INTRODUCCIÓN AL CONTROL AUTOMÁTICO

Índice

La problemática del control automático

La limitada cantidad de recursos naturales y la fuerte presión de la competencia comercial fuerza permanentemente a las industrias a una mayor eficiencia. Uno de los factores que conducen a la eficiencia en el uso de los recursos es el control automático.

Control automático es la técnica de medir una variable y producir una respuesta tal que limite la desviación de la misma respecto de un valor de referencia.

La razón fundamental para el uso del control automático es que se disminuyen los costos de producción a través de la optimización en el uso de los recursos.

La economía se logra de diferentes modos:

- Mejoramiento de la calidad de los productos
- Disminución de los costos de mano de obra
- Eliminación de los errores humanos
- Disminución del tamaño de los equipos y del espacio requerido
- Mayor seguridad en la operación

- Minimización del consumo de energía
- Aumento en la velocidad de producción
- Optimización entre las distintas etapas del proceso

El control automático tiene entonces como misión ajustar determinadas variables de un proceso y mantenerlas en valores prefijados.

El lazo de control- Terminología

El control automático como ha sido definido tiene por misión llevar una determinada variable física a un valor prefijado y mantenerla en ese valor. Esta se denomina **variable controlada**, y puede ser eléctrica, hidráulica, térmica, mecánica o de cualquier otro tipo.

El valor prefijado al cual se pretende que la variable controlada se ajuste, se denomina **valor deseado** o punto de consigna (set point).

Mediante el control se realiza:

1. La medición de la variable controlada.
2. La comparación de ella con el set point.

Mientras exista una diferencia entre esos dos valores, el dispositivo de regulación deberá tratar de acercarlos. La variable que produce el dispositivo de regulación con el fin de corregir la diferencia que existe entre la variable controlada y el valor deseado es denominada **variable manipulada**.

El lazo de control esta constituido por dos grandes bloques que interactúan entre si: el proceso y el controlador (figura 1.1)

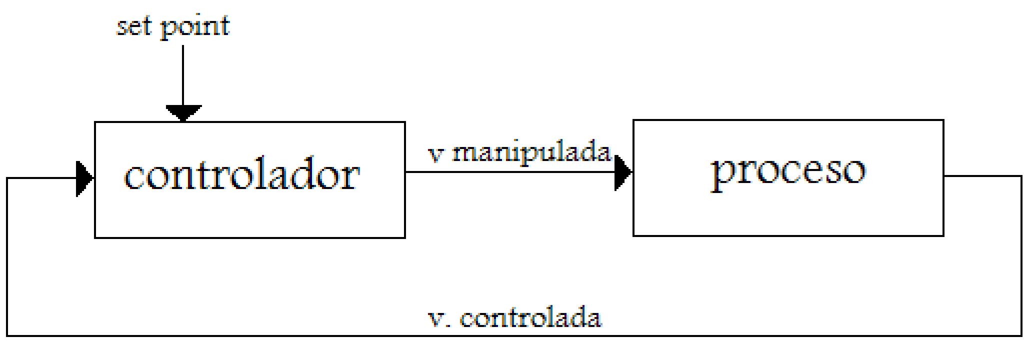


Figura 1.1

En el ejemplo de la figura 1.2 el proceso esta constituido por un recipiente donde la variable controlada es el nivel. El controlador en este caso esta conformado por un sistema mecánico cuya salida a través de una válvula, regula la variable manipulada la cual es, el caudal de salida del recipiente. El valor deseado se ajusta a través de un tornillo en el controlador.

La variable controlada es medida en el proceso y su valor es comparado con el set point en el controlador, el resultado de esa comparación produce una variable interna al controlador, denominada **desviación o error**. Mientras exista un valor de la variable error, el controlador actuará sobre la válvula corrigiendo la variable manipulada hasta tanto la variable controlada (en nuestro ejemplo el nivel) alcance al valor de consigna.

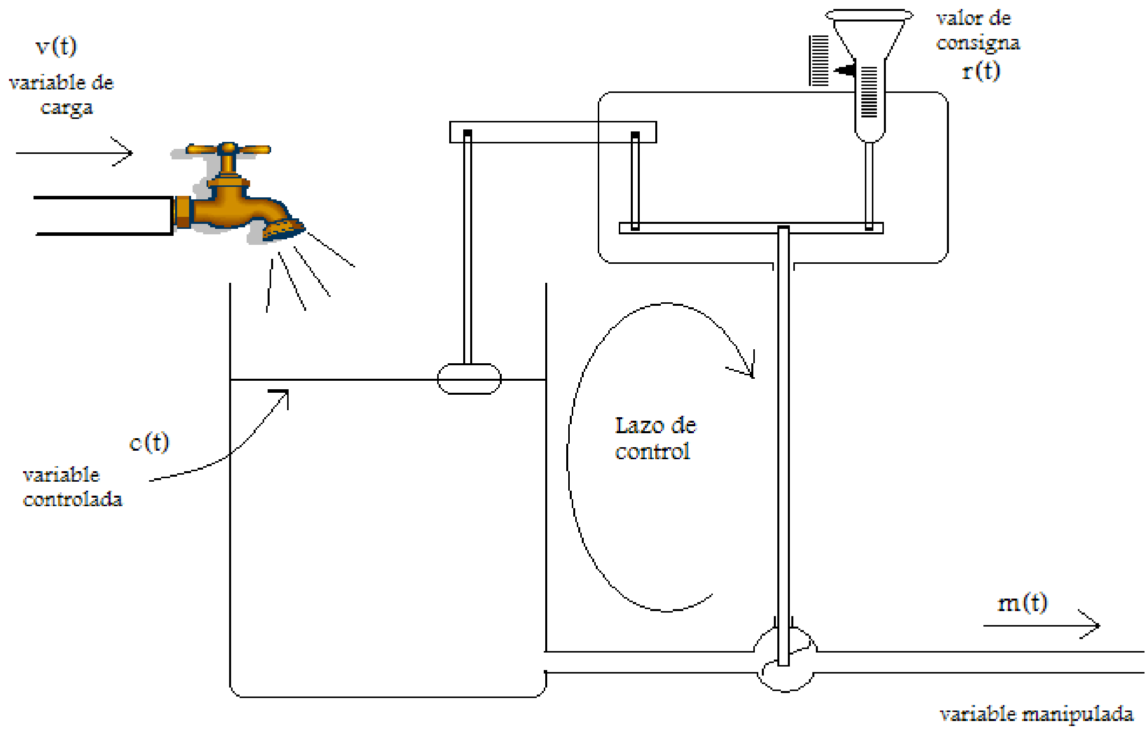


Figura 1.2

Esta interacción entre la variable controlada sobre el controlador y de la variable manipulada sobre el proceso en forma cíclica es lo que denominamos **realimentación**. El lazo de control de la figura 1.2 cumplirá su función de mantener constante el nivel del tanque en tanto y cuanto, el controlador actúe cerrando la válvula de salida cuando disminuya el nivel y viceversa. Este efecto se conoce como **realimentación negativa**, puesto que el controlador actúa con el efecto opuesto a la causa que provocó la disminución del nivel.

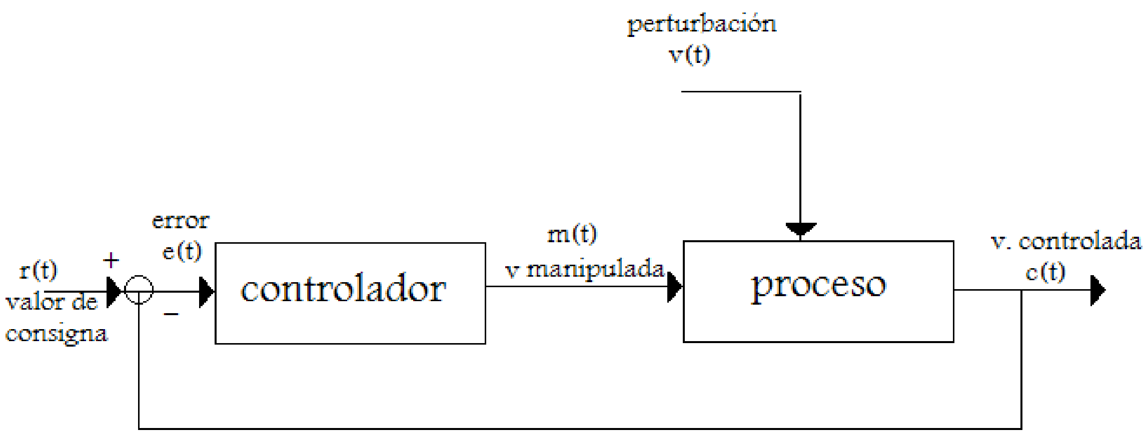


Figura 1.3

Existen variables que perturban al proceso, provocando variaciones que afectan la estabilidad y hacen que actúe el lazo de control. Debido a la desviación de la variable controlada frente al valor de consigna estas variables de perturbación, son denominadas **variables de carga**. En la figura 1.2 la variable de carga es el caudal de entrada. Por ejemplo un aumento en esta variable, producirá una elevación del nivel el cual hará que actúe el controlador, abriendo la válvula e incrementando así el caudal de salida, para compensar la variación del nivel.

La transformada de Laplace

El método de la transformada de Laplace se utiliza muy a menudo en la resolución de los problemas que se presentan en el estudio de los lazos de control continuos.

La transformada de Laplace, convierte las ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo, en ecuaciones algebraicas en el dominio de la variable s. En la solución de ecuaciones diferenciales mediante el uso de la transformada de Laplace, quedan incluidas las condiciones iniciales y se obtienen simultáneamente las soluciones homogénea y particular.

La transformada de Laplace se define por,

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \overline{\mathrm{F}}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \qquad (1.1)$$

Donde: f (t) existe para todo $0 \leq t < \infty$
$s = \sigma + j\omega$ variable compleja

Es decir que la función f (t) en el dominio del tiempo es convertida mediante la transformada de Laplace en una función F(s) en el dominio de s.
Para la integral (1.1) tenga sentido se debe satisfacer en particular la condición:

$$f(t)e^{-st} \to 0 \quad \text{para} \quad t \to \infty$$

Satisfecha esta condición e integrando por partes tenemos que:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty f^{'}(t)e^{-st}\,dt$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$u = e^{-st} \to du = -se^{-st}dt$$
$$dv = f^{'}(t)dt \to v = \int dv = f(t)$$

$$\int_0^\infty f^{'}(t)e^{-st}dt = e^{-st}f(t) - \int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st}dt$$

$$= f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f^{'}(t)\right] = -f(0) + sF(s)} \qquad (1.2)$$

Una ecuación diferencial de segundo orden, como:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=u(t) \qquad (1.3)$$

Puede resolverse aplicando transformada de Laplace, como sigue

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x\right]=\mathcal{L}\left[u(t)\right] \qquad (1.4)$$

Siendo que la transformada de Laplace es distributiva respecto de la suma

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]+\mathcal{L}\left[3\frac{dx}{dt}\right]+\mathcal{L}\left[2x\right]=U(s) \qquad (1.5)$$

Mediante las expresiones (1.1) y (1.2) vemos que

$$\mathcal{L}\left[2x\right]=2X(s) \qquad (1.6)$$

$$\mathcal{L}\left[3\frac{dx}{dt}\right]=3sX(s)-3X(0) \qquad (1.7)$$

Aplicando la expresión (1.2) para la derivada segunda tenemos

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]=\mathcal{L}\left[\frac{dx'}{dt}\right]=s\mathcal{L}\left[x'\right]-x'(0) \qquad (1.8)$$

Y sustituyendo en (1.8) el valor de la transformada de la derivada, queda

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]=s\left[sX(s)-x(0)\right]-x'(0)=s^2X(s)-sx(0)-x'(0) \qquad (1.9)$$

Luego reemplazando en (1.5)

$$s^2X(s)+3sX(s)+2X(s)-x'(0)-sx(0)-3x(0)=U(s) \qquad (1.10)$$

Obsérvese que en la transformación de la ecuación diferencial aparecen los valores iniciales, aun cuando no están explícitos en la ecuación original. Así, la ecuación se resuelve algebraicamente, despejando X(s).

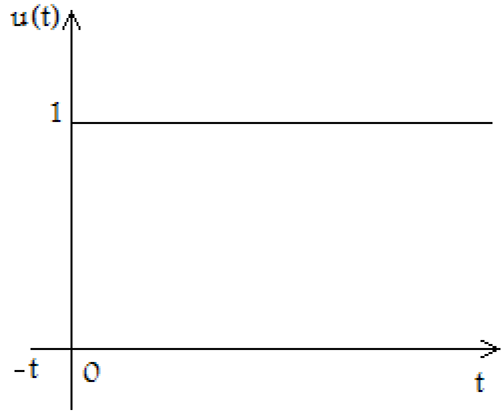
$$X(s)=\frac{sx(0)+3x(0)+x'(0)+U(s)}{s^2+3s+2}$$

$$X(s)=\frac{sx(0)+3x(0)+x'(0)+U(s)}{(s+2)(s+1)} \qquad (1.11)$$

La respuesta de la ecuación diferencial se obtiene mediante la transformación inversa de X(s), para lo cual es conveniente reducir la expresión (1.11) a fracciones parciales, siendo este el método mas común y directo en la gran mayoría de los problemas de control automático.

Asimismo, para obtener la solución, es necesario conocer la función de entrada U(s). Si por ejemplo es la función escalón unitario en la que,

u (t)=0 para t <0
u (t)=1 para t ≥ 0



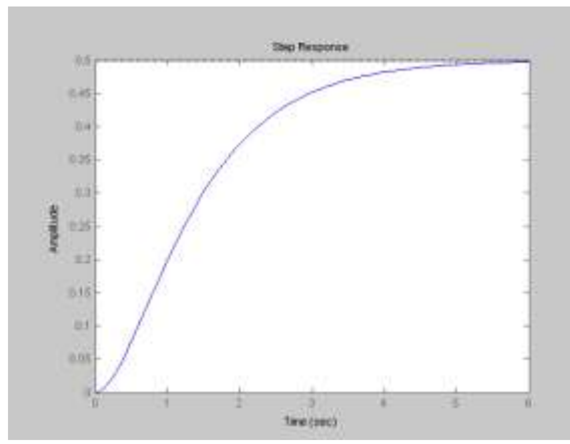
$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} 1e^{-st}\,dt$$

$$U(s) = \int_0^{\infty} 1e^{-st}\,dt$$

$$U(s) = -\frac{1}{s}\int -se^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}$$

$$U(s) = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad (1.12)$$



Reemplazando en (1.11)

$$X(s) = \frac{sx(0) + 3x(0) + x'(0) + 1/s}{(s+2)(s+1)} \qquad (1.13)$$

Factoreando el denominador tenemos que,

$$X(s) = \left(\frac{s+3}{(s+2)(s+1)}\right)x(0) + \left(\frac{1}{(s+2)(s+1)}\right)x'(0) + \frac{1}{(s+2)(s+1)s} \qquad (1.14)$$

Y separando (1.14) en fracciones simples

$$X(s) = \left(\frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+1}\right)x(0) + \left(\frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+1}\right)x'(0) + \frac{1/2}{s} + \frac{1/2}{s+2} - \frac{1}{s+1} \qquad (1.15)$$

Y recurriendo a la tabla de la figura (1.4) podemos obtener la solución de la ecuación diferencial.

Antitransformando la expresión (1.15) tenemos

$$x(t) = \left(-e^{-2t} + 2e^{-t}\right)x(0) + \left(-e^{-2t} + e^{-t}\right)x'(0) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} \qquad (1.16)$$

Vemos que mediante la transformada de Laplace se obtiene una solución completa de la ecuación diferencial, que incluye términos para todas las posibles condiciones iniciales y todas las entradas.

Función del tiempo $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	Transformada de Laplace $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
1	$\dfrac{1}{s}$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\dfrac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
$1-e^{-at}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$
te^{-at}	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-T)$	e^{-sT}
$sen(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
$e^{-bt}sen(at)$	$\dfrac{a}{(s+b)^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
$e^{-bt}\cos(at)$	$\dfrac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$

Figura (1.4)

Propiedades fundamentales de la función trasformada

Linealidad

$$\mathcal{L}[a_1 y_1 + a_2 y_2] = a_1\mathcal{L}[y_1] + a_2\mathcal{L}[y_2]$$

Traslado

$$\mathcal{L}[y(t \pm d)] = e^{\pm td.s}Y(s)$$

Derivadas

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^ny}{dt^n}\right] = s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - \left.\frac{d^ny}{dt^n}\right|_{t=0}$$

Integrales

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}Y(s)$$

Teorema del valor inicial y del valor final

Otra de las características interesantes del método de la transformada de Laplace, es que permite obtener importante información del comportamiento del sistema analizado, sin necesidad de resolver la ecuación diferencial.
Los teoremas de los valores inicial y final, pueden brindar información de cómo se comporta el sistema al principio y al final de la respuesta a una perturbación, examinando el limite de x(s) para s→ ∞ y para s→0.
El teorema del valor inicial es:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad (1.17)$$

El teorema del valor final es:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \qquad (1.18)$$

Aplicándolos a la expresión (1.13), tenemos

a) para el teorema del valor final

$$\lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} s.\left[\frac{sx(0) + 3x(0) + x'(0) + 1/s}{s^2 + 3s + 2}\right] \qquad (1.19)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \frac{1}{2}$$

Lo cual esta expresando que para $t \to \infty$, la salida x(t) del sistema representado por la ecuación diferencial de la expresión (1.3) tomara el valor 0,5 , cuando la entrada u(t) sea la función escalón unitario.

b) para el teorema del valor inicial

Es conveniente dividir numerador y denominador de (1.13) por s^2 con lo que

$$\lim_{s \to \infty} sX(s) = \lim_{s \to \infty} \left[\frac{x(0) + \frac{3x(0)}{s} + \frac{x'(0)}{s} + \frac{1}{s^2}}{s^2 + 3s + s} \right]$$

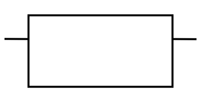
$$\lim_{t \to 0} x(t) = \lim_{s \to \infty} sX(s) = x(0)$$

Representaciones graficas

Los sistemas están generalmente constituidos por diversos elementos. Se utilizan diagramas de bloque y diagramas de flujo de señal para representar gráficamente las relaciones entre los distintos componentes y la información que se intercambia. En estos diagramas, las variables están concatenadas unas con otras en forma gráfica.

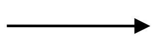
Diagramas de bloque

Los símbolos utilizados en la representación de los lazos de control a través de los diagramas de bloque son:

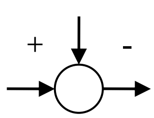


BLOQUES — Expresan relaciones funcionales entre variables. Físicamente, constituyen componentes del sistema.

LINEAS — representan señales (intercambio de variables) o conexiones físicas entre bloques



FLECHAS — Indican el sentido en que intercambian la información (variables)



SUMADORES — Indican la suma algebraica entre señales. Por lo general tienen dos entradas y una salida.

Diagramas de señal

En los diagramas de flujo de señal, las variables son representadas por pequeños círculos (nodos) y las relaciones entre ellas, por líneas que los conectan (ramas). Para diferenciar las relaciones estáticas de las dinámicas entre dos variables, las primeras se representan por líneas curvas y las segundas por líneas rectas. Cuando dos líneas convergen a un nodo las señales se suman.

Las flechas representan el sentido de la causalidad. Los símbolos sobre las líneas indican las operaciones con que se relacionan las variables.

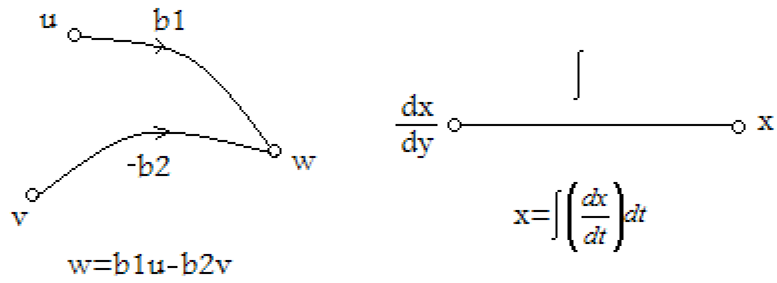


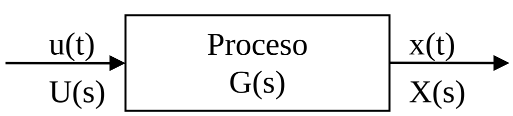
Figura 1.5

Función de transferencia

La función de transferencia de un sistema se define como la relación de la transformada de Laplace de la salida respecto de la entrada, despreciando todas las condiciones iniciales.

$$\text{Funcion de transferencia} = G(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{salida(t)}]}{\mathcal{L}[\text{entrada(t)}]} \quad (1.20)$$

Haciendo las condiciones iniciales iguales a cero (x(0)=0; x´(0)=0), la función de transferencia del sistema representado por la expresión (1.11) es:



$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} + e^{-t} \longrightarrow X(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{1/2}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$

$$\begin{matrix} u(t)=0 \text{ para } t < 0 \\ u(t)=1 \text{ para } t \geq 0 \end{matrix} \longrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+3s+2}}$$

En la figura 1.6 se ha completado el diagrama de bloques del lazo realimentada de la figura 1.3, consignándose todo el sistema en el dominio de a variable s.

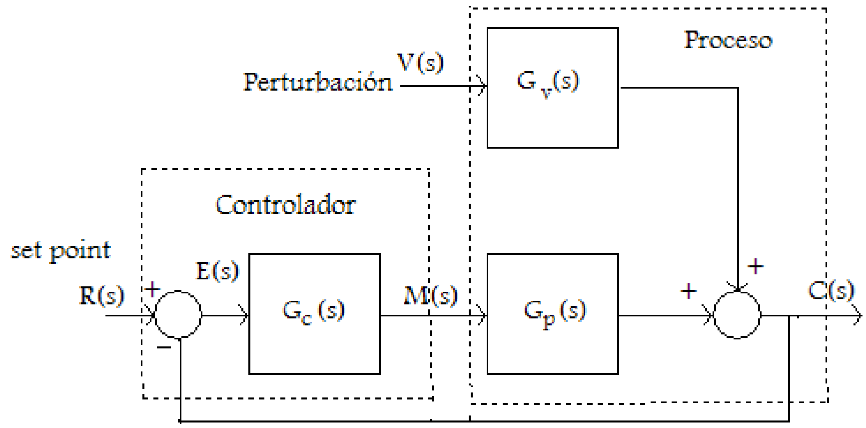


Figura 1.6

Con V(s)=0

$$E(s) = R(s) - C(s) \quad (1.21)$$

<u>Función de transferencia de lazo abierto</u> $= G(s) = \dfrac{C(s)}{E(s)} = G_c(s)G_p(s) \quad (1.22)$

Despejando E(s) de (1.22) y reemplazando en (1.21)

$$E(s) = \frac{C(s)}{G_c(s)G_p(s)} = R(s) - C(s)$$

A partir de la cual se puede obtener la denominada **<u>función de transferencia de lazo cerrado</u>**

$$\text{Funcion de transferencia lazo cerrado} = \frac{C(s)}{R(s)}$$

$$= \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad (1.23)$$

El producto $G_c(s)G_p(s) = G(s)$

Es denominado función de transferencia de lazo abierto.

Para una entrada de perturbación, con R(s)=0

$$E(s) = -C(s) \quad (1.24)$$

$$C(s) = V(s)\,G_V(s) + E(s)\,G(s) \quad (1.25)$$

Reemplazando (1.24) en (1.25)

$$\frac{C(s)}{V(s)} = \frac{G_V(s)}{1+G(s)} \quad (1.26)$$

Acciones básicas de control

Siendo el proceso el bloque fundamental del lazo y la razón del control, deberá elegirse en cada caso un controlador que permita lograr acabadamente el objetivo de regulación.
El estudio de los lazos de control consiste en modelizar el proceso a través de su ecuación diferencial y de la identificación de los elementos dinámicos y de acuerdo a ese modelo, seleccionar un controlador que permita regularlo en forma satisfactoria.
Los controladores pueden conformarse combinando distintas acciones básicas de control con el objeto de una mejor adaptación a las características dinámicas de los procesos.
Las acciones básicas de control son:
Acción proporcional (banda proporcional P)

$$m(t) = K_c \, \mathrm{e(t)}$$

$$\mathrm{M(s)} = \mathrm{K_c} \int e(t) e^{-st} dt$$

$$\mathrm{E(s)} = \int e(t) e^{-st} dt$$

$$\boxed{\mathrm{G_c}(s) = \frac{\mathrm{M(s)}}{\mathrm{E(s)}} = \mathrm{K_c} = \frac{100}{P}}$$

Acción integral (I)

$$\mathrm{m(t)} = \mathrm{Ki} \int e(t) dt$$

$$\mathrm{M(s)} = \mathrm{Kd}\ \mathcal{L}\left[\int e(t) dt\right]$$

$$\mathrm{M(s)} = \mathrm{Ki} \int \left[\int e(t) e^{-st} dt\right] dt = \frac{\mathrm{Ki}}{s} E(s)$$

$$\boxed{\mathrm{G_c}(s) = \frac{\mathrm{M(s)}}{\mathrm{E(s)}} = \frac{\mathrm{Ki}}{s}}$$

Acción derivativa (D)

$$\mathrm{m(t)} = \mathrm{Kd}\ \frac{de(t)}{dt}$$

$$\mathrm{M(s)} = \mathrm{Kd}\ \mathcal{L}[\mathrm{e(t)}]$$

$$M(s) = Kd\left[\int e'(t) e^{-st} dt\right] = \mathrm{Kd\ s\ E(s)}$$

$$\boxed{\mathrm{G_c}(s) = \frac{\mathrm{M(s)}}{\mathrm{E(s)}} = \mathrm{Kd\ s}}$$

Estas acciones se pueden combinar formando controladores.

PI

$$\mathrm{m(t)} = \mathrm{K_c}\left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt\right]$$

$$\mathrm{G_c}(s) = \mathrm{K_c}\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

PD

$$m(t) = K_c\left[e(t)+T_d\frac{de(t)}{dt}\right]$$

$$G_c(s) = K_c(1+T_d s)$$

PID

$$m(t) = K_c\left[e(t)+\frac{1}{T_i}\int e(t)dt+T_d\frac{de(t)}{dt}\right]$$

$$G_c(s) = K_c\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)$$

DINÁMICA DE PROCESOS

Para obtener un diseño efectivo y confiable de un sistema de control, es fundamental entender y describir el comportamiento dinámico del proceso a controlar. En este sentido, los modelos matemáticos (tanto teóricos como empíricos) representan una herramienta fundamental. La caracterización de un proceso y su comportamiento, requiere definir un conjunto de variables cuyos valores determinen el estado del proceso y un conjunto de ecuaciones que relacionen las variables previamente definidas. Las variables y las ecuaciones forman el modelo del proceso.

Balances Dinámicos De Masa Y Energía

La gran mayoría de los procesos encontrados en la industria de procesos pueden ser caracterizados por variables fundamentales como masa, energía y cantidad de movimiento. Muchas veces estas cantidades no pueden ser medidas directamente, en estos casos se emplean otras variables más simples de medir (concentraciones, densidades, presiones, temperaturas, caudales, etc.) que, en su conjunto, determinan las variables fundamentales.

Las ecuaciones que relacionan estas variables pueden ser obtenidas por medio de experimentos (modelos empíricos) o bien a través de los principios de conservación; (modelos teóricos). Estos principios establecen lo siguiente:

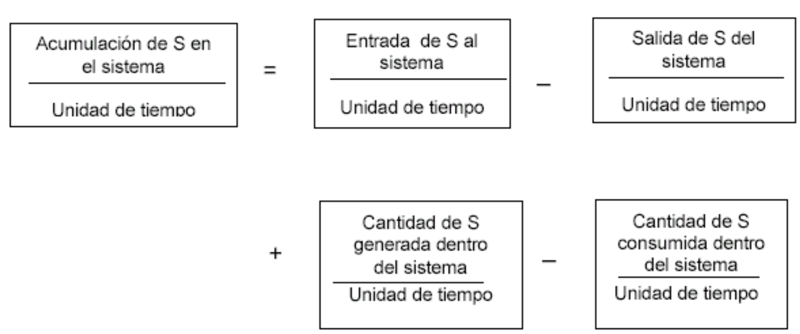


Figura 1: Diagrama genérico de ecuaciones de balance

Donde la cantidad S es una de las siguientes variables fundamentales:

- Masa total
- Moles de componentes
- Energía total
- Cantidad de movimiento

Las ecuaciones del tipo de la Figura 1 pueden dar origen a modelos estáticos o dinámicos. Se habla de modelos estáticos cuando se estudia al proceso en estado estacionario, esto es, cuando las propiedades que definen al proceso no cambian con el tiempo. Por otra parte, un modelo dinámico es aquel que describe la evolución del proceso mientras el tiempo transcurre. Un modelo estático presenta una acumulación nula, ya que este término por definición es:

$$[\textit{Acumulación de S en el Sistema}] = dS$$

Y en un proceso en estado estacionario, el valor de S en el sistema permanece constante, luego $dS = 0$, en cambio en un modelo dinámico, será distinto de cero.

En control de procesos, el interés estará centrado principalmente en el comportamiento dinámico de un sistema. Esto es, se debe estudiar su evolución en el tiempo, fenómeno que puede ser descrito por ecuaciones conocidas como modelo del proceso, sea el ejemplo del nivel del tanque de la Figura 2:

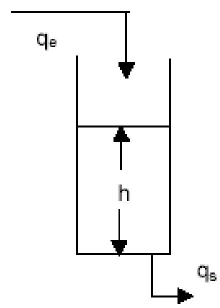


Figura 2: Nivel de un tanque

En este sencillo ejemplo, se pueden definir como variable fundamental a:

- Masa (M)

Y las siguientes variables medibles:

- Caudal de entrada: q_e ,
- Caudal de salida: q_s
- Altura: h

Se supone además que el área (A) del tanque, como las densidad (ρ) del líquido son constantes.

Por balance de masas se tiene que:

$$\left[\frac{Acumulación}{tiempo}\right] = \left[\frac{dM}{dt}\right] = \left[\frac{d\rho V}{dt}\right] = \rho A\left[\frac{dh}{dt}\right]$$

$$\left[\frac{Entrada \quad al \quad sistema}{tiempo}\right] = \rho \cdot q_e$$

$$\left[\frac{Salida \quad del \quad sistema}{tiempo}\right] = \rho \cdot q_s$$

$$\left[\frac{Generación \quad en \quad el \quad sistema}{tiempo}\right] = 0$$

$$\left[\frac{Consumo \quad en \quad el \quad sistema}{tiempo}\right] = 0$$

Aplicando la ecuación genérica de la Figura 1 se llega a:

$$\rho A\left[\frac{dh}{dt}\right] = \rho q_e - \rho q_s$$

Que dividiendo por ρ y A, se obtiene la siguiente ecuación dinámica en las variables medibles:

$$\left[\frac{dh}{dt}\right] = \frac{q_e}{A} - \frac{q_s}{A}$$, para obtener la ecuación estática, se hace:

$$dM = 0 = \rho A dh \quad \Rightarrow dh = 0 \text{ , luego } q_e = q_s$$

Sistemas de Primer Orden

El ejemplo visto corresponde a un sistema de primer orden, que es aquel cuyo comportamiento dinámico puede ser descrito en forma apropiada por una ecuación diferencial de primer orden. Sea y la variable observada y u la variable manipulada. Sea también un sistema representado por una ecuación diferencial lineal:

$$a_1\left[\frac{dy}{dt}\right] + a_0 \cdot y = b \cdot u$$

Si $a_0 \neq 0$, la ecuación anterior se puede reordenar y escribir en forma estándar:

$$\tau\left[\frac{dy}{dt}\right] + y = k \cdot u \qquad (1) \qquad \text{en que,}$$

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} = \text{ constante de tiempo y } K = \frac{b}{a_0} = \text{ ganancia estática}$$

Que son los parámetros característicos de un proceso de primer orden.

Si se transforma la ecuación (1) al dominio *s* se obtiene:

$$\tau\left[s \cdot Y(s) - y_0\right] + Y(s) = K \cdot U(s)$$

Que para estados iniciales nulos queda:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \qquad (2)$$

La expresión (2) se denomina función de transferencia del proceso.

Un concepto muy importante en el análisis de sistemas dinámicos es el de polo. Los polos del sistema son aquellos valores de *s* que hacen infinita la función de transferencia. En otras palabras, los polos del proceso son las raíces del polinomio denominador. Para el caso de la función (2):

$$\tau \cdot s^* + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad s^* = -\frac{1}{\tau}$$

Luego, el polo de una función de transferencia de primer orden corresponde al valor inverso aditivo del recíproco de la constante de tiempo. Es importante establecer qué tipos de procesos pueden ser modelados como sistemas de primer orden. En general estos procesos se caracterizan por:

a. La capacidad de almacenar masa, energía o cantidad de movimiento en el sistema.
b. La resistencia asociada al transporte de masa, energía o cantidad de movimiento desde o hacia el sistema.

Para el caso del Ejemplo 1 arriba descrito, un balance de masa de la ecuación da (considerando área y densidad constantes):

$$A\frac{dh}{dt} = q_e - q_s$$

Suponiendo una descarga lineal o linealizada, el caudal de salida q_s está relacionado con la presión hidrostática del nivel *h* a través de una resistencia
R:

$$q_s = \frac{h}{R} = \frac{fuerza \quad motriz}{resistencia}$$

es decir:

$$\tau\frac{dh}{dt} + h = Kq_e \quad (3) \quad \text{con} \quad \tau = AR \quad \text{y} \quad K = R$$

El área A de tanque es una medida de la capacidad de almacenar materia. La constante de tiempo *T* es igual a la capacidad de almacenar multiplicada por la resistencia.

Dinámica de Sistemas de Primer Orden

Para caracterizar la dinámica de un proceso, generalmente se perturba con un estímulo escalón o impulso en la variable manipulable *u*, luego se registra la variación en el tiempo de la variable observada *y*. A continuación se verá la respuesta de un sistema de primer orden ante:

- una perturbación en escalón
- una perturbación impulso

Entrada escalón

De acuerdo a tablas, la expresión transformada de una entrada en escalón, es:

$U(s) = \frac{E}{s}$ y por lo tanto, la salida transformada de un sistema de primer orden queda dada por:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{K \cdot E}{\tau . s + 1} \cdot \frac{1}{s} = KE \frac{1}{s(\tau \cdot s + 1)}$$

De las tablas

$$y(t) = KE\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

Esta expresión aparece graficada en la Figura 3 con la constante de tiempo τ_1 = 78,97 segundos (igual a τ_2) del tanque inferior izquierdo de la Planta Piloto.

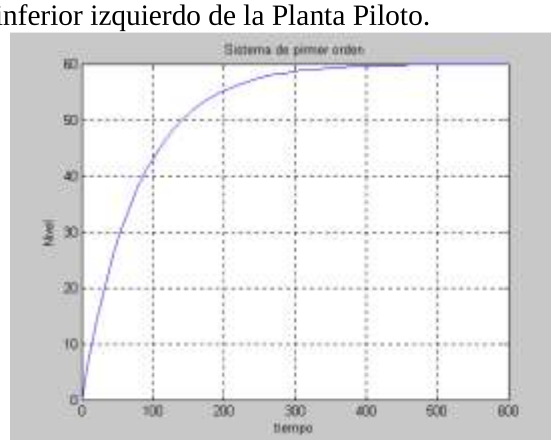


Figura 3: Nivel de tanque inferior izquierdo

Las características más importantes de la respuesta dinámica de un sistema de primer orden ante un estímulo en escalón son:

- El proceso llega naturalmente a un nuevo estado estacionario (es autorregulable)

- La razón $\frac{y(t)}{u(t)}$ tiende a K para tiempos muy largos, es decir:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{u(t)} = K = \frac{KE}{E}$$

De aquí viene el nombre de ganancia estática del parámetro K. De esta ecuación podemos decir que:

"Cuando K es grande, un pequeño cambio en la entrada *u* provoca una gran variación en la salida *y*"

"Cuando K es pequeño, un cambio en la entrada *u* provoca una pequeña variación en la salida *y*"

- La constante de tiempo da una indicación del tiempo necesario para que la salida del sistema llegue al nuevo estado estacionario (en t = 5τ se alcanza el 99% del valor final de estado estacionario).

Entrada impulso

La transformada del estimulo impulso es:

$$U(s) = I$$

Luego la salida es:

$$Y(s) = \frac{IK}{\tau s + 1}$$

Obteniendo la expresión inversa:

$$y(t) = \frac{IKe^{-t/\tau}}{\tau}$$

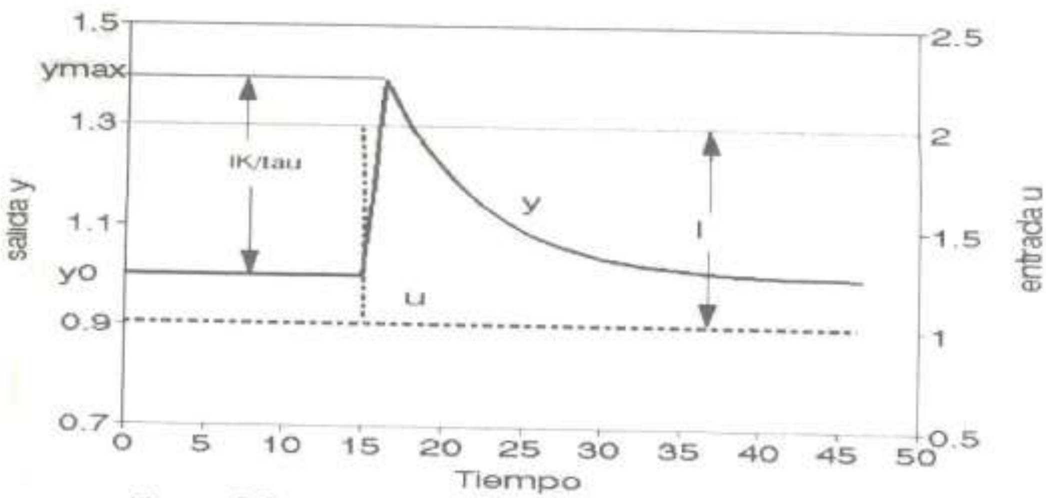


Figura 2.2
Respuesta impulso de un sistema de primer orden.

Esta respuesta se caracteriza por un "salto" inmediato seguido por un decaimiento exponencial.

> "Un τ pequeño implica un salto grande y un decaimiento rápido"
> "Un τ grande implica un salto pequeño y un decaimiento lento"

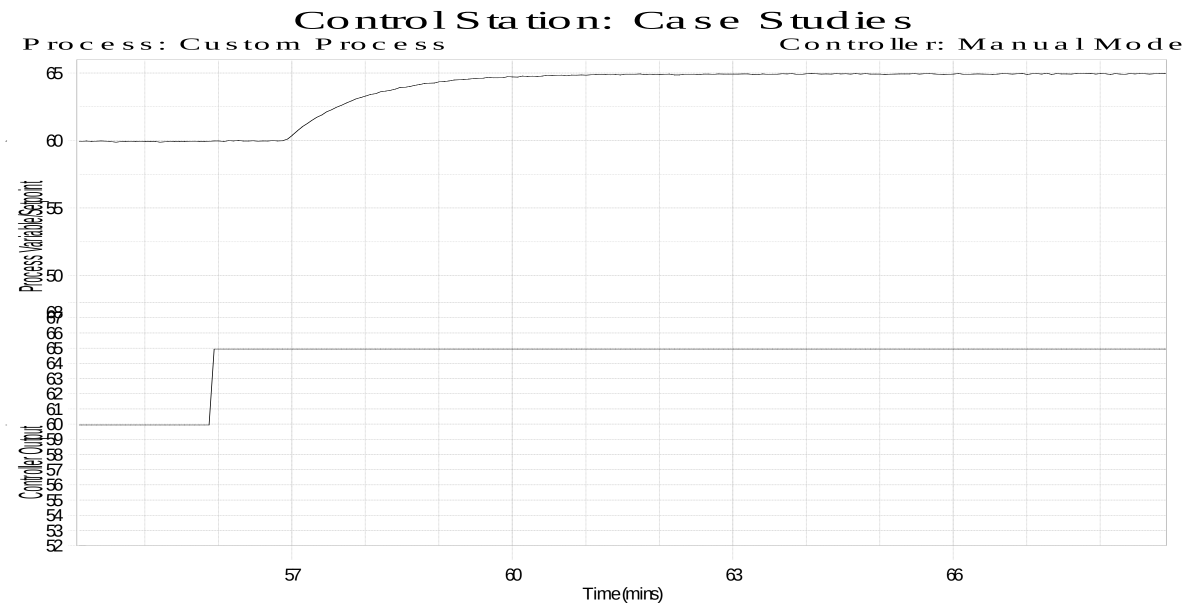
Sistemas de Primer Orden + Tiempo muerto:

El tiempo muerto agrega un retraso en la respuesta, dado por una función de transferencia: $G(s)= e^{-td.s.}$

Cuando un proceso es capacitivo + tiempo muerto, su función de transferencia es:

$G(s)= K/ (\tau s+1)* e^{-td.s.}$

Su respuesta temporal es:



Se puede observar el retardo inicial debido al tiempo muerto y luego la respuesta típicamente capacitiva.

Sistemas de Segundo Orden

Definición: son aquellos procesos cuya variable de salida puede ser descrita por una ecuación diferencial de segundo orden. Si el modelo es lineal, la ecuación es:

$$a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} \quad (4)$$, con a_2, a_1, b_0, b_1 constantes

Si el parámetro a_0 es distinto de cero, la expresión (4) se puede llevar a la siguiente forma estándar:

$$\tau^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dy}{dt} + y = K(u + c\frac{du}{dt}) \qquad (5)$$

$$\text{con } \tau = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}; \qquad 2\xi\tau = \frac{a_1}{a_0}; \qquad K = \frac{b_0}{a_0}; \qquad c = \frac{b_1}{a_0.K}$$

Si se consideran condiciones iniciales nulas, la ecuación (5) puede ser expresada en forma transformada:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{K(cs+1)}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau.s + 1} \qquad (6)$$

en donde:

G(s): función de transferencia del sistema
K: ganancia estática
ξ: factor de amortiguamiento
τ : recíproco de la frecuencia umbral de oscilación (período natural)
c: inverso aditivo del valor recíproco del cero de la función de transferencia (= -1/z)

Los procesos de segundo orden tienen su origen al conectar dos sistemas de primer orden (en serie o en paralelo), en sistemas inherentemente de segundo orden y en procesos controlados. A continuación analizaremos solo el caso de conexión en serie no interactiva por ser de aplicación en este Proyecto.

Sistemas de primer orden conectados en serie (no interactivos).

Son aquellos donde un sistema de primer orden influye sobre un segundo pero éste no puede influir sobre el primero.
Si se calcula la función de transferencia global del diagrama de bloques de la Figura 4, se obtiene:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{K_1K_2}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

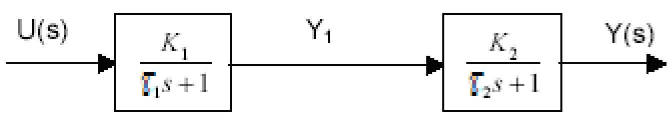


Figura 4: Diagrama en bloques de sistemas en serie no - interactivos

Que tiene la forma de la ecuación (6). Identificando términos se obtiene:

$$G(s) = \frac{K_1K_2}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1+\tau_2)s+1} = \frac{K(sc+1)}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau.s+1} \quad (7)$$

por lo tanto:

$$K=K_1K_2\ ; \quad \tau^2 = \tau_1\ \tau_2\ ; \quad \xi = \frac{(\tau_1+\tau_2)}{2\sqrt{\tau_1\tau_2}}\ ; \quad c = 0$$

Los polos de la ecuación (6) están dados por las raíces:

$$p_1 = -1/\tau_1 \qquad \text{y} \qquad p_2 = -1/\tau_2$$

La respuesta al escalón del sistema representado por la ecuación (7) se puede obtener de las tablas de transformadas de Laplace:

$$y(t) = K_1 K_2 E \left[1 + \frac{(\tau_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}})}{\tau_2 - \tau_1} \right]$$

La respuesta dinámica de estos sistemas conectados es similar a la de un sistema de primer orden, aunque son más lentos; predominando la dinámica del más lento.

La Figura 5 representa, por ejemplo, el subsistema homo lateral izquierdo del Proyecto en cuestión, sin tener en cuenta el ingreso de caudal en forma directa al tanque inferior. Se han denominado las alturas con referencia a los nombres dados a los tanques en el Capítulo correspondiente al modelado.

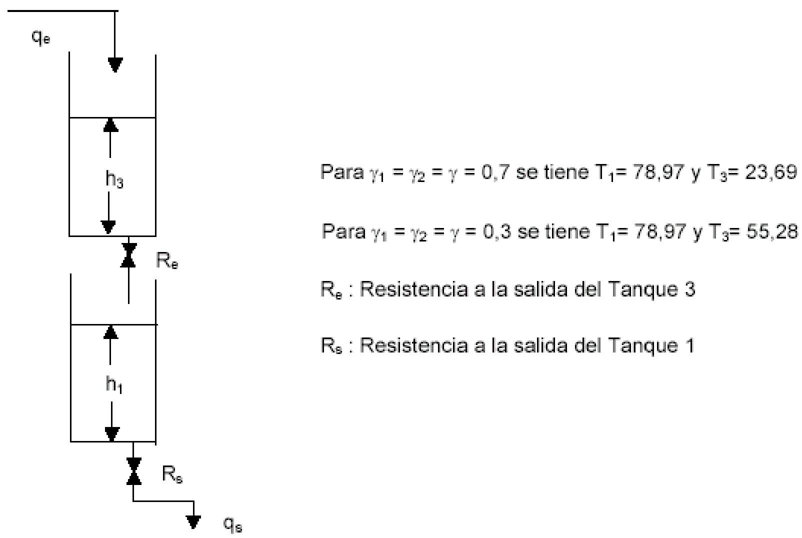


Figura 5: Sistema homo lateral izquierdo de la Planta Piloto

Considerando la forma de la ecuación (3), se tiene para ambos tanques:

$$\tau_3 \frac{dh_3}{dt} + h_3 = K_e q_e$$

$$\tau_1 \frac{dh_1}{dt} + h_1 = \frac{K_s}{K_e} h_3$$

Que llevadas al campo transformado *s* quedan:

$$\tau_3 s h_3(s) + h_3(s) = K_e q_e(s) \qquad (8)$$

$$\tau_1 s h_1(s) + h_1(s) = \frac{K_s}{K_e} h_3(s) \qquad (9)$$

Despejando $h_3(s)$ de (8) y reemplazando en (9) y reordenando se obtiene la función de transferencia entre la salida (nivel del tanque inferior) sobre la entrada (caudal al tanque superior):

$$\frac{h_1(s)}{q_e(s)} = \frac{K_s}{(\tau_1 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$$

La Figura 6 muestra las respuestas del sistema interconectado en serie al escalón con $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0{,}7$ ($\tau_1 = 78{,}97$ y $\tau_3 = 23{,}69$) y $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0{,}3$ ($\tau_1 = 78{,}97$ y $\tau_3 = 55{,}28$), la curva de menor pendiente corresponde a éste último caso.

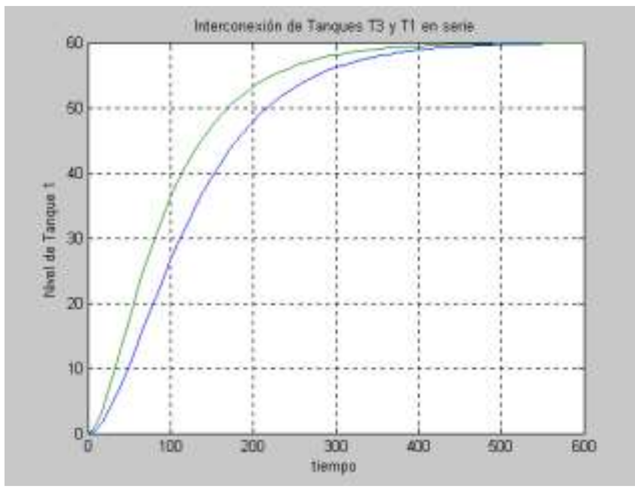
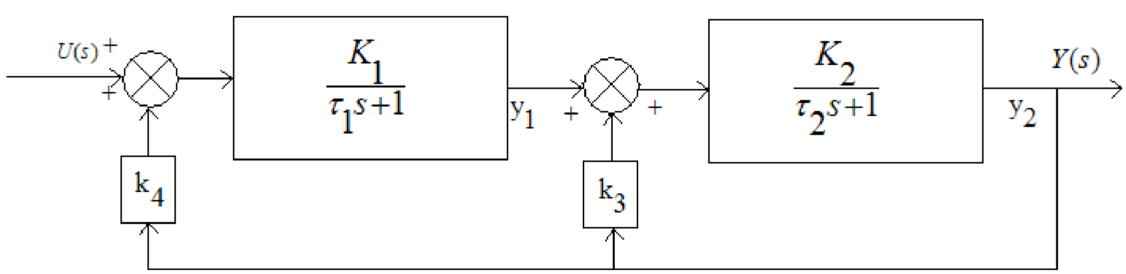


Figura 6: Respuesta al escalón del sistema

Conexión en serie interactiva



Tenemos las siguientes relaciones

$$Y_1(s) = [U(s) + K_4 Y_2(s)]G_1(s) \quad (10)$$

$$Y_2(s) = [Y_1(s) + K_3 Y_2(s)]G_2(s) \quad (11)$$

Reemplazando 10 en 11, se tiene

$$Y_2(s) = [(U(s) + K_4 Y_2(s))G_1(s) + K_3 Y_2(s)]G_2(s)$$

Reordenando

$$Y_2(s) = U(s)G_1(s)G_2(s) + Y_2(s)G_2(s)\left[K_4G_1(s) + K_3\right]$$

Despejando $Y_2(s)$, se llega finalmente a:

$$\frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 - K_4G_1(s)G_2(s) - K_3G_2(s)} \qquad (12)$$

Definiendo los siguientes parámetros:

$$K = \frac{K_1K_2}{1 - K_2\left(K_1K_4 + K_3\right)}$$

$$\tau^2 = \tau_1^*\tau_2^* = \frac{\tau_1\tau_2}{1 - K_2\left(K_1K_4 + K_3\right)} = \overline{\tau_1}\,\overline{\tau_2}$$

$$2\xi\tau = \tau_1^* + \tau_2^* + \tau_3^* = \frac{\tau_1 + \tau_2 - K_3K_2\tau_1}{1 - K_2\left(K_1K_4 + K_3\right)} = \overline{\tau_1} + \overline{\tau_2}$$

$$c = 0$$

Se puede representar la ecuación 12 de la forma:

$$\frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau^2s^2 + 2\xi\tau + 1} \qquad (13)$$

Si tenemos, que:

$$K_1K_4 = -K_3 \Rightarrow \tau_1^* = \tau_1 ; \tau_2^* = \tau_2 \ \text{ y } \ \tau_3^* = -K_3K_2\tau_1$$

En este caso τ_3^* se denomina factor de interacción

Los polos de la ecuación 13, están dados por:

$$P_{1,2} = \frac{-\left(\tau_1^* + \tau_2^* + \tau_3^*\right) \pm \sqrt{\left(\tau_1^* + \tau_2^* + \tau_3^*\right)^2 - 4\tau_1\tau_2}}{2\tau_1\tau_2}$$

Para sistemas físicos de interés τ_3^* es positivo, por lo que siempre tienen polos reales, ya que:

$$\left(\tau_1^* + \tau_2^* + \tau_3^*\right)^2 - 4\tau_1\tau_2 > 0$$

En estos casos, la respuesta escalón queda dada por:

$$y(t) = KE\left[1 + \left(\frac{\overline{\tau_1}e^{-t/\overline{\tau_1}} - \overline{\tau_2}e^{-t/\overline{\tau_2}}}{\overline{\tau_1} - \overline{\tau_2}}\right)\right]$$

Con,

$$\overline{\tau_1} = \frac{1}{p_1} \ \text{ y } \ \overline{\tau_2} = \frac{1}{p_2}$$

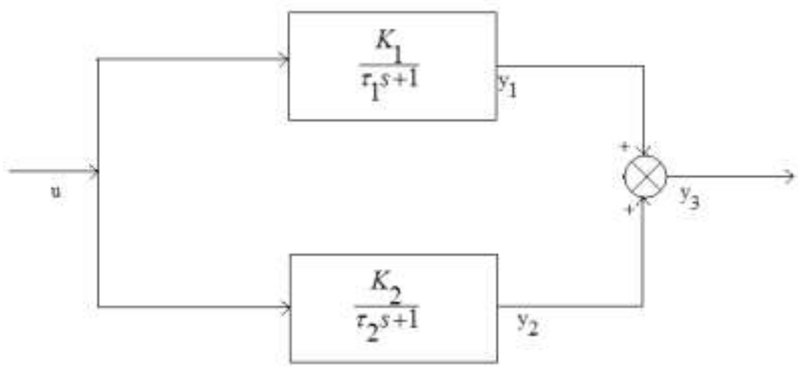
Se puede demostrar que:

$\overline{\tau_1} > \tau_1; \tau_2 > \overline{\tau_2}$

Es decir, en el sistema interactivo, una de las constantes de tiempo es mayor que las constantes de tiempo de los sistemas originales de primer orden. Esto significa que el sistema interactivo es aún más lento que el sistema no interactivo definido por la respuesta escalón.

Conexión en paralelo

Los sistemas conectados en paralelo presentan respuestas completamente distintas a las estudiadas anteriormente. El siguiente diagrama de bloques nos representa estos procesos:



$$\frac{Y_3(s)}{U(s)} = \left[G_1(s) + G_2(s)\right] = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}$$

Desarrollando se llega a la siguiente función de transferencia global:

$$G(s) = \frac{s(\tau_2 K_1 + \tau_1 K_2) + (K_1 + K_2)}{\tau_2 \tau_1 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1} \quad (14)$$

Recordando la forma general de los sistemas de segundo orden, se tiene:

$K = (K_1 + K_2)$

$\tau^2 = \tau_1 \tau_2$

$2\xi\tau = \tau_1 + \tau_2$

$c = \dfrac{(\tau_2 K_1 + \tau_1 K_2)}{(K_1 + K_2)}$

Se puede apreciar que la diferencia fundamental entre estos sistemas y los vistos anteriormente, es la aparición de un cero o valor que anula el numerador de la función de transferencia. La respuesta escalón depende fuertemente del valor de este cero.

Utilizando las definiciones de K y c en la ecuación 14, se obtiene:

$$G(s)=\frac{K(cs+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

O bien

$$G(s)=\frac{K(c-\tau_1)}{\tau_2-\tau_1}\left(\frac{1}{\tau_1 s+1}\right)+\frac{K(c-\tau_2)}{\tau_1-\tau_2}\left(\frac{1}{\tau_2 s+1}\right)$$

Cuya respuesta escalón queda definida por:

$$y_3(t)=KE\left[1-\left\{\frac{(c-\tau_1)e^{-t/\tau_1}-(c-\tau_2)e^{-t/\tau_2}}{(\tau_1-\tau_2)}\right\}\right] \quad (15)$$

O bien definiendo

$z=1/c$, $p_1=-1/\tau_1$ y $p_2=-1/\tau_2$

La expresión 15, se puede reescribir como:

$$y_3(t)=KE\left[1-\left\{\frac{p_2(p_1-z)e^{p_1 t}-p_1(p_2-z)e^{p_2 t}}{z(p_1-p_2)}\right\}\right]$$

De esta expresión es fácil ver que la respuesta es la resultante de dos efectos y que dependen del valor del cero z, se privilegia uno u otro. En particular, si $z=p_2$, la respuesta escalón del sistema global es idéntica a la del sistema de primer orden G_1; en caso que $z=p_1$, sólo se aprecia la respuesta de G_2.

Si las constantes K_1 y K_2 son del mismo signo, la respuesta global es similar a la respuesta de dos sistemas de primer orden conectados en serie (es decir, respuesta sigmoidal). Sin embargo, si las ganancias K son de diferentes signo, se pueden presentar las respuestas que aparecen en la figura.

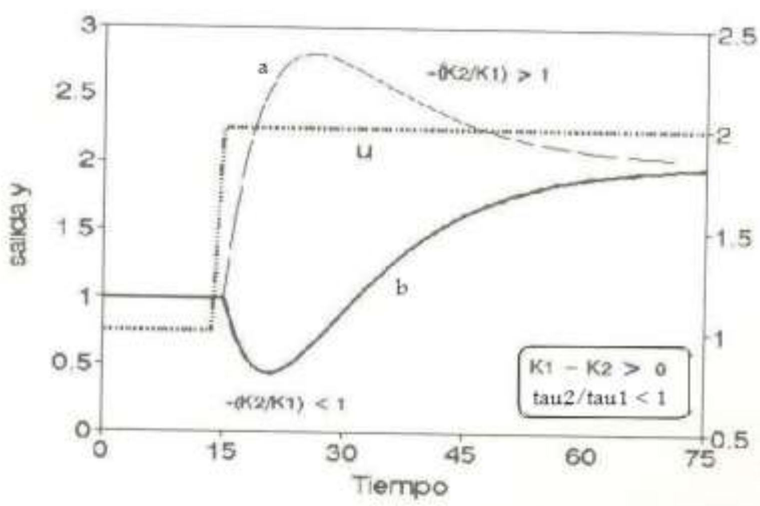


Figura 2.10
Respuesta escalón de sistemas conectados en paralelo.

El caso b corresponde a z positivo, es decir

$$\tau_2 K_1+\tau_1 K_2<0$$

Y se denomina respuesta inversa. Estos sistemas, también llamados de fase no mínima, son muy difíciles de controlar, puesto que inicialmente el sistema responde en sentido contrario. En este caso, la dinámica del sistema con ganancia negativa es mucho más rápido; pero luego de un tiempo predomina el efecto del sistema más lento, ya que posee ganancia estática mayor. La curva (a) denota un proceso en que la parte dinámica del sistema con ganancia negativa es mucho mas lenta. Luego de un tiempo largo, se deja sentir su efecto, y el proceso tiende a un estado estacionario menor.

Es muy difícil obtener el valor de las constantes K_1, K_2, τ_1 y τ_2 a partir de curvas como las de la figura. Es más conveniente modelar estos sistemas por una ecuación del tipo:

$$G(s) = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)} . \frac{K_2 e^{-\theta s}}{(\tau_2 s + 1)}$$

Cuya respuesta ante un estimulo escalón unitario es:

$$y(t) = k_1\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right) - \left[k_2\left(1 - e^{-(t-\theta)/\tau_1}\right)\right]U(t-\theta) \qquad (15)$$

U ($t-\theta$) es un escalón unitario desplazado en un tiempo 0. Los parámetros de la función de transferencia se pueden obtener a partir de la figura 2. La pendiente en el origen es igual a:

$$m = \left.\frac{Wy}{Wt}\right|_{t_0} = \frac{EK_1}{\tau_1} \qquad (16)$$

Por otra parte, de acuerdo a 15, se cumple que:

$$y_{\max} = EK_1\left(1 - e^{-\theta t}\right)$$

O bien

$$\tau_1 = -\theta \Big/ \ln\left[1 - \frac{y_{\max}}{EK_1}\right]$$

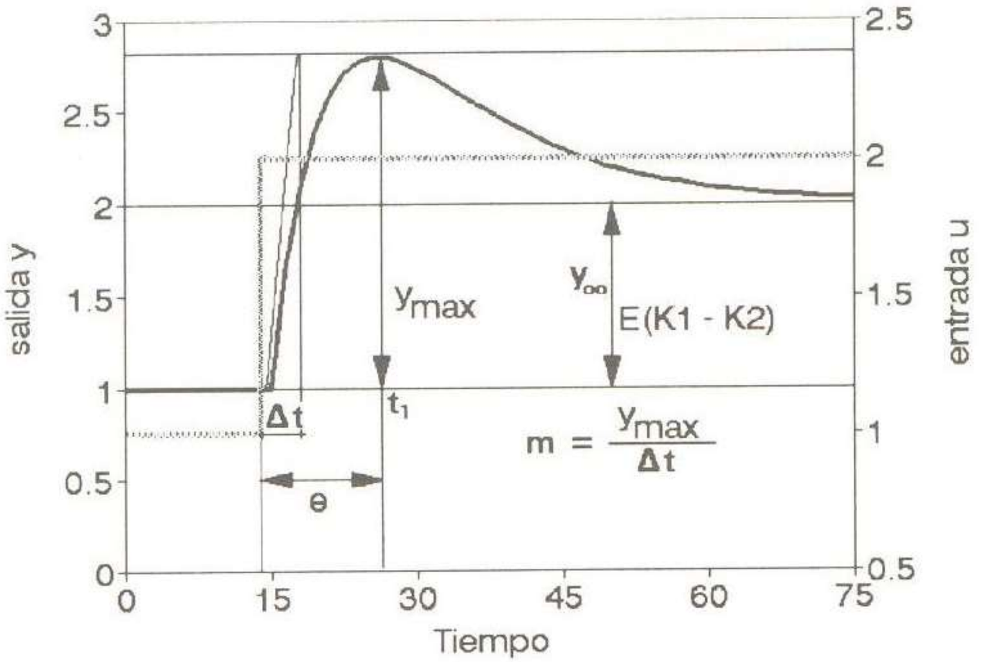


Figura 2.11
Ajuste de un modelo para sistemas conectados en paralelo.

Reemplazando, se llega a una ecuación implícita para K_1;

$$EK_1 = \frac{-m\theta}{\ln\left[1 - \frac{y_{max}}{EK_1}\right]}$$

En donde 0, m e y_{max} se obtienen de la figura 2. Una corta iteración permite obtener una buena estimación de K_1. Por medio de 16 se obtiene el valor de y la constante K_2 se obtiene de:

$$K_2 = K_1 - \frac{y_\infty}{E}$$

La constante de tiempo se obtiene fácilmente por medio del método del 63%, considerando una respuesta de primer orden, a partir del instante t_1 en la figura 2. Se presentaran respuestas inversas con $|K_2| > |K_1|$

Procesos físicos de segundo orden

Estos sistemas son escasos en procesos químicos y están asociados al movimiento de sólidos o de masa de fluido. Al igual que los sistemas de primer orden, estos procesos presentan resistencia al transporte y capacidad de almacenar una cierta propiedad (por la general, movimiento), pero lo que los distingue es la inercia al transporte.
Los procesos físicos de 2° orden se representan por la siguiente función de transferencia.

$$\boxed{G(s) = \frac{K}{\left(\tau^2 s^2 + 2\xi\tau.s + 1\right)}}$$

O sea no poseen ceros. La respuesta escalón de estos procesos es muy dependiente del valor de (factor de amortiguamiento). En el campo transformado, esta respuesta toma la forma:

$$Y(s) = \frac{K}{\left(\tau^2 s^2 + 2\xi\tau.s + 1\right)}\frac{E}{s} \quad (17)$$

La cual dependerá del valor de los polos, es decir las raíces del polinomio denominador o ecuación característica:

$\tau^2 s^2 + 2\xi\tau.s + 1 = 0$

Que posee las siguientes soluciones:

$$p_1 = \frac{-\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{-\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}$$

Por lo que 17 se puede escribir como:

$$Y(s) = \frac{KE/\tau^2}{(s - p_1)(s - p_2)s}$$

Se puede apreciar que la naturaleza de los polos depende exclusivamente del valor del factor de amortiguamiento, es decir como:

1. $\xi > 1 \Rightarrow 2$ polos reales negativos y distintos
2. $\xi = 1 \Rightarrow 2$ polos reales negativos e iguales
3. $\xi < 1 \Rightarrow 2$ polos complejos conjugados con parte real negativa

La respuesta escalón del proceso de 2° orden dependerá de la naturaleza de éstos polos, o bien del valor de ξ:

1. *Respuesta sobre amortiguada* $(\xi > 1)$

Se puede demostrar que en este caso la respuesta escalón del sistema es:

$$y(t) = EK\left[1 - e^{-\xi t/\tau}\left(\cosh\left(\sqrt{\xi^2 - 1}\frac{1}{\tau}\right) + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} senh\left(\sqrt{\xi^2 - 1}\frac{1}{\tau}\right)\right)\right] \quad (18)$$

Con

$$senh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \qquad \cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$$

Si $\xi_2 > 1$, p_1 y p_2 son reales y distintos, luego la ecuación 18 se puede escribir como:

$$y(t) = EK\left[1 + \frac{\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}}{\tau_2 - \tau_1}\right] \quad (19)$$

Con

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1} \quad \text{y} \quad p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$$

La ecuación 19 corresponde a la salida de un sistema compuesto por 2 procesos de primer orden conectados en serie. Es fácil demostrar que estos procesos siempre dan origen a respuestas sobreamortiguadas. Mientras mayor sea el valor de ξ, mayor será el tiempo que tomará el proceso en llegar al estado estacionario. Al igual que en sistemas de primer orden, los procesos sobreamortiguados alcanzan un valor final igual a la ganancia multiplicada por el tamaño de la perturbación, es decir:

$$y_\infty = KE$$

2. ***Respuesta críticamente amortiguada*** $(\xi = 1)$

En este caso se tienen 2 polos reales e iguales que dan origen a la siguiente respuesta escalón:

$$y(t) = EK\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right]$$

Esta es la respuesta más rápida que se puede obtener con polos reales.

3. ***Respuesta subamortiguada*** $(\xi < 1)$

Estos sistemas poseen polos complejos conjugados que dan origen a respuestas oscilatorias, de la forma:

$$y(t) = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi t/\tau} sen(wt + \varphi)\right] \quad (20)$$

En donde;

$$w = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} \quad \text{y} \quad \varphi = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right]$$

La respuesta de estos sistemas es inicialmente más rápida que la de los anteriores, pero dan origen a oscilaciones que pueden retardar la llegada al estado estacionario. Estas oscilaciones, que son la característica de un sistema de 2° grado subamortiguado, se ven incrementadas al disminuir el factor de amortiguamiento. La mayor importancia que presenta este tipo de respuesta, es que aparece en casi todos los procesos controlados.

La siguiente figura nos muestra las respuestas escalón para los tres casos mencionados anteriormente:

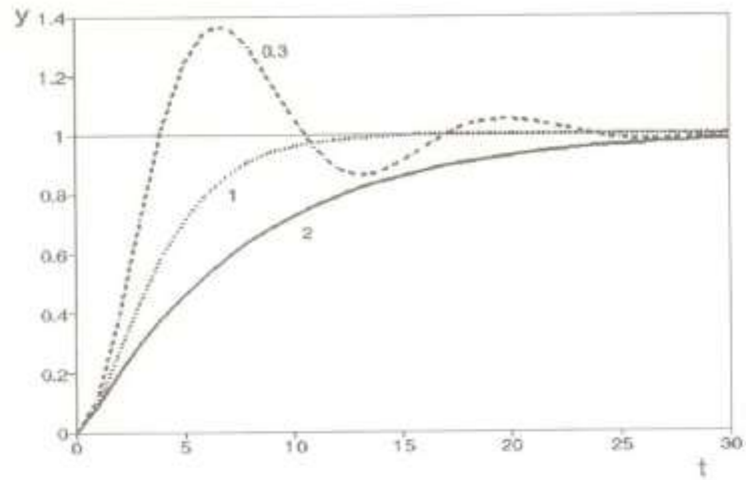


Figura 2.12
Respuesta escaló sistemas de segur orden.

Existen diversos parámetros que nos ayudan a caracterizar (y eventualmente a modelar) un sistema de 2° grado subamortiguado. Estos se muestran en la siguiente figura y se definen a continuación:

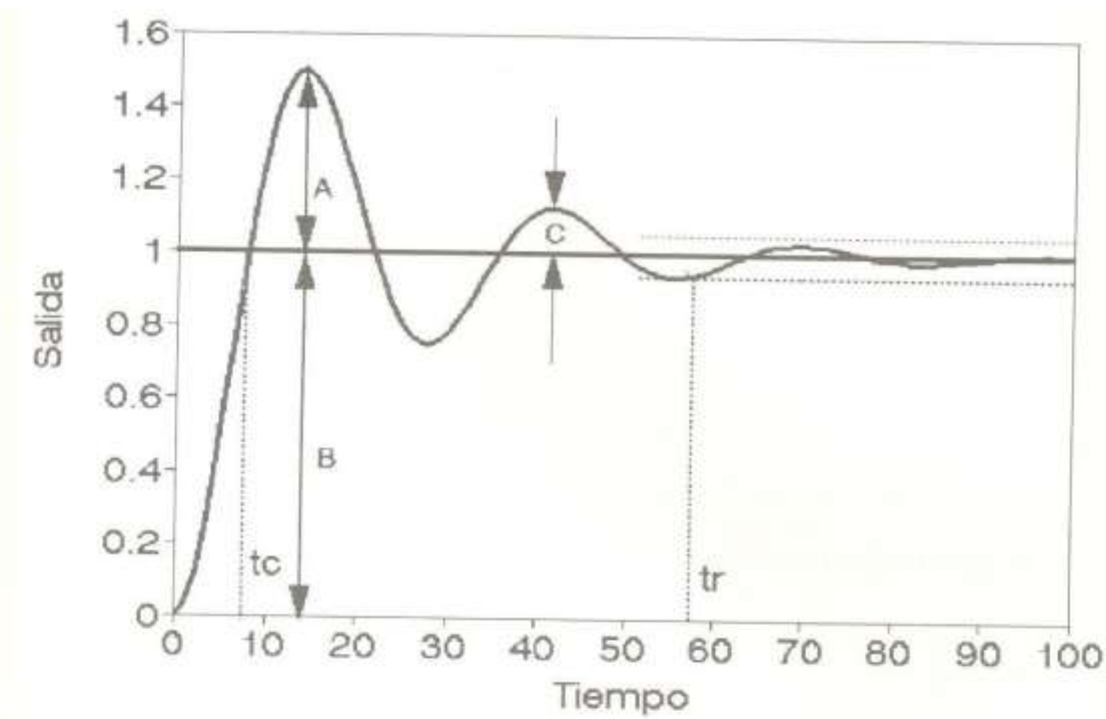


Figura 2.13
Caracterización de un sistema subamortiguado.

<u>Sobrepaso (Overshoot):</u> es la razón entre A y B, en que B es el valor final de la salida y A es el máximo valor que la respuesta sobrepasa al valor final. Se puede demostrar que:

$$sobrepaso = \frac{A}{B} = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

El sobrepaso aumenta al disminuir el factor de amortiguamiento ξ.

<u>Razón de decaimiento</u>: esta definido por C/A que representa la razón entre dos máximos y esta relacionado con   por;

$$\frac{C}{A} = \exp\left(\frac{-2\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = \left(\frac{A}{B}\right)^2$$

<u>Periodo de oscilación (T):</u> es el tiempo que demora la respuesta entre dos máximos sucesivos y está relacionada con la frecuencia de oscilación (w) por:

$$T = \frac{2\pi}{w}$$

Y de acuerdo a 20, w esta definida por:

$$w = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}$$

Luego el periodo de oscilación es:

$$T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Para el caso $\xi = 0$, se define la frecuencia normal de oscilación w_n;

$$w_n = \frac{1}{\tau}$$

En este caso no habrá amortiguamiento y el sistema oscilará permanentemente con frecuencia w_n.

<u>Tiempo de crecimiento (t_c):</u> es el tiempo que demora la respuesta en llegar al valor final por primera vez. Su relación con el factor de amortiguamiento está dada por;

$$t_c = \frac{1}{w}(\pi - \varphi) = \frac{\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]$$

El tiempo de crecimiento aumenta con la amortiguación del sistema.

<u>Tiempo de respuesta (t_r):</u> se define normalmente como el tiempo que requiere la respuesta en establecerse dentro de un margen de $\pm 5\%$ de la respuesta final. En general, t_r aumenta al disminuir ξ.

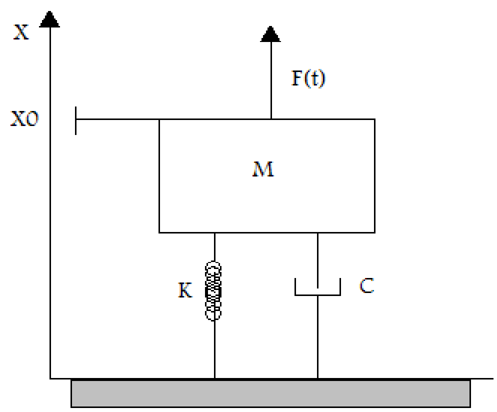
Ejemplo: Sistema amortiguado

Los procesos físicos de 2° orden se originan preferentemente en el estudio del movimiento de masas sólidas y fluidas. En estos casos se emplea la ecuación de balance de fuerzas de Newton.

$$\sum \text{fuerzas} = (\text{masa})(\text{aceleracion})$$

$$= (\text{masa})\frac{d^2(\text{distancia})}{dt^2}$$

La aceleración de la 2° derivada de la distancia, recorrida por la masa, con respecto al tiempo y da origen al término de 2° orden. Uno de los modelos más simples de procesos físicos de 2° orden corresponde a un sistema de amortiguación, como se muestra en la figura;



La aceleración se define como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a$$

La fuerza del resorte es proporcional a la distancia y actúa en dirección contraria al desplazamiento x:

$$F_r = -Kx$$

K se denomina constante de Hooke.

El amortiguamiento ejerce una fuerza proporcional a la velocidad y en sentido contrario al desplazamiento.

$$F_a = -c\frac{dx}{dt}$$

La constante c es el coeficiente de fricción viscosa.

F(t) es la fuerza externa aplicada al sistema (función forzante)
Aplicando la ecuación de balance de fuerzas, tenemos:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F(t) - Kx - c\frac{dx}{dt}$$

Que se puede reescribir como:

$$\frac{M}{K}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{K}\frac{dx}{dt} + x = \frac{F(t)}{K}$$

O bien, expresado en forma estándar;

$$\tau^2\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\tau\frac{dx}{dt} + x = K_pF$$

Cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

Y donde los parámetros están definidos por:

$$K_p = \frac{1}{K}, \quad \tau = \sqrt{\frac{M}{K}}, \quad \text{y} \quad \xi = \sqrt{\frac{C^2}{4MK}}$$

Variables de desviación y linealización del sistema

Hasta ahora hemos supuesto que la salida del sistema en el estado inicial es cero, y que el modelo del proceso es lineal. Estas condiciones raramente se cumplen en procesos reales, sin embargo en esta sección veremos que el análisis anterior sobre sistemas dinámicos, también se puede emplear en sistemas o lineales y con estado inicial distinto de cero.

Variables de desviación

Considerando el siguiente proceso de primer orden:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = Ku \quad (21)$$

En el estado estacionario (dy/dt=0) se cumple:

$$y_0 = Ku_0$$

Además,

$$\frac{dy_0}{dt} = 0 = Ku_0 - y_0 \quad (22)$$

Si restamos 21 y 22, se tiene:

$$\tau \frac{d(y - y_0)}{dt} + (y - y_0) = K(u - u_0)$$

Definiendo:

$$\bar{y} = y - y_0$$

$$\bar{u} = u - u_0$$

Se obtiene finalmente;

$$\tau \frac{d\bar{y}}{dt} + \bar{y} = K\bar{u}$$

$\bar{y}$ y $\bar{u}$ son las variables de desviación de *y*, *u* respectivamente; en el estado inicial, $\bar{y} = \bar{u} = 0$

Linealización de sistemas

Supongamos que tenemos un modelo de primer orden no lineal;

$$\frac{dy}{dt} = F(y,u)$$

En que F es una función no lineal de u e y. la función F (u, y) se puede aproximar en torno a un punto (y_0, u_0) por una función lineal de la forma:

$$F(y,u) = F(y_0,u_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\binom{y_0}{u_0}} (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{\binom{y_0}{u_0}} (u - u_0)$$

O bien empleando variables de desviación:

$$F(\bar{y},\bar{u}) = \left.\frac{\partial F}{\partial \bar{y}}\right|_{\binom{\bar{y}_0}{\bar{u}_0}} \bar{y} + \left.\frac{\partial F}{\partial \bar{u}}\right|_{\binom{\bar{y}_0}{\bar{u}_0}} \bar{u}$$

Definiendo:

$$-a_0 = \left.\frac{\partial F}{\partial \bar{y}}\right|_{\binom{\bar{y}_0}{\bar{u}_0}} \quad \text{y} \quad b = \left.\frac{\partial F}{\partial \bar{u}}\right|_{\binom{\bar{y}_0}{\bar{u}_0}}$$

La ecuación diferencial queda aproximada por:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} + a_0\bar{y} = b\bar{u}$$

O escrita en forma estándar;

$$\tau\frac{d\bar{y}}{dt} + \bar{y} = K\bar{u}$$

Con:

$$\tau = \frac{1}{a_0} \quad \text{y} \quad K = \frac{b}{a_0}$$

De aquí se desprende que en procesos no lineales, la constante de tiempo y la ganancia estática dependen del punto de linealización (o de operación)

Profesor Titular: Ing. Alfredo Ernesto Puglesi
Profesor Adjunto: Ing. María Susana Bernasconi
JTP: Ing. Esther Bibiana Castiglione
Colaboró: Eloisa Cortiñas