

$M(\mathbf{q})$ : Matriz de masa o inercia

$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ : Fuerzas centrífugas y de Coriolis

$\mathbf{g}(\mathbf{q})$ : Fuerzas gravitacionales

$\boldsymbol{\tau}_{tot}$ : Fuerzas generalizadas no conservativas

- Algunas propiedades:

$$M(\mathbf{q}) = M^T(\mathbf{q})$$

$$M(\mathbf{q}) \succ 0$$

$$\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \text{ es antisimétrico}$$



## MODELO DINAMICO. FUERZAS GENERALIZADAS

Componentes de la fuerza generalizada ( $\tau_{tot}$ ):  $\tau_{tot} = \tau + \tau_{ext} - \tau_m - \tau_{fr}$

- Torque aplicado (actuadores) en las articulaciones:  $\tau$

- Torque de las fuerzas y momentos externos:  $\tau_{ext} = J^T \begin{bmatrix} f_{ext} \\ m_{ext} \end{bmatrix}$

$J$ : Jacobiano geométrico del punto donde se aplica la fuerza

$f_{ext}$ : fuerza externa

$m_{ext}$ : momento (torque) externo

- Torque por la inercia del actuador  $\tau_m = I_m \ddot{q}$

$I_m$ : Tensor de inercia del motor

- Torque por la fricción en las articulaciones  $\tau_{fr} = F_s \operatorname{sgn}(\dot{q}) + F_v \dot{q}$

$F_s$ : matriz diagonal de fricción estática (Coulomb)

$F_v$ : matriz diagonal de fricción viscosa

## MODELO DINAMICO Inverso. Procedimiento

- Lagrangiano:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$$

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{c_k}$$

Reemplazando energía cinética y potencial

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{c_k}$$

Expresando en función de cada elemento

- Formulación de Euler-Lagrange término a término:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n$$

- Reemplazando:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \underbrace{\sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k \right)}_{C_{ij}} \dot{q}_j - \sum_{k=1}^n (J_{v_i}^k)^T m_k \mathbf{g}_0 = \tau_i$$

- Símbolos de Christoffel de primer tipo

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right)$$

Nota:

$$c_{ijk} = c_{ikj}$$

## MODELO DINAMICO Inverso. Procedimiento

- Formulación de Euler-Lagrange término a término:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k \dot{q}_j - \sum_{k=1}^n (J_{v_i}^k)^T m_k \mathbf{g}_0 = \tau_i \quad i = 1, \dots, n$$

- Interpretación:

– Para los términos de aceleración

- $m_{ij}$ : momento de inercia percibido en la articulación  $i$  cuando las otras articulaciones no se mueven
- $m_{ij}$ : efecto de aceleración de articulación  $i$  en articulación  $j$  (acoplamiento)

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$



## MODELO DINAMICO Inverso. Procedimiento

- Formulación de Euler-Lagrange término a término:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k \dot{q}_j - \sum_{k=1}^n (J_{v_i}^k)^T m_k \mathbf{g}_0 = \tau_i \quad i = 1, \dots, n$$

- Interpretación:

- Para términos de velocidad

- $c_{ijj} \dot{q}_j^2$ : fuerza centrífuga en articulación  $i$  debido a la velocidad de la articulación  $j$
- $c_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k$ : efecto de Coriolis en articulación  $i$  debido a la velocidad de artíc.  $j$  y  $k$ .

- Para la aceleración de la gravedad

$$g_i(\mathbf{q}) = - \sum_{k=1}^n \left( J_{v_i}^k \right)^T m_k \mathbf{g}_0$$

: momento en la articulación  $i$  debido a la gravedad (su peso)

**MODELO DINAMICO Inverso. Procedimiento**

1. Calcular la matriz de inercia (requiere calcular Jacobianos del CdM)

$$M(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n m_i J_v^{iT} J_v^i + J_\omega^i{}^T R_i \tilde{I} R_i^T J_\omega^i$$

2. Calcular la matriz de Coriolis  $C$ , cuyos elementos  $c_{ij}$  son:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k \quad \text{con} \quad c_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad \text{Nota: } c_{ijk} = c_{ikj}$$

3. Calcular el vector de gravedad, cuyo componente  $i$  es:

$$g_i = - \sum_{k=1}^n (J_{v_i}^k)^T m_k \mathbf{g}_0$$

4. Determinar las fuerzas generalizadas que actúan sobre cada articulación ( $\tau_{tot}$ )

5. El modelo dinámico es:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}_{tot}$$

$n$ : número de articulaciones  
 $m_{ij}$ : elementos de la matriz  $M$

# MODELO DINAMICO LAGRANGE

## DINÁMICA: Masa Puntual

Modelo dinámico de la masa puntual

- Método por la segunda ley de Newton
- Método formulación de Lagrange

## Solución

a) Usando la ley de Newton:  $\sum_i f_i = m\ddot{y}$

$$f - mg = m\ddot{y} \Rightarrow \boxed{m\ddot{y} + mg = f}$$

b) Usando Lagrange:

- Energía cinética:  $K = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$

- Energía potencial:  $U = mgy$

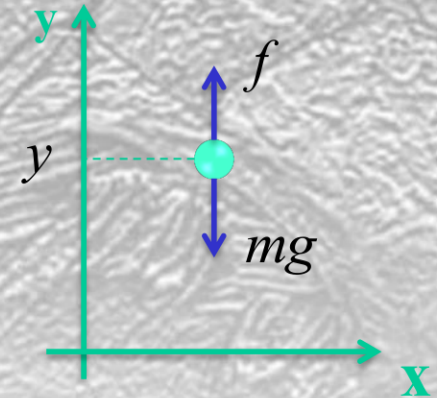
- Lagrangiano:  $L = K - U$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = f$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{y}) + mg = f$$

$$\boxed{m\ddot{y} + mg = f}$$





## MODELO MONOARTICULAR. MASA CONCENTRADA

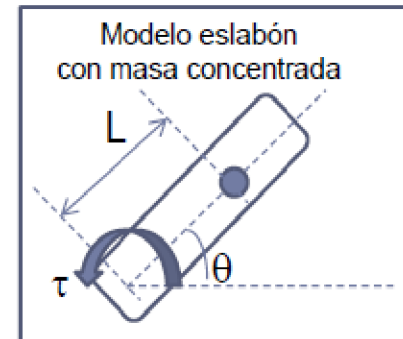
## DINÁMICA - FORMULACIÓN DE LAGRANGE

## EJEMPLO 1: Modelo eslabón con masa concentrada

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

siendo

$q_i$  = coord. articulaciones  
 $\tau$  = vector de fuerzas y pares aplicados en las  $q_i$   
 $L$  = lagrangiano  
 $K$  = energía cinética  
 $U$  = energía potencial



$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q)$$

$$L = K - U = \frac{1}{2} ML^2 \dot{\theta}^2 - M g L \sin \theta$$

1er paso: Energía cinética (K)

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$I = ML^2$$

2º paso: Energía potencial (U)

$$U = Mgh = M g L \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -MgL \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ML^2 \dot{\theta}$$

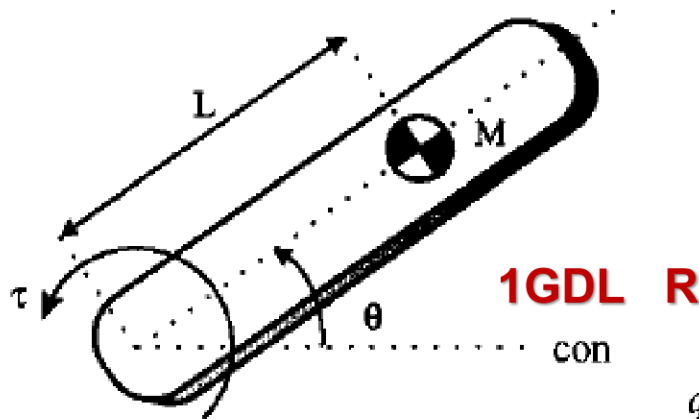
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = ML^2 \ddot{\theta}$$

Ecuación de movimiento

$$ML^2 \ddot{\theta} + M g L \cos \theta = \tau$$

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

## MODELO MONOARTICULAR



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau$$

$$\mathcal{L} = k - u$$

$$\mathcal{L}(\Theta, \dot{\Theta}) = k(\Theta, \dot{\Theta}) - u(\Theta)$$

$q_i$ : coordenadas generalizadas (en este caso las articulares).

$\tau$ : vector de fuerzas y pares aplicados en las  $q_i$ .

$\mathcal{L}$ : Función Lagrangiana.

$k$ : energía cinética.

$u$ : energía potencial.

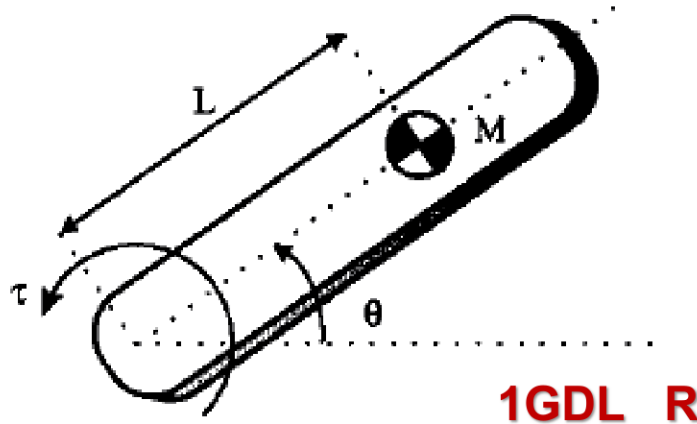
$$u_i = -m_i^0 g^{T0} P_{C_i} + u_{ref}$$

$$\text{Total } u = \sum_{i=1}^n u_i$$

La formulación Lagrangiana es un método de balance de energías entre la cinética y la potencial sobre los elementos del robot. Es comparable al análisis dinámico de Newton-Euler, donde se podría decir que es un balance de fuerzas dinámicas.

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

## MODELO MONOARTICULAR



$$k = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$u = Mgh = MgL \sin \theta$$

$$\mathcal{L} = k - u = \frac{1}{2} ML^2 \dot{\theta}^2 - MgL \sin \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -MgL \cos \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ML^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ML^2 \ddot{\theta}$$



$$ML^2 \ddot{\theta} + MgL \cos \theta = \tau$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau$$

$$\mathcal{L} = k - u$$

$$\mathcal{L}(\Theta, \dot{\Theta}) = k(\Theta, \dot{\Theta}) - u(\Theta)$$

$$u_i = -m_i^0 g^{T0} P_{Ci} + u_{ref}$$

$$\text{Total } u = \sum_{i=1}^n u_i$$



# MODELO DINAMICO LAGRANGE

## CASO 1 - Modelo MONOARTICULAR: Péndulo simple

Modelo dinámico Inverso de un péndulo simple

Método formulación de Lagrange

### Solución

- Posición y velocidad de la masa:

$$x = l \sin \theta \quad \rightarrow \quad \dot{x} = \dot{\theta} l \cos \theta$$

$$y = -l \cos \theta \quad \rightarrow \quad \dot{y} = \dot{\theta} l \sin \theta$$

- Energía potencial:

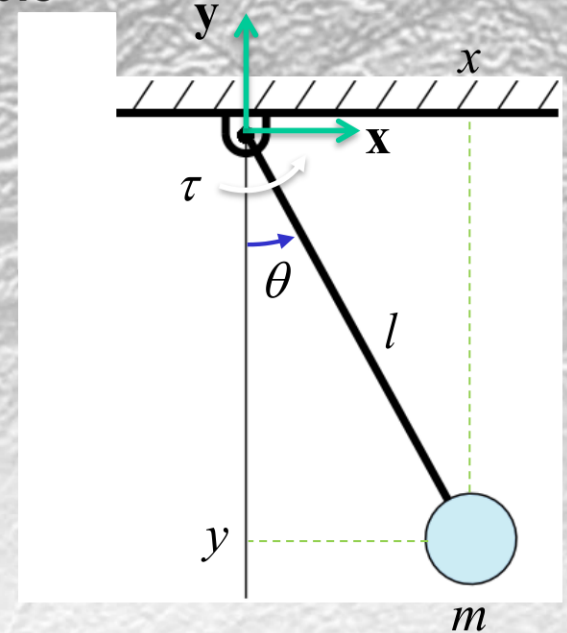
$$U = mg(-l \cos \theta)$$

- Energía Cinética:

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{\theta}^2 l^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2 l^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

- Lagrangiano:  $L = K - U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m g l \cos \theta$



# MODELO DINAMICO LAGRANGE

## CASO 1 - Modelo MONOARTICULAR: Péndulo simple

- Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

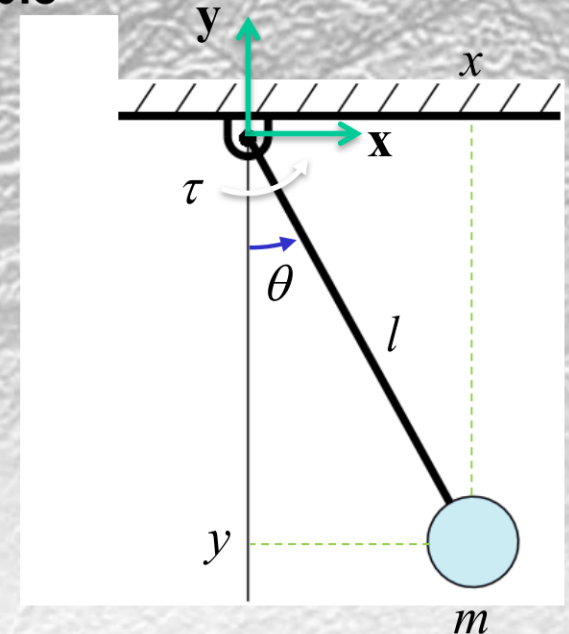
- Derivadas

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta}$$

- Formulación de Euler-Lagrange:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau$

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = \tau$$



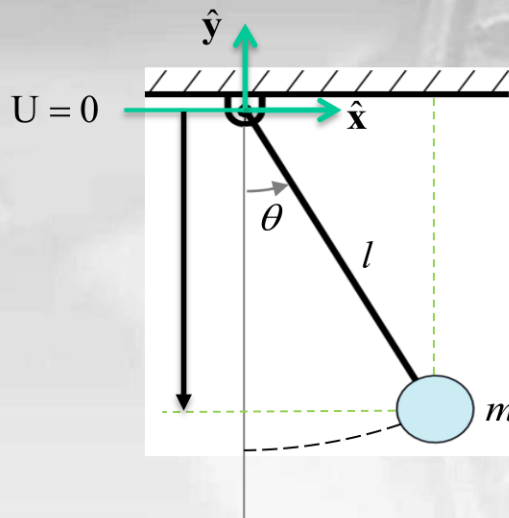
$$q_i = \theta$$

# MODELO DINAMICO LAGRANGE

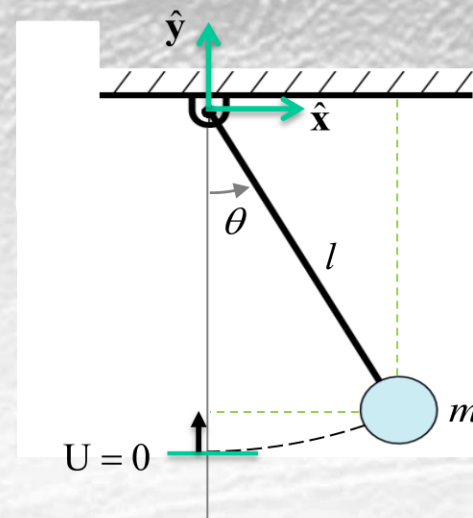
## 1 - Modelo MONOARTICULAR: Péndulo simple

- Nota Sobre la Energía Potencial de Referencia**

- La energía potencial se define como cero en un punto arbitrario
- Se puede tomar otro sistema de referencia



$$U = mg(-l \cos \theta)$$



$$U = mg(l - l \cos \theta) = mgl(1 - \cos \theta)$$

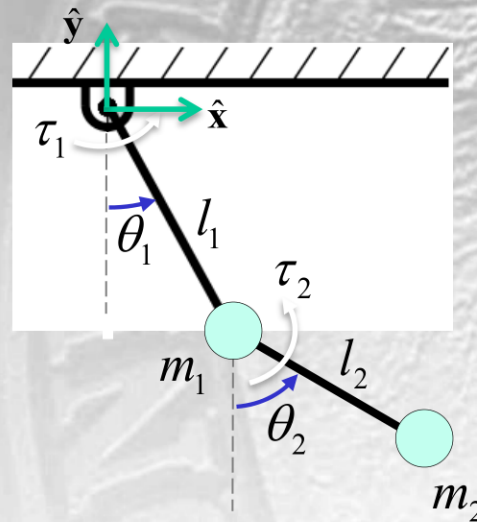
- Lo que interesa es  $\frac{\partial U}{\partial \theta}$  que es igual en cualquier caso



## MODELO DINAMICO LAGRANGE

### CASO 2 - Modelo MULTI ARTICULAR: Péndulo Doble. (Sistema 2R)

Modelo dinámico de un péndulo doble. Método formulación de Lagrange



**Respuesta:**

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2c_{1-2} + m_2l_2\dot{\theta}_2^2s_{1-2} + (m_1 + m_2)gs_1 = \tau_1$$

$$m_2l_2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1\ddot{\theta}_1c_{1-2} - m_2l_1\dot{\theta}_1^2s_{1-2} + m_2gs_2 = \tau_2$$

# MODELO DINAMICO LAGRANGE

## CASO 2 - Modelo MULTI ARTICULAR: Péndulo Doble. (Sistema 2R)

$$K(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c_{1-2})$$

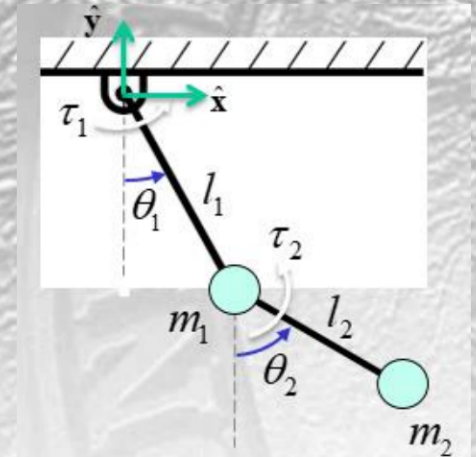
$$U(\theta) = -(m_1 + m_2)gl_1 c_1 - m_2 gl_2 c_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s_{1-2} - (m_1 + m_2)gl_1 s_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 c_{1-2} \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 c_{1-2} + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 s_{1-2} - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s_{1-2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s_{1-2} - m_2 gl_2 s_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 c_{1-2} \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 c_{1-2} + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s_{1-2} - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s_{1-2}$$



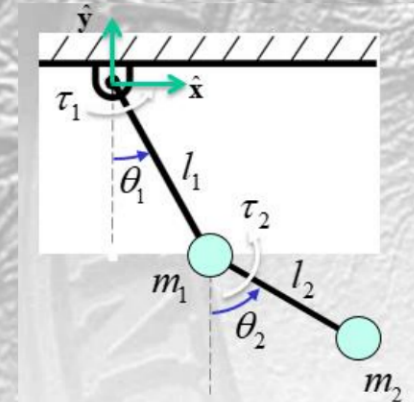
# MODELO DINAMICO LAGRANGE

## CASO 2 - Modelo MULTI ARTICULAR: Péndulo Doble. (Sistema 2R)

Forma matricial con la estructura:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

Respuesta:



$$\underbrace{\begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1 & m_2l_2c_{1-2} \\ m_2l_1c_{1-2} & m_2l_2 \end{bmatrix}}_{M(\theta)} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\theta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & m_2l_2\dot{\theta}_2s_{1-2} \\ -m_2l_1\dot{\theta}_1s_{1-2} & 0 \end{bmatrix}}_{C(\theta, \dot{\theta})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\theta}} + \underbrace{g \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)s_1 \\ m_2s_2 \end{bmatrix}}_{g(\theta)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}}_{\tau}$$

Matriz de masa

Componente de  
Coriolis y fuerzas  
centrífugas

Componente de  
gravedad



## MODELO DINAMICO LAGRANGE

### CASO 3 - Modelo MULTI ARTICULAR: Péndulo con Articulación Esférica.

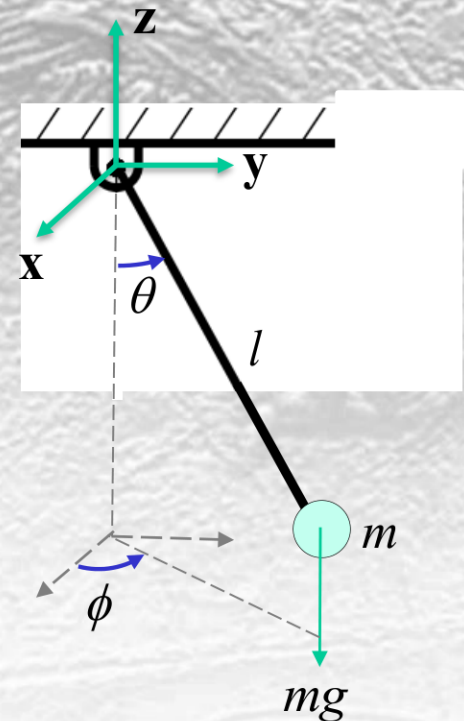
#### CASO PARTICULAR.

Se Plantea una Articulación esférica o rótula. La masa puntual  $m$  se une, a través del eslabón o barra despreciable, a una articulación esférica () o Rótula.

La masa puntual depende de 2 ángulos, donde  $\mathbf{q} = (\theta, \phi)$ , donde  $\theta$  mide la distancia angular del eje  $z$ , y  $\phi$  mide la distancia angular del eje  $x$ .

#### Se Plantea el cálculo de la Dinámica del Sistema

Método Formulación de Lagrange



**Respuesta:**

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta - ml^2\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$ml^2\ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2ml^2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta \cos \theta = 0$$

**MODELO DINAMICO LAGRANGE****CASO 3 - Modelo MULTI ARTICULAR: Péndulo con Articulación Esférica.****Procedimiento:**

- Formular la masa puntual en coordenadas (x,y,z) en función de los ángulos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \sin \theta \cos \phi \\ l \sin \theta \sin \phi \\ -l \cos \theta \end{bmatrix}$$

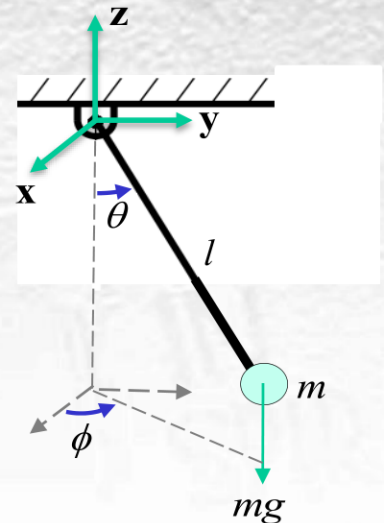
- Energía cinética del péndulo. Componentes de velocidad en x, y, z

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

- Energía potencial del péndulo

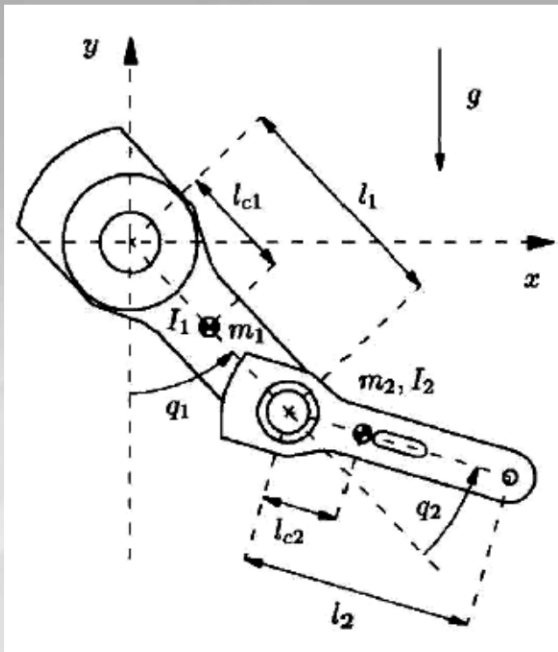
$$\mathcal{U} = -mgl \cos \theta$$

- Formulación de Lagrange
- Resolver. Presentar los resultados



## MODELO DINAMICO LAGRANGE

## CASO 4 - MODELO MULTIARTICULAR 2GDL (Sistema R + R)



## Robot de 2 grados de Libertad

- Energía Cinética k1:

$$v_1^2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2$$

$$k_1 = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 l_{c1}^2 + I_1) \dot{q}_1^2$$

- Energía Cinética y potencial del 2º eslabón

$$\mathbf{v}_2 = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} =$$

$$\begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}$$

- Energía Potencial u1

$$v_2^2 =$$

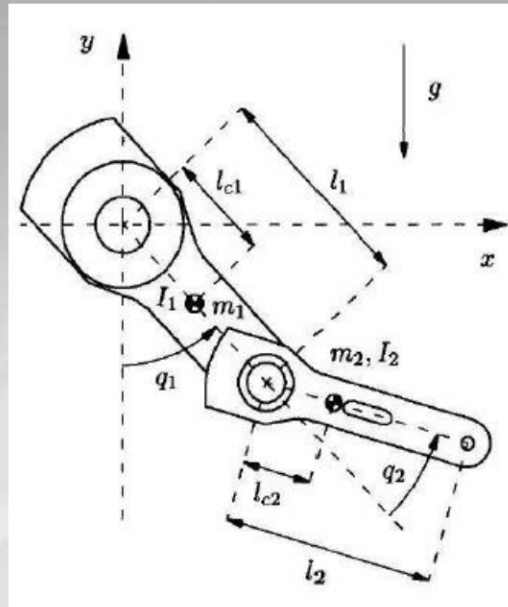
$$l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 + 2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2)$$

$$u_1 = -m_1 l_{c1} g \cos(q_1)$$



# MODELO DINAMICO LAGRANGE

## CASO 4 - MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



$$L(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t)).$$

$$K(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}),$$

$$= \left[ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right].$$

$$x_1 = l_{c1} \sin(q_1),$$

$$y_1 = -l_{c1} \cos(q_1),$$

$$x_2 = l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2),$$

$$y_2 = -l_1 \cos(q_1) - l_{c2} \cos(q_1 + q_2),$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}.$$

Las velocidades al cuadrado

$$v_1^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2,$$

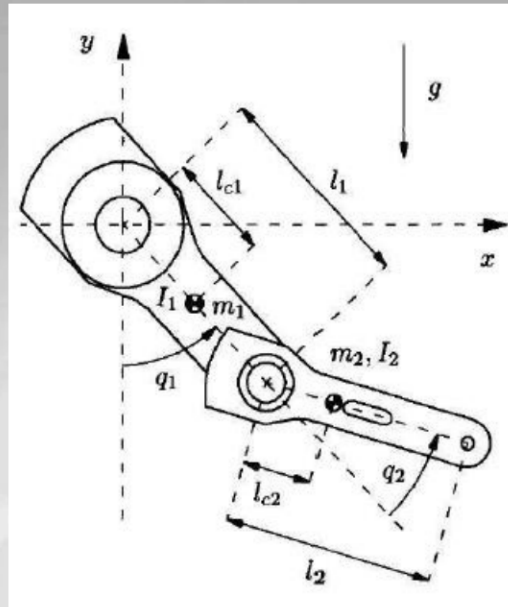
$$v_2^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c1}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + 2l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2).$$

$$K(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}),$$

$$U(q) = U_1(q) + U_2(q).$$

# MODELO DINAMICO LAGRANGE

## CASO 4 - MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}.$$

Las velocidades al cuadrado

$$v_1^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2,$$

$$v_2^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c1}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + 2l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2).$$

$$v_2^T v_2 = [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + 2[l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2.$$

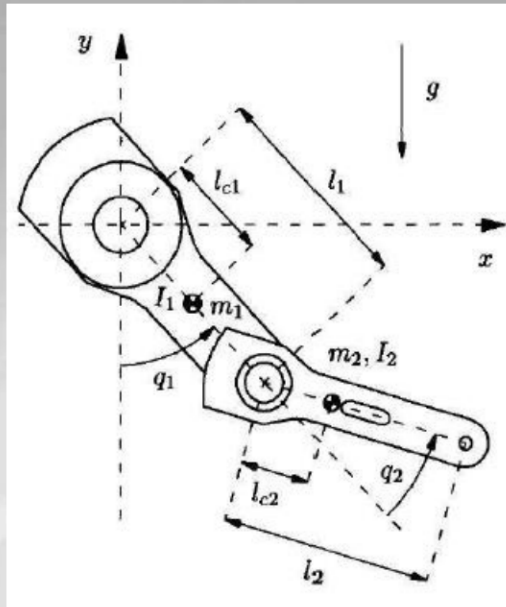
$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$$

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \dot{q}_1^2$$

$$+ m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2.$$

# MODELO DINAMICO LAGRANGE

## CASO 4 - MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



Las velocidades al cuadrado

$$v_1^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2,$$

$$v_2^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c1}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + 2l_1l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2] \cos(q_2).$$

$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$$

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \dot{q}_1^2 + m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2] \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2.$$

Otra Forma de Ver

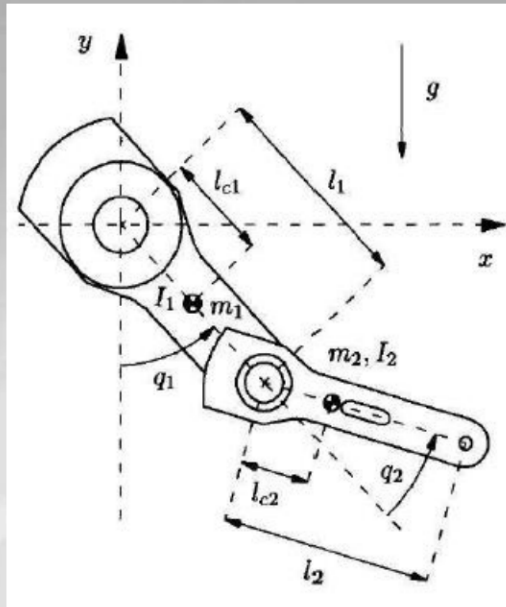
$$v_2^T v_2 = [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + 2[l_{c2}^2 + l_1l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1\dot{q}_2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2.$$

$$\begin{aligned} K_2(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2, \\ &= \frac{1}{2} [m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} [m_2 l_{c2}^2 + I_2] \dot{q}_2^2 \\ &\quad + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \dot{q}_1\dot{q}_2. \end{aligned}$$



## MODELO DINAMICO LAGRANGE

## CASO 4 - MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



Lagrange

$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$$

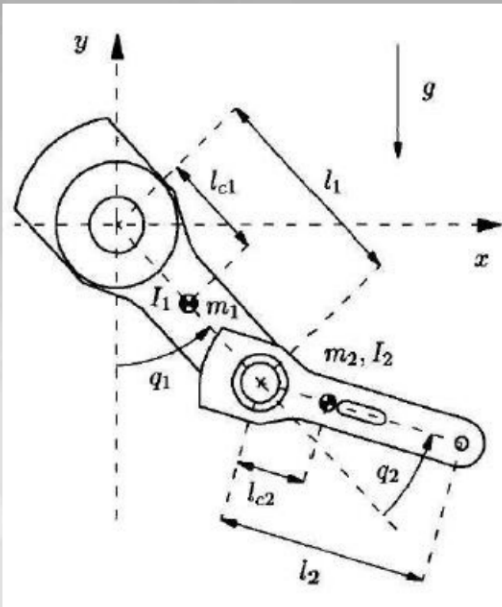
$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 l_{11}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \dot{q}_1^2 \\ + m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2.$$

$$U(q) = U_1(q) + U_2(q) = [-m_1 l_{c1} g \cos(q_1)] \\ + [-m_2 l_1 g \cos(q_1) \\ - m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)].$$

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 \\ + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \dot{q}_1^2 \\ + m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) \\ + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 + m_1 l_{c1} g \cos(q_1) + m_2 l_1 g \cos(q_1) \\ + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2).$$

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

### CASO 4 - MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



$$\begin{aligned}
 L(q, \dot{q}) = & \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 \\
 & + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \dot{q}_1^2 \\
 & + m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) \\
 & + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 + m_1 l_{c1} g \cos(q_1) + m_2 l_1 g \cos(q_1) \\
 & + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_1} &= \tau_1, \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_2} &= \tau_2,
 \end{aligned}$$

Para el Eslabón 1

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} = & [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2] \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\
 & + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) [2\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\
 & + I_1 \dot{q}_1 + I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2],
 \end{aligned}$$



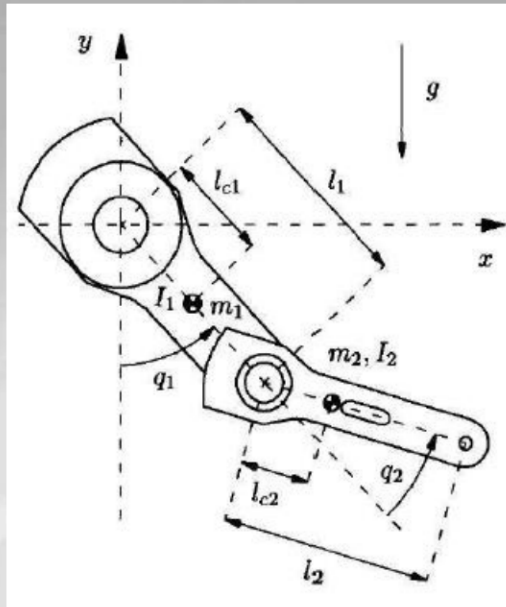
$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right] = & [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1 \\
 & + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_2 \\
 & - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
 & - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + I_1 \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2],
 \end{aligned}$$



$$\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_1} = -[m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) - m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2).$$

## MODELO DINAMICO LAGRANGE

### CASO 4 - MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_1} = \tau_1,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_2} = \tau_2,$$

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) = & \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 \\ & + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \dot{q}_1^2 \\ & + m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) \\ & + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 + m_1 l_{c1} g \cos(q_1) + m_2 l_1 g \cos(q_1) \\ & + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

Para el Eslabón 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} = & m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_1 \\ & + I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2], \end{aligned}$$



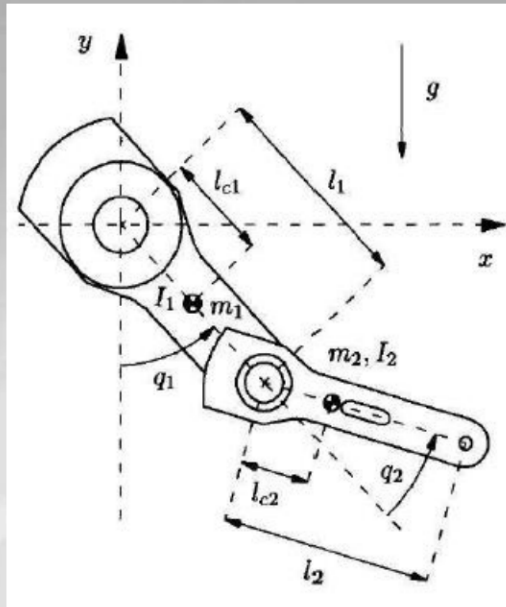
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right] = & m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 \\ & - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_2} = & -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \\ & - m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2). \end{aligned}$$



# MODELO DINAMICO LAGRANGE

## CASO 4 - MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_1} = \tau_1,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_2} = \tau_2,$$

Planteo de Lagrange  
TORQUE

Torque Eslabón 1

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \left[ m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right] \ddot{q}_1 \\ & + \left[ m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right] \ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + I_1 \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] \\ & + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2), \end{aligned}$$



Torque Eslabón 2

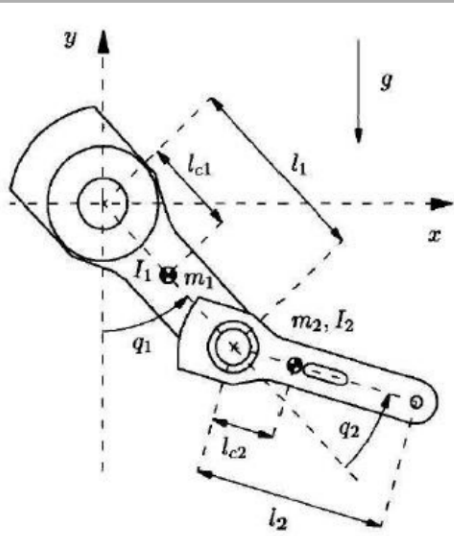
$$\begin{aligned} \tau_2 = & m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] \\ & + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2). \end{aligned}$$



## MODELO DINAMICO LAGRANGE

### CASO 4 - MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R

### Planteo de Lagrange



$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q).$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}$$



Torque Eslabón 1

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \left[ m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right] \ddot{q}_1 \\ & + \left[ m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right] \ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + I_1 \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] \\ & + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2), \end{aligned}$$

Torque Eslabón 2

$$\begin{aligned} \tau_2 = & m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] \\ & + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

$$M_{11}(q) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2,$$

$$M_{12}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2,$$

$$M_{21}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2,$$

$$M_{22}(q) = m_2 l_{c2}^2 + I_2,$$

$$C_{11}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2,$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2],$$

$$C_{21}(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1,$$

$$C_{22}(q, \dot{q}) = 0,$$

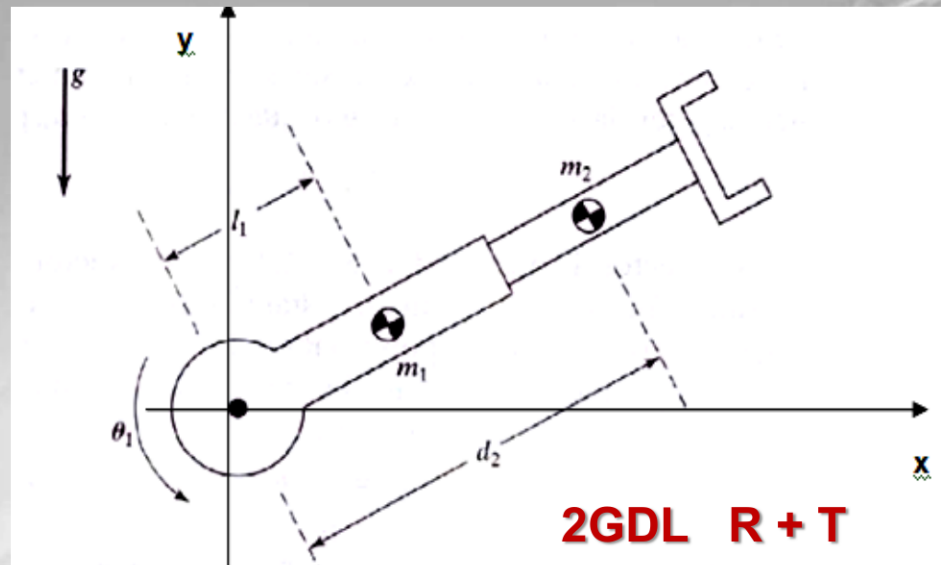
$$g_1(q) = [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2),$$

$$g_2(q) = m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2),$$



## MODELO DINAMICO LAGRANGE

## CASO 5 - MODELO MULTIARTICULAR. 2GDL (Sistema R+T)



$K_1$ . Energía cinética, suma del aporte de movimiento debido a la velocidad lineal y el aporte de la velocidad de rotación.

$$k_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{zz1} \dot{\theta}_1^2$$

$$k_2 = \frac{1}{2} m_2 (d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{d}_2^2) + \frac{1}{2} I_{zz2} \dot{\theta}_1^2$$

**Fuente.** John J. Craig.  
 “Robótica”. Capítulo 6.  
 Dinámica de manipuladores.  
 Pag 184. 3era. Edición. Ed.  
 Pearson. Prentice Hall 2003.

$$k(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2$$

$$u_1 = m_1 l_1 g \sin(\theta_1) + m_1 l_1 g$$

$$u_2 = m_2 g d_2 \sin(\theta_1) + m_2 g d_{2\max}$$

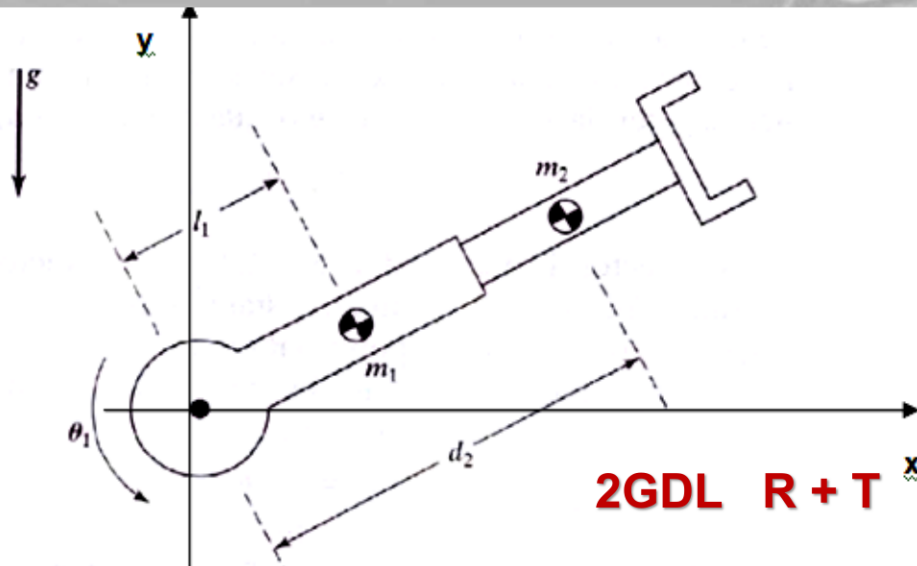
$$u(\Theta) = g(m_1 l_1 + m_2 d_2) \sin(\theta_1) + m_1 l_1 g + m_2 g d_{2\max}$$



## MODELO DINAMICO LAGRANGE

## CASO 5 - MODELO MULTIARTICULAR. 2GDL (Sistema R+T)

Eslabón doble con movimientos lineales y angulares.



$$\frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} = \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \dot{\theta}_1 \\ m_2 d_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} g(m_1 l_1 + m_2 d_2) \cos(\theta_1) \\ g m_2 \sin(\theta_1) \end{bmatrix}.$$

Fuente. John J. Craig. "Robótica". Capítulo 6.  
Dinámica de manipuladores. Pag 184. 3era.  
Edición. Ed. Pearson. Prentice Hall 2003.

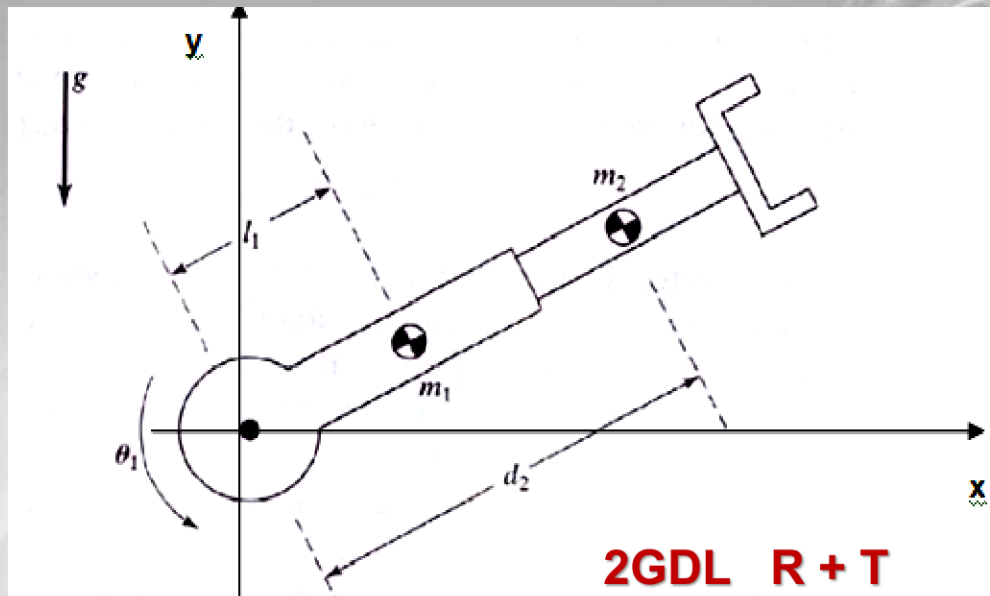
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial k}{\partial \Theta} + \frac{\partial u}{\partial \Theta} = \tau$$

$$\tau_1 = (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos(\theta_1),$$

$$F_2 = m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \sin(\theta_1).$$

# MODELO DINAMICO LAGRANGE

## CASO 5 - MODELO MULTIARTICULAR. 2GDL (Sistema R+T)



$$\tau_1 = (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos(\theta_1),$$

$$F_2 = m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \sin(\theta_1).$$

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

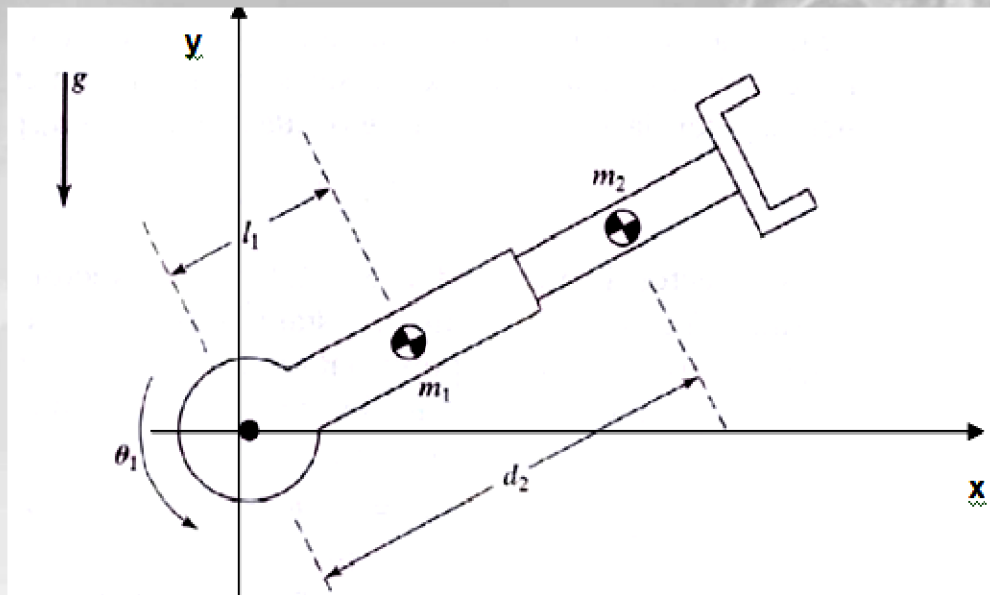
$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 2m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix},$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos(\theta_1) \\ m_2 g \sin(\theta_1) \end{bmatrix}.$$

Fuente. John J.Craig. "Robótica". Capítulo6.  
Dinámica de manipuladores. Pag 184.3era.  
Edición. Ed. Pearson.Pretince Hall 2003.

**MODELO DINAMICO NEWTON – EULER****CASO 5 - MODELO MULTIARTICULAR. 2GDL (Sistema R+T)**

La dinámica se basa en el planteamiento del equilibrio de fuerzas establecido en la 2ª Ley de Newton y la Ley de Euler (su equivalente para movimientos de rotación)



$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \sum \vec{F}(t)$$

$$\mathbf{I} \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} + \vec{\omega}(t) \times (\mathbf{I} \vec{\omega}(t)) = \vec{T}(t)$$

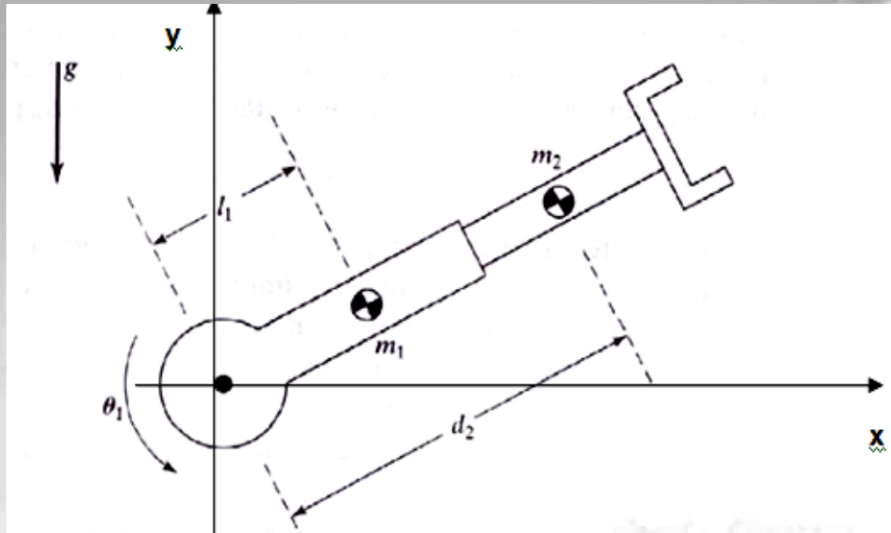
Fuerzas y Pares de Fuerzas que Intervienen:

- 1-Inercia
- 2-Fuerza de Coriolis
- 3-Fuerza Centrifuga
- 4-Gravedad

**MODELO DINAMICO NEWTON – EULER**

Se basa en el planteo del Equilibrio de Fuerzas y Momentos



**MODELO DINAMICO NEWTON – EULER****CASO 5 - MODELO MULTIARTICULAR. 2GDL (Sistema R+T)**

**Fuerzas y Pares de Fuerzas que Intervienen:**

- 1-Inercia
- 2-Fuerza de Coriolis
- 3-Fuerza Centrifuga
- 4-Gravedad

$$\tau_1 = (m_1 l_1^2 + I_{zz1}) \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g \cos(\theta_1)$$

$$F_2 = (I_{zz2} + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 \ddot{d}_2 - 2m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 d_2 g \cos(\theta_1) + m_2 g \sin(\theta_1)$$

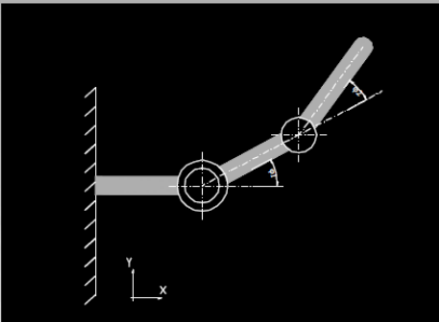
$$= (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos(\theta_1) + m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \sin(\theta_1)$$

La expresión muestra los efectos combinados y su influencia en la composición de las fuerzas y pares de fuerzas que intervienen en el sistema. Lo marcado en los recuadros muestra los efectos sobre la articulación 1 (Torque 1).

# MODELO DINAMICO LAGRANGE

MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R

Planteo de Lagrange



$$T = \frac{1}{2} m_i \cdot v^2 \quad \text{ENERGIA CINETICA}$$

$$T = \frac{m_1 L_1^2 \dot{\phi}_1^2}{2} + \frac{m_2}{2} \left[ (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos \phi_2) \dot{\phi}_1^2 + L_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2(L_1 L_2 \sin \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \right]$$

$$U = [m_1 g L_1 \sin \phi_1 + m_2 g (L_1 \sin \phi_1 + L_2 \sin(\phi_1 + \phi_2))] \quad \text{ENERGIA POTENCIAL}$$

En base a esta ecuación se podrán calcular las fuerzas de rotación en las articulaciones 1 y 2 a partir de la siguiente expresión:

$$\tau_n = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_n} - \frac{\partial L}{\partial \phi_n}$$

Obteniéndose las siguientes ecuaciones del modelo

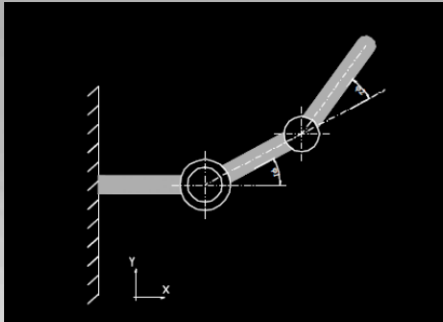
$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \phi_1}$$

$$\tau_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \phi_2}$$

# MODELO DINAMICO LAGRANGE

MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R

Planteo de Lagrange



Donde:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = m_1 L_1 \dot{\phi}_1 + m_2 (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos \phi_2) \dot{\phi}_1 + m_2 (L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos \phi_2) \dot{\phi}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = m_2 L_2 \dot{\phi}_2 + m_2 (L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos \phi_2) \dot{\phi}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_1} = -m_1 g L_1 \cos \phi_1 - m_2 g [L_1 \cos \phi_1 + L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_2} = -m_2 g L_2 \sin \phi_2 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2) - m_2 g L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = m_1 L_1 \ddot{\phi}_1 + m_2 (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos \phi_2) \ddot{\phi}_1 - (2m_2 L_1 L_2 \sin \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + m_2 (L_2^2 + L_1 L_2 \cos \phi_2) \ddot{\phi}_2 - (m_2 L_1 L_2 \sin \phi_2) \dot{\phi}_2^2$$

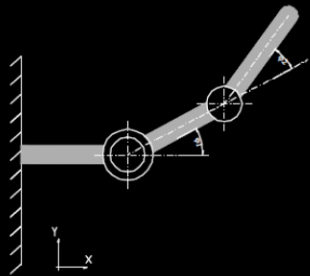
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = m_2 \left( L_2^2 + L_1 L_2 \cos \phi_2 \right) \ddot{\phi}_1 + m_2 L_2^2 \ddot{\phi}_2 - (m_2 L_1 L_2 \sin \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2$$



## MODELO DINAMICO LAGRANGE

MODELO MULTIARTICULAR 2GDL R + R

Planteo de Lagrange



Operando y ordenando se obtiene el modelo del brazo

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}\dot{\phi}_2 & C_{12}(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \\ C_{21}\dot{\phi}_1 & C_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

 $\tau_1$  y  $\tau_2$  son los torques aplicados directamente en las articulaciones

$$M_{11} = (m_1 + m_2)L_1^2 + m_2L_2^2 + 2m_2L_1L_2 \cos\phi_2$$

$$M_{12} = M_{21} = m_2L_2^2 + m_2L_1L_2 \cos\phi_2$$

$$M_{22} = m_2L_2^2$$

$$C = m_2L_1L_2 \sin\phi_2 \Rightarrow C_{11} = -C$$

$$C_{12} = -C$$

$$C_{21} = C$$

$$C_{22} = 0$$

$$N_1 = (m_1 + m_2)gL_1 \cos\phi_1 + m_2gL_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)$$

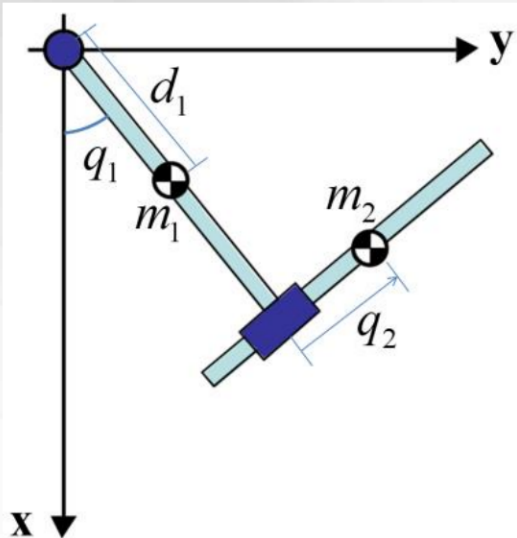
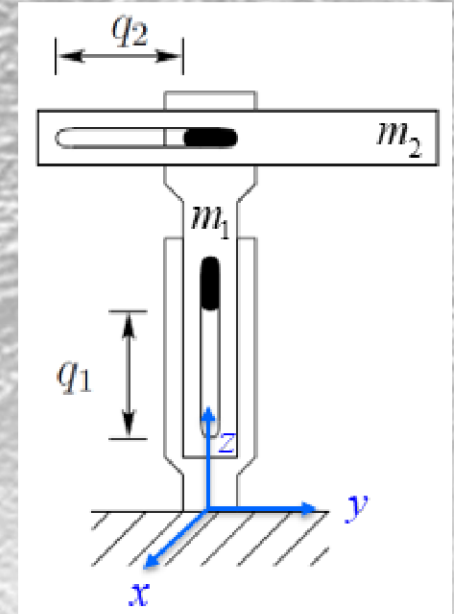
$$N_2 = m_2gL_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)$$

# OTRAS ESTRUCTURAS DINAMICAS

Estructura tipo manipulador Multiarticulador de 2GDL (2T).  
La fuerza en cada articulación es

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 + m_2 \\ 0 \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Sistema Planar de 2GDL (R+T). Distancia del CM del eslabón 1 al origen de la articulación 1 es  $d_1$ , CM del eslabón 2 al origen de la articulación 2 es  $d_2$ . Longitudes totales:  $l_1$  y  $l_2$ . Momentos de inercia de cada eslabón, con respecto al eje z son  $I_{zz1}$  y  $I_{zz2}$ .



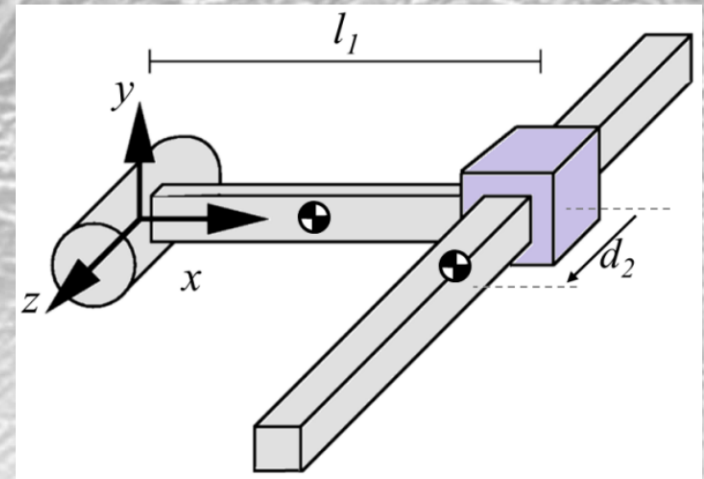
$$M = \begin{bmatrix} m_1 d_1^2 + m_2 (l_1^2 + q_2^2) + I_{zz1} + I_{zz2} & m_2 l_1 \\ m_2 l_1 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 q_2 \dot{q}_2 & m_2 q_2 \dot{q}_1 \\ -m_2 q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} m_1 d_1 \sin q_1 + m_2 (l_1 \sin q_1 + q_2 \cos q_1) \\ m_2 \sin q_1 \end{bmatrix}$$

## OTRAS ESTRUCTURAS DINAMICAS

Sistema Multiarticular 2GDL (R+T). El CM del primer eslabón se encuentra a la mitad de su longitud ( $l_1$ ). El CM del segundo eslabón se desplaza  $d_2$ , articulación prismática. El sistema está afectado por la gravedad.



$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}m_1l_1^2 + m_2l_1^2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{q}$$

$$g = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_1l_1 \cos q_1 + m_2l_1 \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}m_1l_1^2 + m_2l_1^2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{q} + g \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_1l_1 \cos q_1 + m_2l_1 \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



## OTRAS ESTRUCTURAS DINAMICAS

### Sistema Multiarticular 3GDL (T+R+R).

El sistema está afectado por la gravedad.

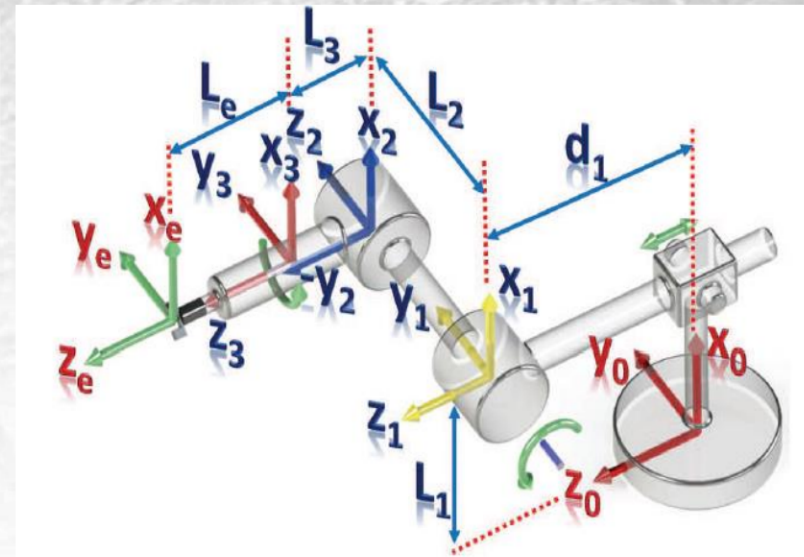
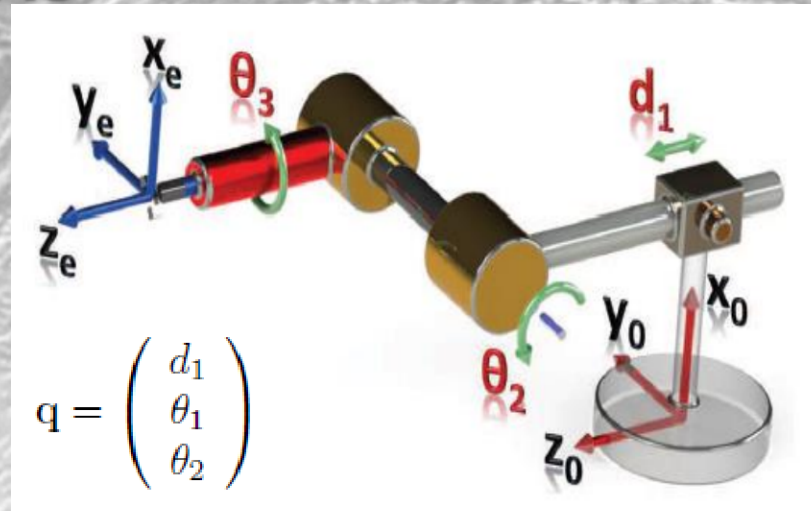
$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \Gamma$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (m_2 + m_3) \ddot{d}_1 - m_3 (L_3 + l_3) \ddot{\theta}_2 s_2 - m_3 (L_3 + l_3) \dot{\theta}_2^2 c_2 \\ \tau_2 &= -m_3 (L_3 + l_3) \ddot{d}_1 s_2 + (I_{x_3} s_3^2 + I_{y_3} c_3^2 + m_3 (L_3 + l_3)^2 + I_{z_2}) \ddot{\theta}_2 \\ &\quad + 2(I_{x_3} - I_{y_3}) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 s_3 c_3 + m_3 g (L_3 + l_3) c_2 \\ \tau_3 &= I_{z_3} \ddot{\theta}_3 + (-I_{x_3} + I_{y_3}) \dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 \end{aligned}$$

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_2 + m_3 & -m_3 (L_3 + l_3) s_2 & 0 \\ -m_3 (L_3 + l_3) s_2 & I_{x_3} s_3^2 + I_{y_3} c_3^2 + m_3 (L_3 + l_3)^2 + I_{z_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_3} \end{pmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 (L_3 + l_3) \dot{\theta}_2 c_2 & 0 \\ 0 & (I_{x_3} - I_{y_3}) \dot{\theta}_3 s_3 c_3 & (I_{x_3} - I_{y_3}) \dot{\theta}_2 s_3 c_3 \\ 0 & (-I_{x_3} + I_{y_3}) \dot{\theta}_2 s_3 c_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ m_3 g (L_3 + l_3) c_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}$$



## **MODELO DINAMICO CON ARTICULACIONES ELÁSTICAS**

La presencia de articulaciones elásticas es una característica muy común en robots industriales de la actualidad. La elasticidad en las articulaciones podría surgir de algunas fuentes, como la elasticidad en las marchas, transmisiones, drivers armónicos entre otros. Por consiguiente, se deduce que un tiempo de desplazamiento variable se introduce entre la posición del actuador y la posición de la articulación. La elasticidad conjunta es modelada como un resorte de torsión lineal para articulaciones rotoides y resorte lineal para articulaciones prismáticas. De este modo, el modelo dinámico requiere el doble del número de coordenadas generalizadas para caracterizar completamente la configuración de las articulaciones y de los rotores de los actuadores.  $Q_M$  denota el vector ( $n \times 1$ ) de la posición del rotor. El vector conjunto de deformaciones viene dado por  $(q - q_M)$ . Anotando que el MGD es solo una función de las variables de las articulaciones  $q$

La energía potencial de los resortes está dada por la ecuación 13.

$$U_k = \frac{1}{2} (q - q_M)^T k (q - q_M) \quad (13)$$

Donde  $k$  es la matriz de rigidez en las articulaciones.

# MODELO DINAMICO CON ARTICULACIONES ELÁSTICAS

La ecuación dinámica es obtenida utilizando la ecuación de Lagrange.

$$A\ddot{q} + c\dot{q} + Q + k(q - q_M) = 0 \quad (14)$$

$$I_a(\ddot{q}_M)F_{vm} + \text{diag}(\text{sign}(\dot{q}_M))F_{cm-k}(q - q_m) = \Gamma \quad (15)$$

- $I_a$  es la matriz diagonal ( $n \times n$ ) de inercia de los motores.
- $F_{vm}$  y  $F_{cm}$  son los vectores ( $n \times 1$ ) de viscosidad y parámetros de coulomb de los actuadores y transmisiones correspondientes a la articulación.
- La fricción de la articulación puede fácilmente ser incluida en la Ecuación 15.
- **Modelo de frotamientos**

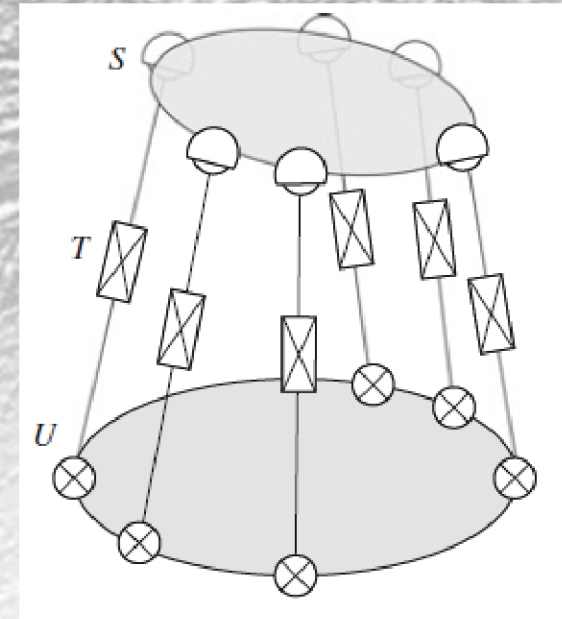
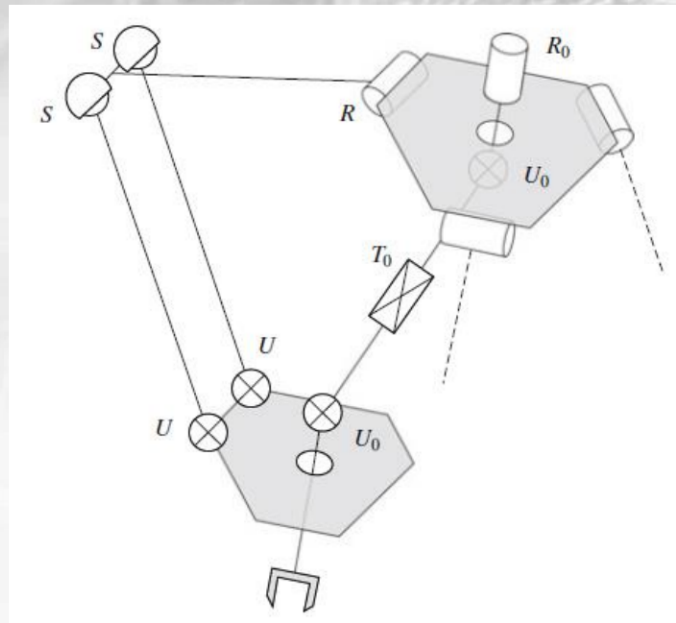
El modelo de frotamiento seco o de Coulomb hace referencia a una fuerza constante opuesta al movimiento. Al inicio del movimiento una fuerza superior al frotamiento seco debe ser aplicada con el fin de mover las articulaciones. El modelo de rotamiento viscoso hace referencia al

frotamiento existente en presencia de movimiento. La expresión matemática del modelo de frotamientos está dada por

$$\Gamma_f = F_v\dot{q} + F_s \text{sign}(\dot{q})$$



## MODELO DINAMICO ROBOT PARALELO



## ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

### ▀ Robots Paralelos

- ▀ **Definición:** Robot en el cual el efector final esta unido a la base directamente por los accionamientos o por barras.
- ▀ Al haber mas de una cadena cinemática “cerrada”, la cinemática de un robot paralelo es muy diferente a la de un robot serie.
- ▀ La cinemática inversa de un robot paralelo se resuelve fácilmente por métodos geométricos, mientras que la cinemática directa es compleja y se resuelve por métodos numéricos.

### Análisis Dinámico en Robots Paralelos

Dada la presencia de múltiples cadenas cinemáticas cerradas en la estructura mecánica de un robot paralelo, el análisis dinámico no es tan evidente como en el caso de los robots seriales.



### ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

Los desarrollos iniciales se remontan a 1962 cuando Gough y Whitehall desarrollaron un robot paralelo para probar neumáticos de automóviles. Casi al mismo tiempo, Stewart introdujo un robot paralelo similar para diseñar un simulador de vuelo. El robot paralelo, en el que una plataforma móvil es controlada por seis patas accionadas, es por lo que se llama la plataforma Stewart-Gough. El avance de los robots paralelos también se debió en gran parte al robot desarrollado por Clavel en los años ochenta. Su mecanismo fue patentado en EE. UU. en 1990 con el nombre de robot Delta. ABB Patenta y produce el Robot DELTA IRB 340.

Robot DELTA, fue inventado por Clavel en 1988 y es fabricado actualmente por Demarex Company y ABB con el nombre IRB 340 Flexpicker, usado para tareas de pick and place. Esta arquitectura permite alcanzar aceleraciones de  $500\text{m/s}^2$ , lo que le convierte en el robot más rápido del mundo.



### GRADOS DE LIBERTAD

El número de grados de libertad (GDL) es menor que el número total de grados de libertad en las articulaciones de manera que muchas articulaciones **son pasivas**. Las articulaciones pasivas son complejas porque no se controlan.



## ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

### GRADOS DE LIBERTAD. ANALISIS. CÁLCULO

Las articulaciones pasivas no se controlan, es decir, no se mueven por acción del actuador.

#### Tipos de Articulaciones:

Articulación Simple:

1 GDL. Rotación (R) o Traslación (T)

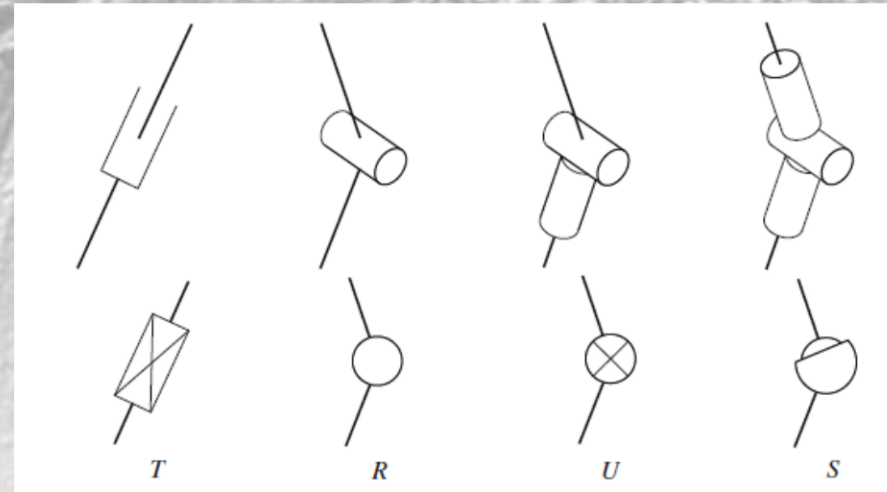
Articulación Universal: (U)

2GDL. Consta de 2 rotaciones

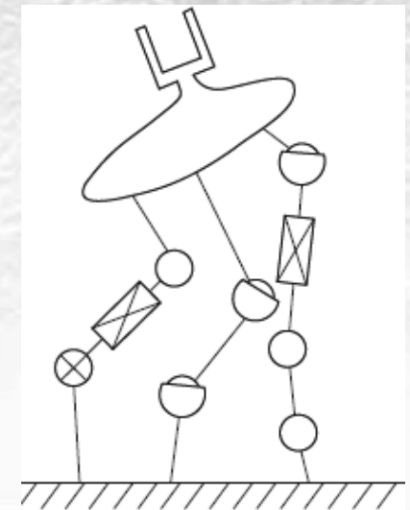
Articulación Esférica: (S)

3GDL. Consta de 3 rotaciones.

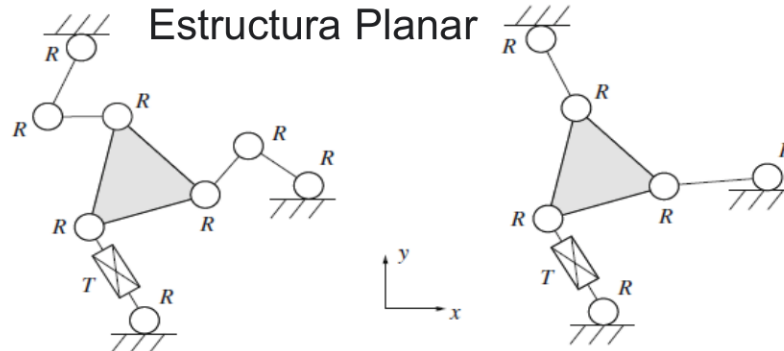
Según como se diseñe el mecanismo móvil con las articulaciones y movimientos resultantes, resultará en un tipo diferente de Robot Paralelo y la complejidad asociada a la Dinámica.



#### Estructura Espacial



#### Estructura Planar



## ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

### GRADOS DE LIBERTAD. ANALISIS. CÁLCULO

El número de grados de libertad está en función de las relaciones que unen los eslabones móviles y las articulaciones. Existe una relación que permite determinar los Grados de Libertad del Robot Paralelo.

Se denomina

$F$  = GDL del Robot  $\lambda$  = máximo GDL. en el espacio=6  
en el plano=3

$N$  = Número de Eslabones móviles.

$n$  = Número de Articulaciones

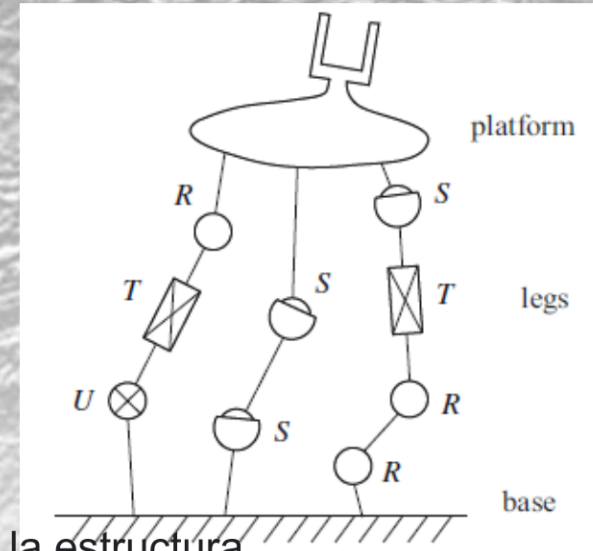
$f_i$  = Número total GDL de las articulaciones

$$F = \lambda(N - n) + \sum_{i=1}^n f_i.$$

Estructura Planar RTR-RRR-RRR

Estructura Planar RTR-RR-RR

Cuántos GDL tendrán las estructuras?

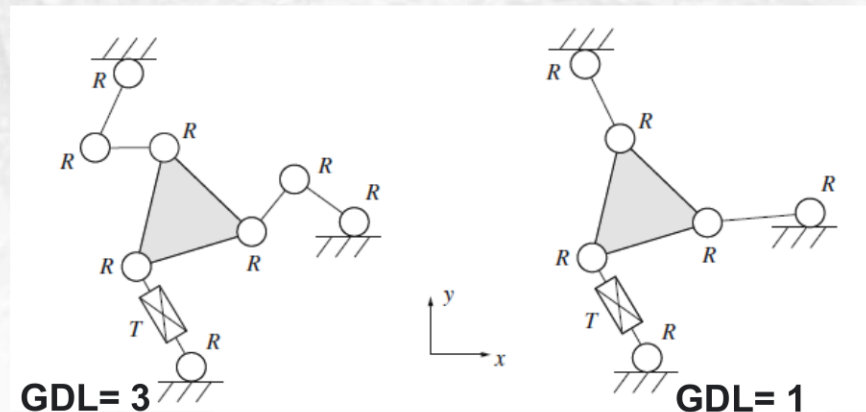


Ejemplo. Según la estructura

$$N = 7 \quad n = 9 \quad f_i = 3 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times 3 = 16$$

(R) (T) (U) (S)

$$F = 6(7-9) + 16 = 4 \text{ GDL}$$



## ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

### GRADOS DE LIBERTAD. ANALISIS. CÁLCULO

Plataforma Stewart-Gough a Stewart-Gough

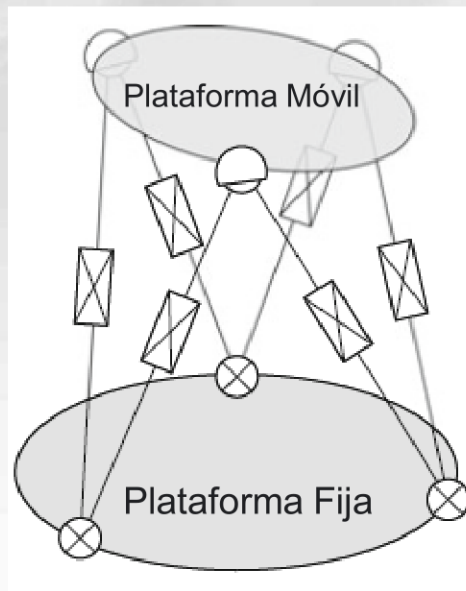
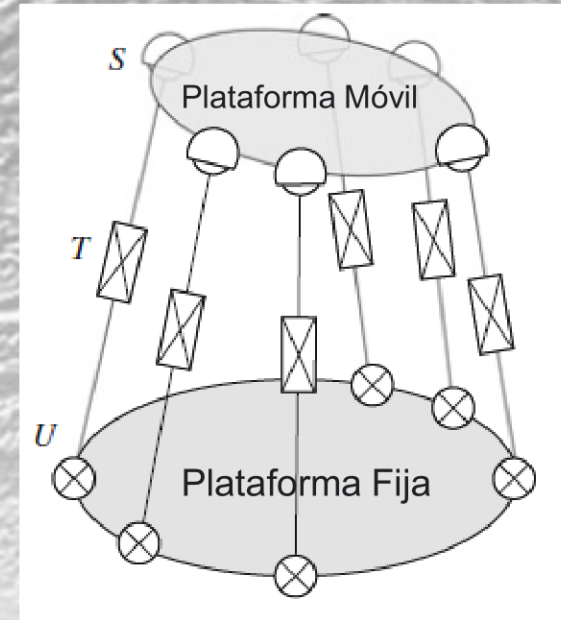
Según la estructura

$$N = 13 \quad n = 18$$

$$f_i = 6 \times 1 + 6 \times 2 + 6 \times 3 = 36$$

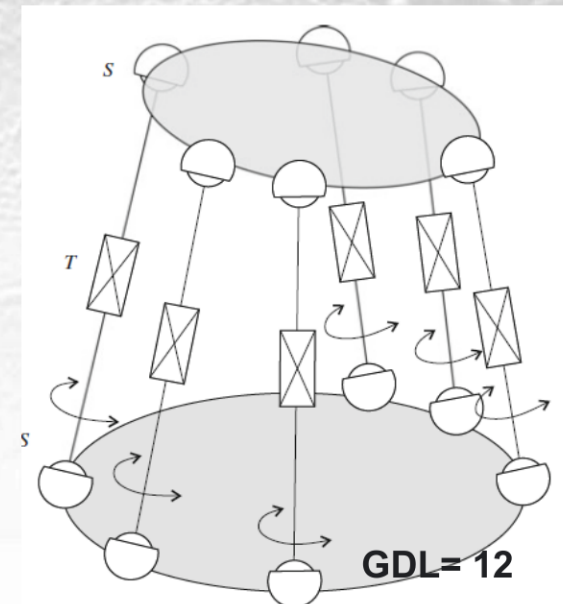
(T) (U) (S)

$$F = 6(13 - 18) + 36 = 6 \text{ GDL}$$



**Plataforma Stewart-Gough**  
Esta Configuración tiene los brazos unidos de a 2 en la Plataforma móvil

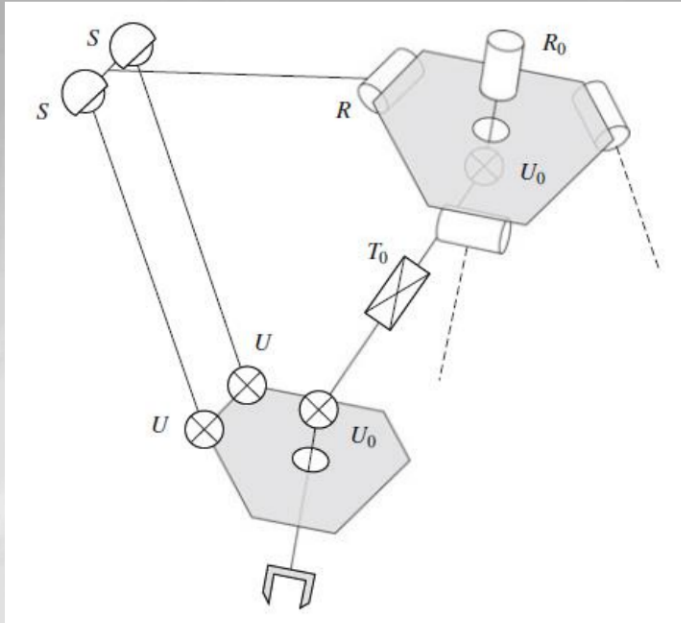
Cuántos GDL tendrá?  $F = ?$





## ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

### GRADOS DE LIBERTAD. ANALISIS. CÁLCULO



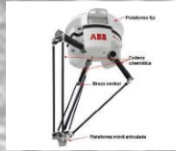
### ROBOT DELTA



La base fija del robot es el hexágono superior mientras que el hexágono inferior representa la plataforma móvil. El robot tiene tres brazos laterales. Solo se presenta uno en la figura. Posee 1 articulación en R, 2 en S(esféricas) y 2 articulaciones en U(universal). También hay una Brazo Central independiente que no influye en el movimiento de la plataforma. En los Brazos del Robot hay un mecanismo tipo paralelogramo entre la mitad del brazo y la plataforma móvil, que consta de 2 articulaciones esféricas S y 2 universales U. Cada Brazo, por lo tanto, tiene 3 eslabones móviles y 5 articulaciones totales.

El número de grados de libertad del el mecanismo es

$$F = 6 (10-15) + 33 = 3 \text{ GDL}$$



## ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

### GRADOS DE LIBERTAD. OTRA METODOLOGÍA DE CÁLCULO

El robot paralelo a desarrollar dispone de 4 cadenas: tres de tipo Universal-Prismática-Esférica (UPE), las cuales unen los vértices de las plataformas; y una Rotacional-Prismática-Universal (RPU), que se encuentra en el centro. Está constituido por 10 eslabones (incluidas las plataformas fija y móvil) y 12 articulaciones o pares cinemáticos, tal como se muestra en la Figura 2.2.

Para determinar los grados de libertad que posee el robot con estas cadenas, se utilizará el criterio de Kutzbach, el cual indica que “cuando las restricciones de las articulaciones se restan de los grados de libertad de los eslabones no conectados, se encuentra la movilidad (grados de libertad) del mecanismo conectado” (Shigley & Uicker, 2001), que para el caso de un mecanismo espacial se calcula con la siguiente ecuación,

$$m = 6(n - 1) - 5j_1 - 4j_2 - 3j_3 - 2j_4 - j_5$$

Donde:

$m$  = grados de libertad

$n$  = número de eslabones

$j_i$  = número de articulaciones con  $i$  grados de libertad

Dados los valores del robot paralelo,  $n = 10$ ,  $j_1 = 5$ ,  $j_2 = 4$ ,  $j_3 = 3$ ,

$$m = 6(10 - 1) - 5(5) - 4(4) - 3(3) - 2(0) - 0 = 6(9) - 25 - 16 - 9$$

$$m = 4$$

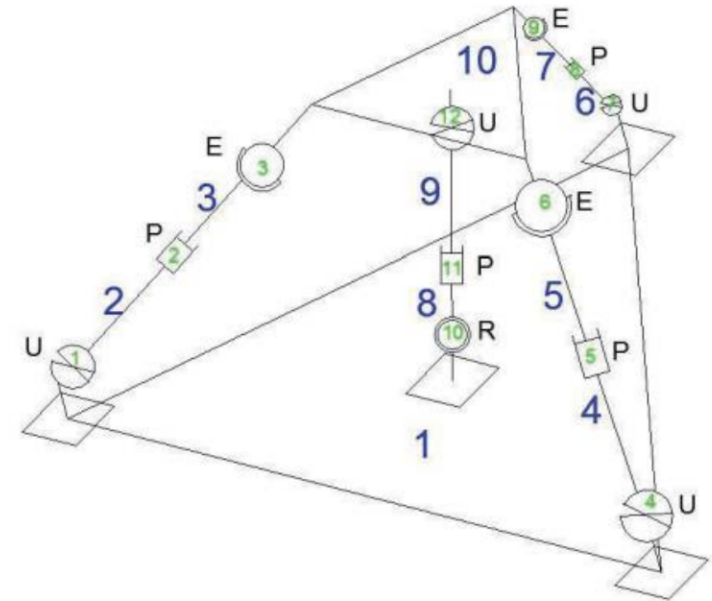


Figura 2.2 Topología del robot 3 UPE – RPU

**Verifica  $m=4$  usando el otro método?**

## ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

### Formulación de Newton-Euler en Robots Paralelos

Las ecuaciones de movimiento se escriben para cada cuerpo del robot y, aunque sea posible obtener todas las fuerzas internas y externas actuando sobre el mecanismo, el resultado conduce a gran cantidad de ecuaciones difíciles de resolver.

#### Estrategia:

Dado que la mayoría de los robots paralelos están compuestos por una plataforma móvil y varias cadenas seriales que cierran el lazo cinemático uniendo la plataforma móvil a la base, una estrategia es dividir el mecanismo en dos subsistemas, el móvil y la base (subsistema serie más la base móvil).

### Formulación de Lagrange-Euler en Robots Paralelos

Es una aproximación energética que permite evitar el cálculo de las fuerzas de reacción internas del mecanismo. De igual forma, presenta muchas ecuaciones a resolver.

#### Estrategia:

Para simplificar se introduce un conjunto de coordenadas adicionales al sistema de multiplicadores de Lagrange. Es posible así separar el mecanismo en dos subsistemas que combinados, usando la matriz Jacobiana del robot, permiten simplificar el cálculo y obtener así dos sistemas de ecuaciones y resolver.



### ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

#### Formulación de D'Alembert en Robots Paralelos

Actualmente, una de las aproximaciones más populares para obtener el modelo dinámico de los robots paralelos es el uso del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV).

Al igual que en los métodos anteriores, se aplica de forma directa el principio para obtener el modelo de robots seriales que cierran el lazo cinemático uniendo la plataforma móvil a la base. Es la misma **Estrategia** de dividir el mecanismo en dos subsistemas, el móvil y la base (subsistema serie mas la base móvil)

#### Combinación de métodos.

Este enfoque considera a los robots paralelos como un conjunto de elementos libres y un conjunto de restricciones.

Los trabajos en este campo se centran en la obtención de la relación entre el modelo dinámico del sistema libre o reducido y el sistema sometido a restricciones

## ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

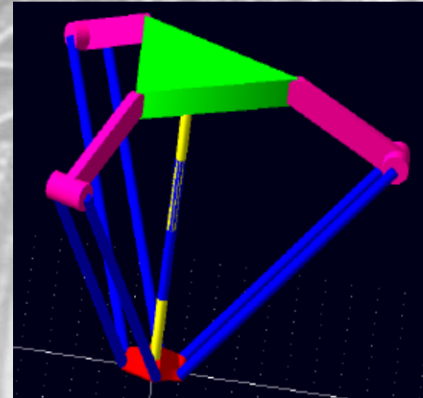
Plataforma Stewart (6 GDL)



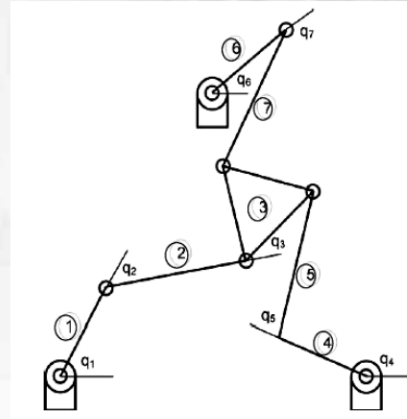
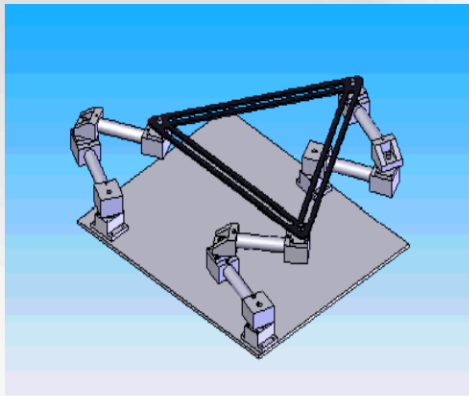
Plataforma Delta (3GDL)



Plataforma Quattro (4GDL)



Plataforma 3RRR (3GDL)



## Configuraciones de los Robot Paralelos)

Es difícil realizar una clasificación sistemática de las estructuras posibles en robótica paralela, dada la gran cantidad de términos que intervienen (número y tipo de cadenas cinemáticas, restricciones, etc).

Sin embargo, según los movimientos que pueden hacer, se pueden clasificar en **Robots planares y espaciales**

## ARQUITECTURAS DE ROBOT PARALELOS

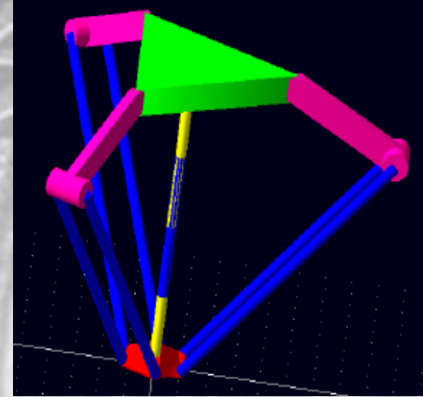
Plataforma Stewart (6 GDL)



Plataforma Delta (3GDL)

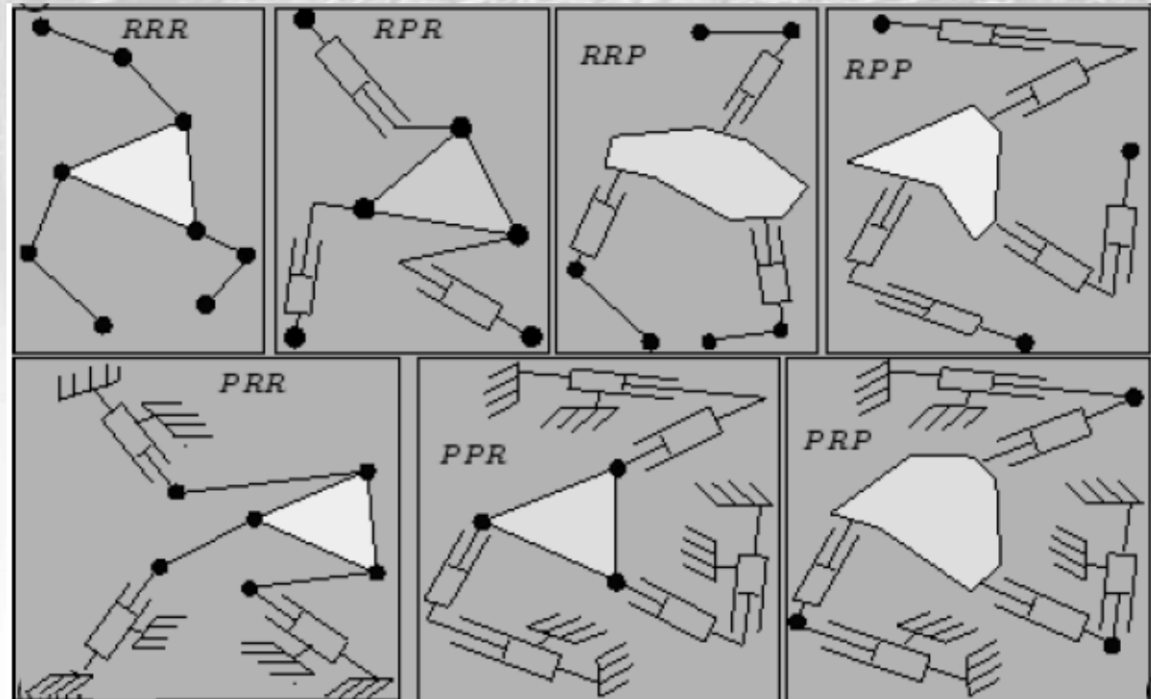
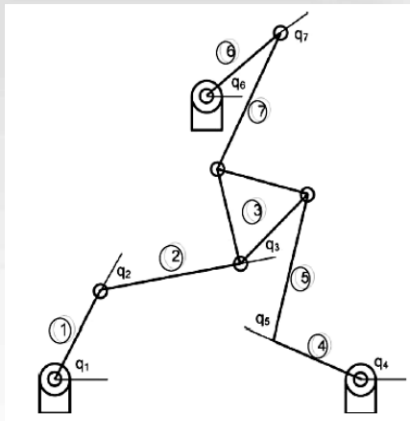


Plataforma Quattro (4GDL)



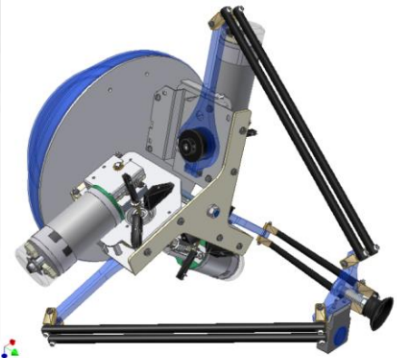
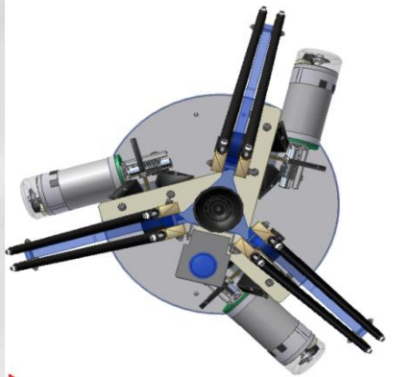
Plataforma 3RRR (3GDL)

Configuraciones Posibles)





## ROBOT DELTA (3GDL)

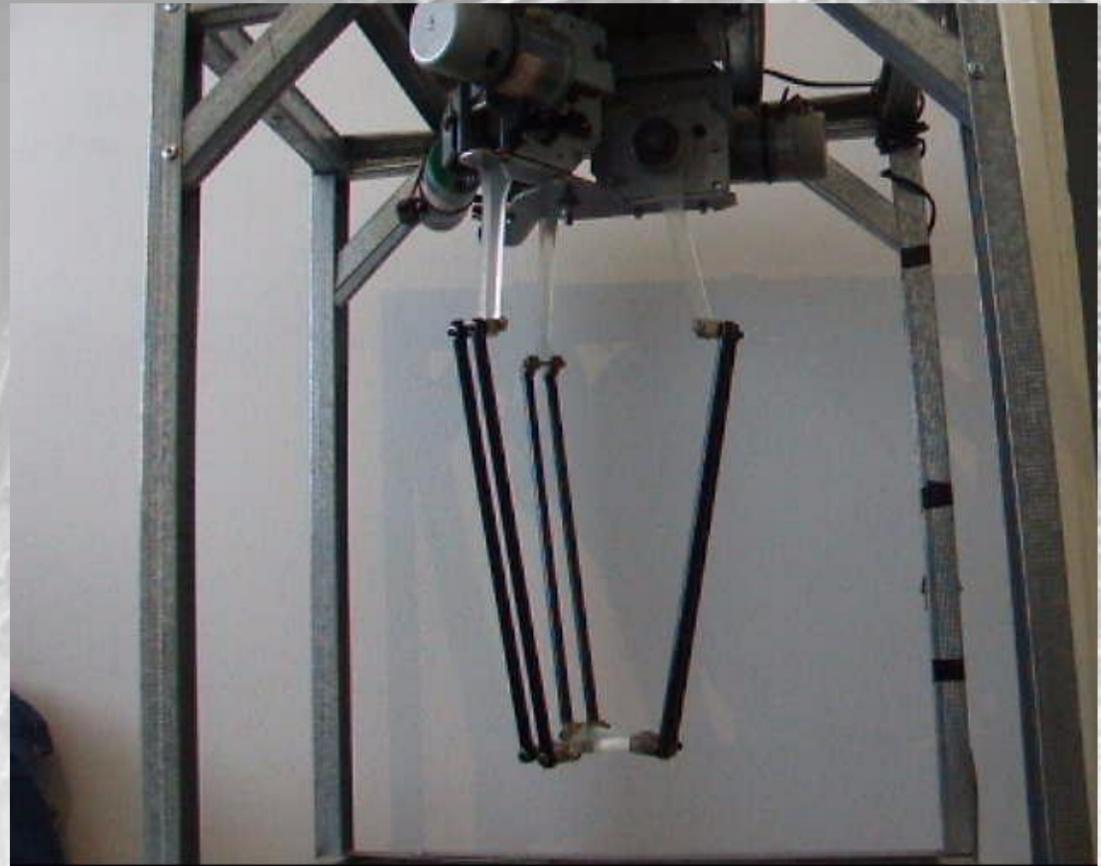


ROBOT PARALELO TIPO DELTA (3GDL) . 2007-2009

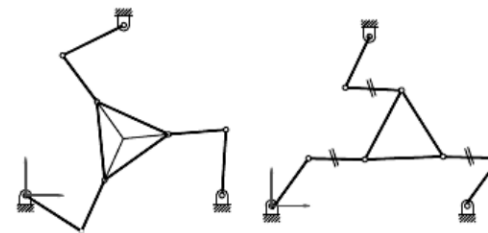
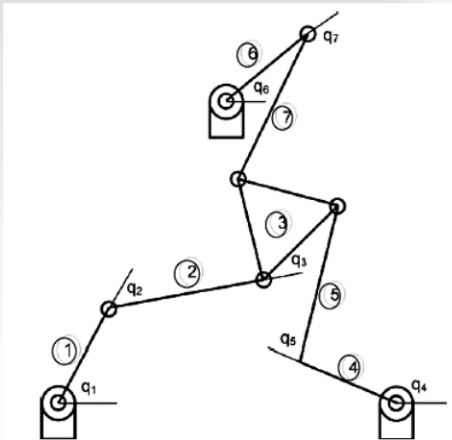
# Modelo Dinámico del Robot

# MODELO DINAMICO ROBOT PARALELO

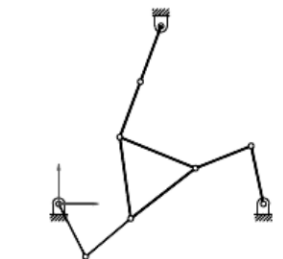
## ROBOT DELTA (3GDL)



## Plataforma 3RRR (3GDL)



Configuraciones Singulares  
Paralelas

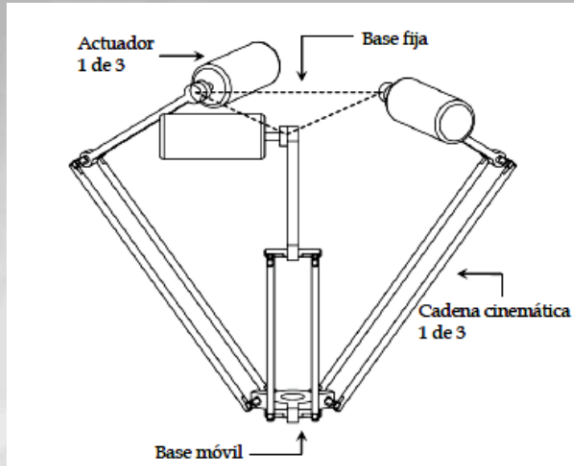


Configuración Singular  
Serial

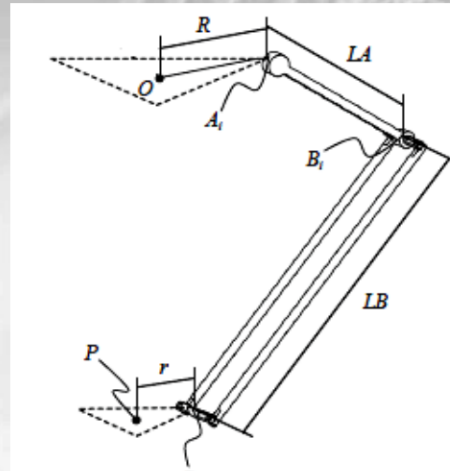


## DINÁMICA ROBOT PARALELOS

El modelado dinámico de robots paralelos es una tarea compleja debido a los múltiples lazos cinemáticos de estas estructuras. Las estrategias propuestas por diversos autores no obtienen, en general, el modelo de forma estructurada



### Subsistema Serie (modelo reducido)



$$\tau = D(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + G(q)$$

La obtención de un modelo con características similares en robótica paralela no es una tarea fácil, debido a las **articulaciones pasivas o no actuadas**. La aparición de éstas en la estructura incrementa la complejidad de los problemas cinemático y dinámico.

### Estrategia

La mayoría de los mecanismos paralelos está compuesto por una plataforma móvil y un grupo de cadenas serie uniendo ésta a la base. Una estrategia es dividir el mecanismo en dos subsistemas. De este modo, se calcula el modelo dinámico de cada uno de los subsistemas, considerando las fuerzas de reacción entre ambos, y en un paso posterior, se unen ambos sistemas utilizando diversas técnicas



## MODELO DINAMICO LAGRANGIANO ROBOT PARALELO

Mecanismo con  $n = n_a$  grados de libertad, cuya plataforma móvil está unida a la base por  $n$  cadenas serie.

### Ecuaciones de Cierre

La relación entre las coordenadas cartesianas  $x$  y las coordenadas articulares activas independientes  $q_a$ :

$$\phi_i(x, q_a) = 0, i = 1, \dots, n$$

La relación entre  $x$  y  $q_r$ :

$$\Gamma_i(x, q_r) = 0 \rightarrow x = f_i(q_r), i = 1, \dots, n$$

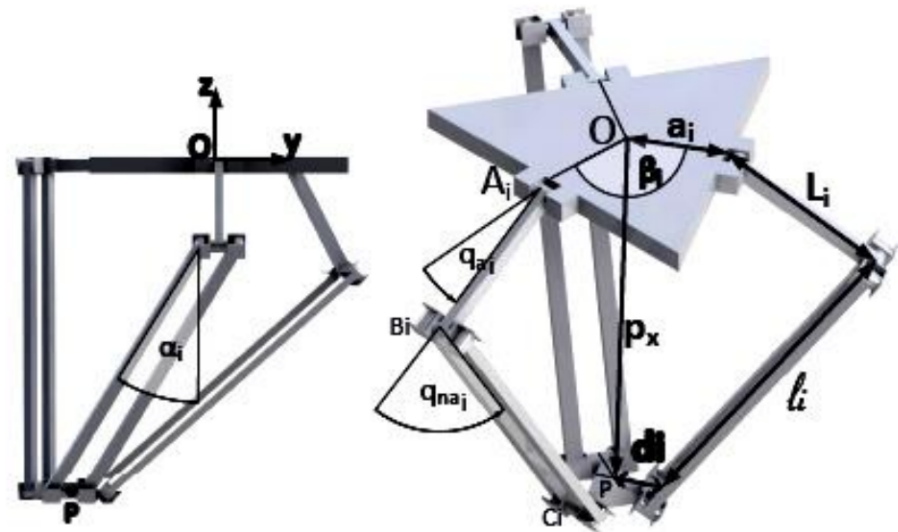
La relación entre las coordenadas articulares activas  $q_a$  y las coordenadas articulares pasivas no sensorizadas  $q_p$  y sensorizadas  $q_s$ :

$$f_s(q_a, x, q_s) = 0$$

$$f_p(q_a, x, q_s) = 0$$

Sea  $q_a$  el conjunto de *articulaciones activas* del mecanismo, de dimensión  $n_a = n$ ,  $q_p$  el conjunto de  $n_p$  articulaciones *pasivas no sensorizadas* y  $q_s$  el conjunto de  $n_s$  articulaciones *pasivas sensorizadas*. El conjunto de *coordenadas de control* se definirá tal que  $q = [q_a \ q_s]^T$  y el conjunto de  $n_r = n_a + n_p + n_s$  *coordenadas generalizadas* como  $q_r = [q \ q_p]^T$ . Sea  $x$  el vector de coordenadas cartesianas del elemento terminal

XXXVI Jornadas de Automática



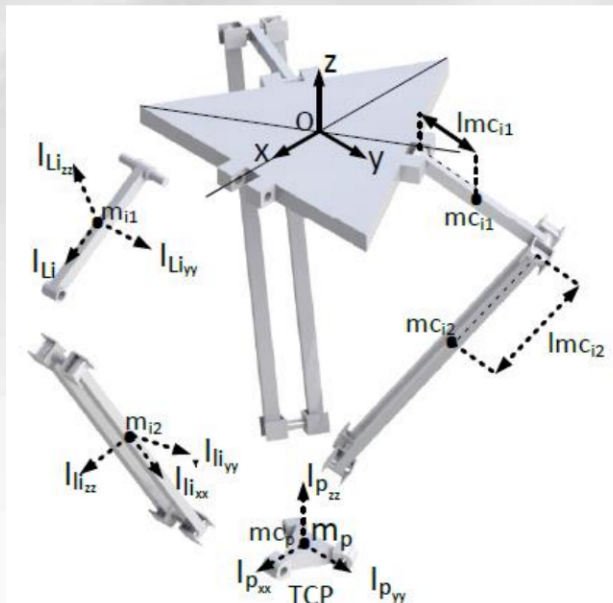
## MODELO DINAMICO LAGRANGIANO ROBOT PARALELO

**Ecuación Lagrangiana** Se considera el mecanismo como la suma de los dos subsistemas: plataforma móvil y subsistemas serie.

Se calcula la ecuación Lagrangiana de cada subsistema en función de las coordenadas de cada uno.

La función Lagrangiana de la **Plataforma móvil**  $L_p$  está definida en función de las coordenadas cartesianas  $X(x,y,z)$  del TCP.

La función Lagrangiana asociada al **Subsistema serie**  $L_s$  está definida por las cadenas serie en función de las coordenadas articulares generalizadas  $q_r$ .



$$L = L_s (q_r, \dot{q}_r) + L_p (x, \dot{x})$$

**Subsistema serie + Plataforma móvil**

## DINAMICA. LAGRANGIANO ROBOT PARALELO

$$L = L_s(q_r, \dot{q}_r) + L_p(x, \dot{x})$$

Subsistema serie + Plataforma móvil

### Plataforma móvil

En el caso general, la plataforma móvil se define como un sólido rígido que se mueve libremente por el espacio. Por tanto, la energía cinética  $K_{MP}$  se define como:

$$K_{MP} = \frac{1}{2} ((m_p + m_c) \dot{\mathbf{p}}_x^T \dot{\mathbf{p}}_x)$$

donde  $m_p$  es la masa de la plataforma móvil;  $m_c$  es la masa de la carga situada en el centro de masas de la plataforma móvil y  $\dot{\mathbf{p}}_x = \dot{\mathbf{x}}$  es la velocidad lineal del TCP. Téngase en cuenta que el extremo del robot Delta solo se traslada, por lo que para éste caso concreto no hay que especificar orientación angular alguna de la plataforma móvil.

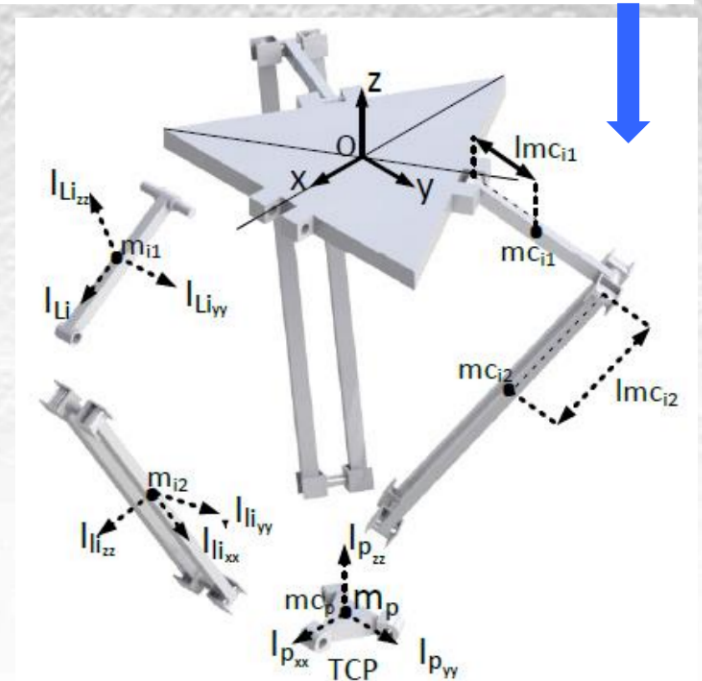
Por otro lado, la energía potencial se define simplemente en el plano  $z$ ,

$$U_{MP} = (m_p + m_c) g z$$

### Subsistema Serie

$$K_s = \frac{1}{2} \left( m_{ij} \mathbf{v}_{mcij}^T \mathbf{v}_{mcij} + \omega_{mcij}^T \mathbf{I}_{mcij} \omega_{mcij} \right)$$

donde  $m_{ij}$  es la masa,  $\mathbf{I}_{mcij}$  es la inercia centroide,  $\mathbf{v}_{mcij}$  es la velocidad lineal del centro de masas y  $\omega_{mcij}$  la velocidad angular del  $j^a$  elemento de la  $i^a$  cadena, como se puede apreciar en la Figura 2.

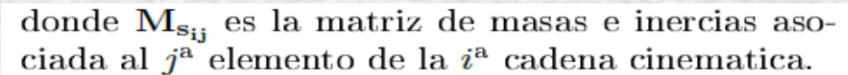




$$L = L_s (q_r, \dot{q}_r) + L_p (x, \dot{x})$$

## Subsistema serie + Plataforma móvil

Para poder sumar la contribución de cada elemento de la cadena de manera compacta, se puede expresar la contribución cinemática en función de sus coordenadas naturales  $\mathbf{q}$ . Para ello, es necesario definir tanto la velocidad lineal  $\mathbf{v}_{mcij}(\mathbf{q})$  como la angular  $\omega_{mcij}(\mathbf{q})$  en términos de este conjunto de coordenadas. Por lo tanto, siguiendo el procedimiento detallado en [16],

$$K_s = \sum_{i=1}^n K_{s_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{\mathbf{q}}^T \left( \sum_{j=1}^2 \mathbf{M}_{s_{ij}} \right) \dot{\mathbf{q}}$$


De la misma manera, la energía potencial de la cadena serie se define como la suma de contribuciones de cada elemento  $j$  de la  $i$  cadena.

$$U_s = \sum_{i=1}^3 U_{s_i} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( m_{ij} g l_{mc_{c_{ij}}} \right)$$

donde  $l_{mc_{ij}}$  es la distancia vertical del centro de masas del  $j^{\text{a}}$  elemento de la  $i^{\text{a}}$  cadena al origen **O**.

## DINAMICA. LAGRANGIANO ROBOT PARALELO

### DINÁMICA INVERSA

La resolución de la ecuación de movimiento requiere de la utilización del método de los Multiplicadores de Lagrange, ya que el modelo esta compuesto por 12 variables de las cuales sólo 3 son independientes [13]  $q_1, q_2, q_3$ . Para usar este método, se deben definir 9 multiplicadores  $\lambda_i$  de manera que la ecuación de movimiento asociado a cada subsistema serie será,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_s}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L_s}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^9 \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i(x, q_i)}{\partial q_j} + \tau_{q_i} \quad (11)$$

para  $j = 1, \dots, 9$ , siendo  $\tau_{q_i}$  el par virtual o fuerza asociada a la variable articular  $q_j$  en caso de que todas las variables sean actuadas.

Para la plataforma móvil

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{MP}}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L_{MP}}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^9 \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i(x_k, q_i)}{\partial x_k} \quad (12)$$

donde  $k = 1, 2, 3$ .

$$L = L_s(q_r, \dot{q}_r) + L_p(x, \dot{x})$$

### Subsistema serie + Plataforma móvil

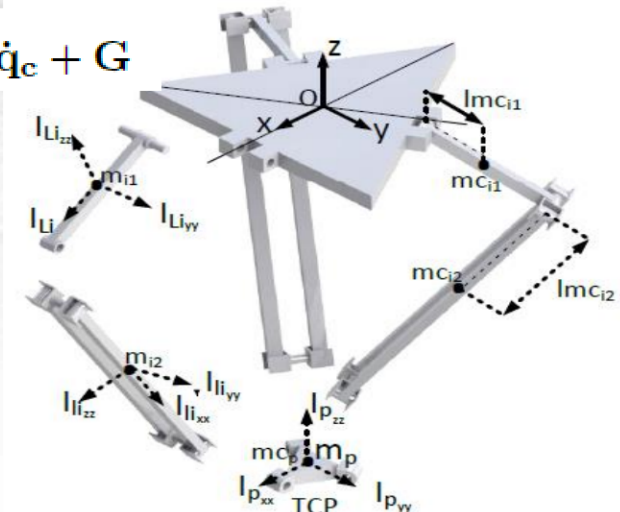
Cada una de estas ecuaciones puede ser agrupada de forma que se obtenga una expresión compacta de la forma,

$$D(a) \ddot{a} + C(a, \dot{a}) \dot{a} + G(a) = v \quad (13)$$

donde  $a$  es la variable vector donde se define el modelo y  $v$  es  $\tau_{q_i}$  para el caso de la Eq. (11) o  $0$  para el caso de la Eq. (12).

Para la obtención de un modelo compacto, los Multiplicadores de Lagrange son eliminados combinando las Eqs. (11) y (12).

$$\tau = D \ddot{q}_c + C \dot{q}_c + G$$



## MODELO DINAMICO LAGRANGIANO ROBOT PARALELO

### Ecuación Lagrangiana

Agrupando los términos de las ecuaciones diferenciales en matrices y considerando que los multiplicadores de Lagrange, en relacionados con las fuerzas internas que unen ambos subsistemas

$$\tau = D(x, q_r) \ddot{q} + C(x, q_r, \dot{x}, \dot{q}_r) \dot{q} + G(x, q_r) + F_e$$

$$\begin{cases} D(x, q_r) = T^T \cdot D' \cdot T_q \\ C(x, q_r) = T^T \cdot (C' \cdot T_q + D' \cdot \dot{T}_q) \\ G(x, q_r) = T^T \cdot G' \\ F_e = T^T \cdot F_{ext} \end{cases}$$



### Subsistema serie

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_s}{\partial \dot{q}_{rj}} \right) - \frac{\partial L_s}{\partial q_{rj}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{\partial \Gamma_i(x, q_r)}{\partial q_{rj}} + \tau_{rj}$$

### Plataforma móvil

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L_p}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{\partial \Gamma_i(x, q_r)}{\partial x_k} + Q_{xk}$$

### Subsistema Serie

Dr matriz de inercia. Cr términos de coriolis.

Gr vector de gravedad

### Plataforma movil

Dx matriz de inercia plataforma movil

Cx términos de coriolis

Gx vector de gravedad

Jc Matriz Jacobiana de Restricción

Qx es el vector de fuerzas/pares externos aplicados en la plataforma móvil.



## MODELO DINAMICO LAGRANGIANO ROBOT PARALELO

### Matriz Jacobiana de Restricción $J_C$

Relaciona la velocidad de las coordenadas cartesianas de la plataforma móvil  $v$  y las velocidades de las coordenadas articulares generalizadas de los subsistemas serie  $\dot{q}_r$

**Se obtiene de la relación entre  $x$  y  $q_r$**

$$v = J_C(x, q_r) \dot{q}_r$$

$v$  Velocidad cartesiana del elemento terminal, que consta de una velocidad de traslación lineal  $p^c$  y una velocidad angular  $\omega$ .

### Matriz Jacobiana del robot $J_R$

$$v = J_R(x, q_a) \cdot \dot{q}_a$$

**Se obtiene** de la relación entre las coordenadas cartesianas  $x$  y las coordenadas articulares activas independientes  $q_a$ :

$$\phi_i(x, q_a) = 0, i = 1, \dots, n$$

### Matriz de transformación $T$

Matriz que relaciona las articulaciones activas  $q^a$  y las coordenadas articulares generalizadas del subsistema serie  $q^r$ :

$$\dot{q}_r = T \dot{q}_a$$

### Aceleraciones

$$a = J_R \cdot \ddot{q}_a + \dot{J}_R \cdot \dot{q}_a$$

$$\ddot{q}_r = \frac{d}{dt} (T \cdot \dot{q}_a) = T \ddot{q}_a + \dot{T} \dot{q}_a$$

$$\ddot{q}_r = \frac{d}{dt} (T_q \cdot \dot{q}) = T_q \ddot{q} + \dot{T}_q \dot{q}$$

donde,  $a = \dot{v}$  es la aceleración cartesiana del elemento terminal.

Autor	Título	Editorial	Año	Ejemplares Biblioteca	Unid. Prog
B. Ollero	Robótica	Alfaomega	2007	1	2-3-5
J. Craig	Robótica.	Pearson	2006	1	2-3
A. Barrientos et all	Fundamentos de Robótica.	McGraw Hill	2007	1	1-2-3-5
Ollero Baturone	Robótica. Manipuladores y robot móviles	Alfaomega	2007	1	2-3-4
Angulo, Yesa, Martinez	Microrobótica.	Editorial Thomson.	2002	no	
W. Bolton	Sistemas de control electrónico en la ingeniería mecánica y eléctrica. (3ºed.	Alfaomega	2006	1	2-3
J. Angulo	Robótica Práctica. Tecnologías y Aplicaciones.	Paraninfo	1986	1	1-2
M. Groover, Weiss Nagel & N. Odrey	Robótica Industrial. Tecnología, Programación y Aplicaciones.	McGraw Hill	1989	1	3-4
F. Cembranos Nistal	Sistemas de Control Secuencial.	Thomson	2002	1	2-3
<a href="#">Fernando Reyes Cortés</a>	Robótica: Control de Robots Manipuladores	Alfaomega	2011	---	
Tomás de J. Mateo Sanguino	Robótica Móvil. Principios, Tendencias y Aplicaciones: Cinemática, Filtro de Partículas, Inteligencia Artificial	Createspace	2014	---	
Hibbeller	Mecánica vectorial para ingenieros: dinámica	Pearson	2004	---	

Autor	Título	Editorial	Año	Ejemplares Biblioteca	Unid. Prog
F. Torres Medina	Robot y Sistemas sensoriales. Ed.	Pearson	2002		1-2-3
R. Kelly & V. Santibañez	Control de Movimientos de Robot Manipuladores.	Pearson	2003		2-3
J. Angulo Usategui et all	Introducción a la Robótica.	Paraninfo.	2005		1-2
M. Gomez et all	Teleoperación y Telerrobótica.	Prentice Hall	2006		1-2
R. Mott	Diseño de elementos de máquinas. 4ºed.	Pearson	2006	1	1
<a href="#">Etxebarria</a> Víctor	Sistemas de Control no lineal y Robótica	Euskal Herriko Unibertsitatea	1999		
W. Bolton	Instrumentación y control Industrial.	Paraninfo	1996	1	
Maloney Timothy	Electrónica Industrial Moderna. 5ºed.	Pearson	2006	1	2-3

**Bibliografía Complementaria.** B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, y G. Oriolo. "Robotics: modelling, planning and control". Springer. 2010  
M.W. Spong, S. Hutchinson, y M. Vidyasagar. "Robot Modeling and Control". John Wiley & Sons. 2006