UNIDAD 1

INTRODUCCION

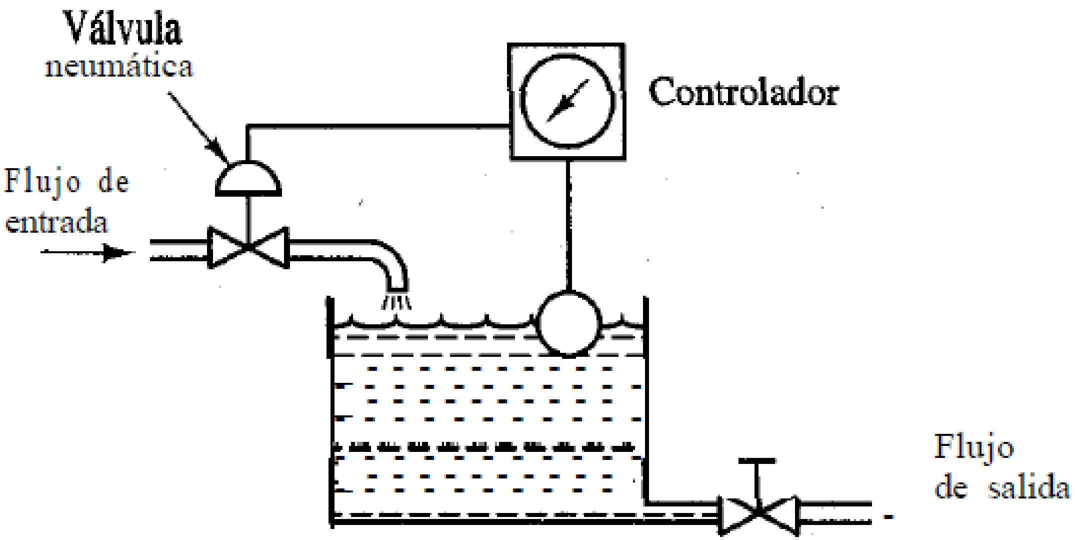
TRANSFORMADA DE LAPLACE

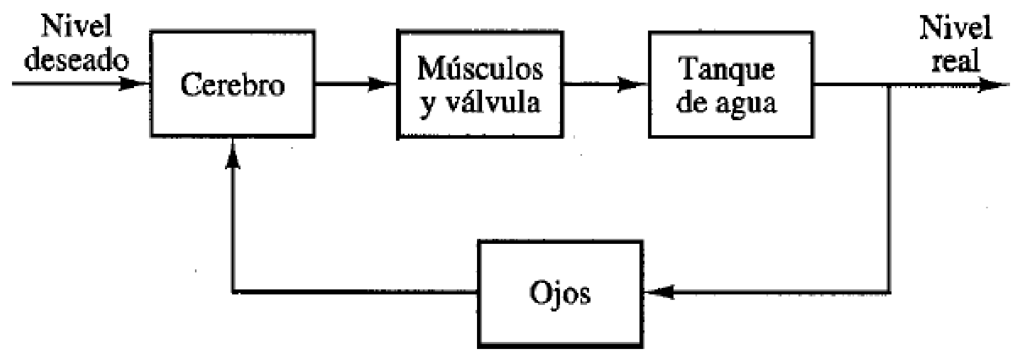
MODELADO DE 1° Y 2° ORDEN

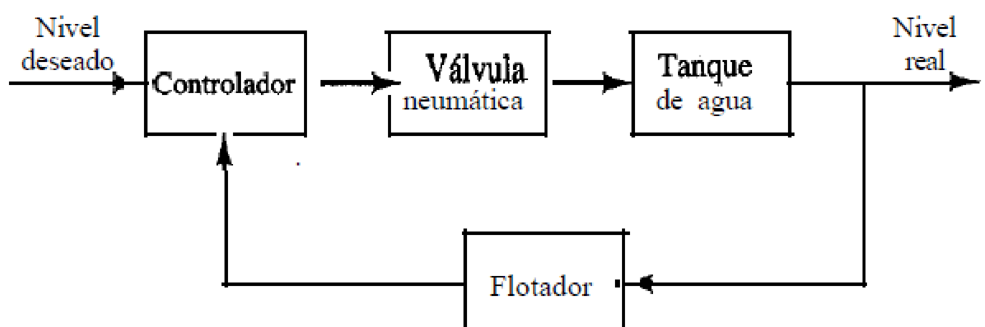
Profesores:

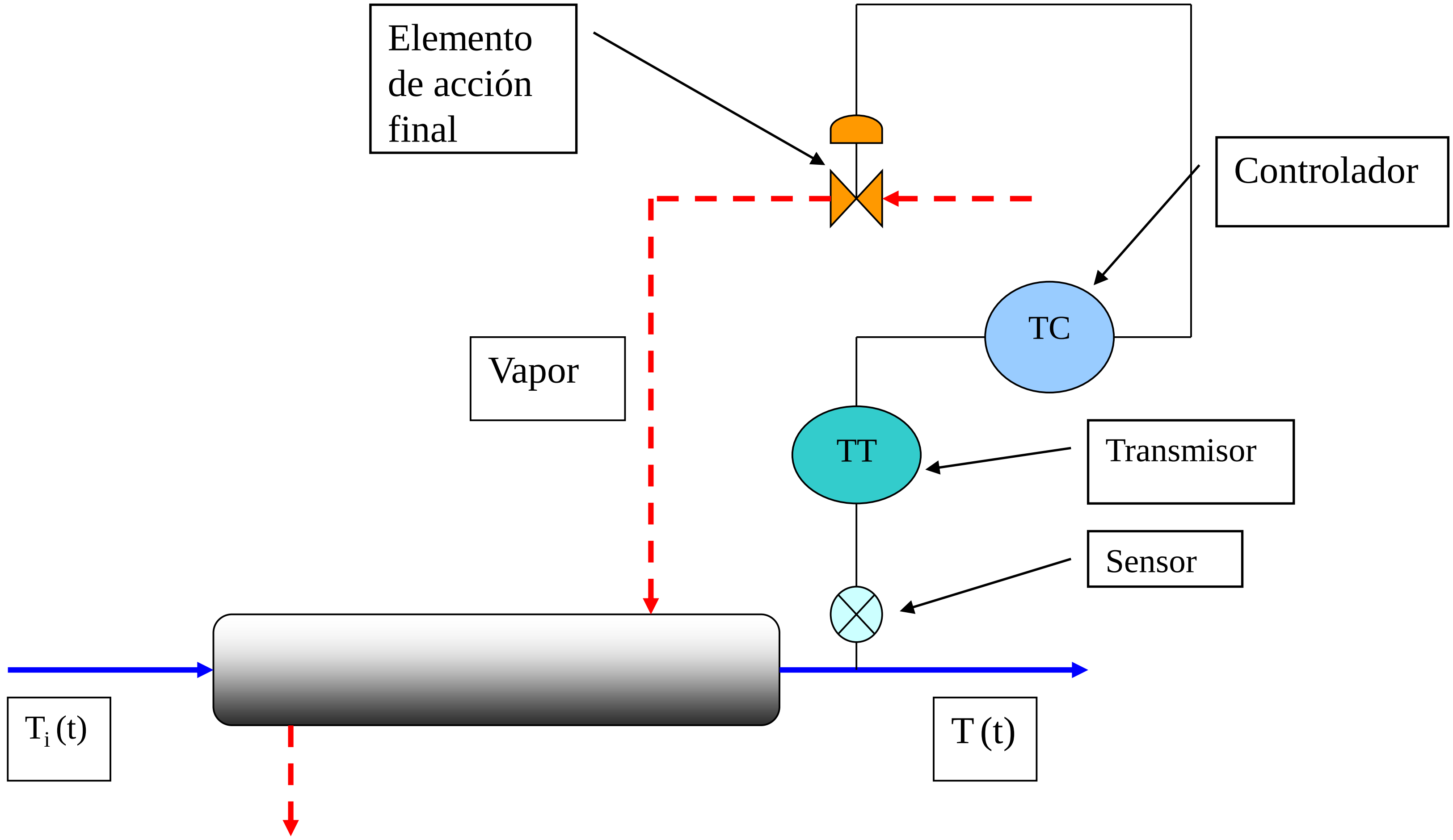
Ing. María Susana Bernasconi-
sbernasc@uncu.edu.ar
susybernasconi@gmail.com

Ing Fernando Geli
fernandogeli@gmail.com


Válvula
neumática
Controlador
Flujo de
entrada
Flujo
de salida


Nivel
deseado
Cerebro
Músculos
y válvula
Tanque
de agua
Nivel
real
Ojos


Nivel
deseado
Controlador
Válvula
neumática
Tanque
de agua
Nivel
real
Flotador

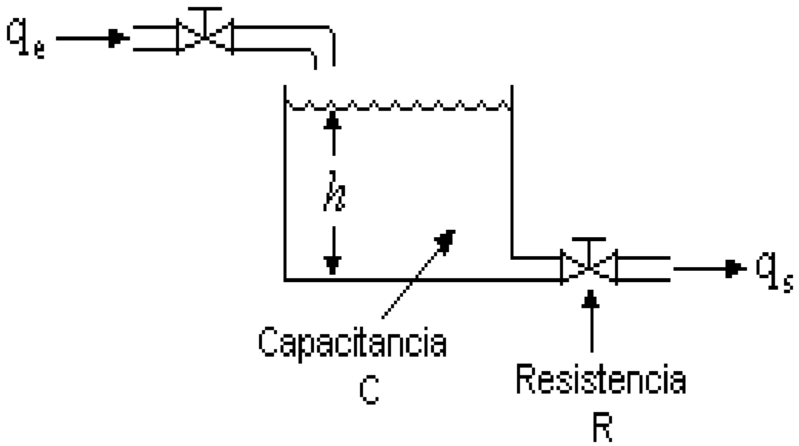


Elemento de acción final
Controlador
TC
Vapor
TT
Transmisor
Sensor
$T_i(t)$
$T(t)$

Balances de masa y energía

$$\boxed{\frac{\text{Acumulación de S en el sistema}}{\text{Unidad de tiempo}}} = \boxed{\frac{\text{Entrada de S al sistema}}{\text{Unidad de tiempo}}} - \boxed{\frac{\text{Salida de S del sistema}}{\text{Unidad de tiempo}}}$$

$$+ \boxed{\frac{\text{Cantidad de S generada dentro del sistema}}{\text{Unidad de tiempo}}} - \boxed{\frac{\text{Cantidad de S consumida dentro del sistema}}{\text{Unidad de tiempo}}}$$



- Masa (M)
- Caudal de entrada: q_e ,
- Caudal de salida: q_s
- Altura: h

$$\left[\frac{Acumulación}{tiempo}\right] = \left[\frac{dM}{dt}\right] = \left[\frac{d\rho V}{dt}\right] = \rho A \left[\frac{dh}{dt}\right]$$

$$\left[\frac{Entrada \quad al \quad sistema}{tiempo}\right] = \rho \cdot q_e \qquad \left[\frac{Generación \quad en \quad el \quad sistema}{tiempo}\right] = 0$$

$$\left[\frac{Salida \quad del \quad sistema}{tiempo}\right] = \rho \cdot q_s \qquad \left[\frac{Consumo \quad en \quad el \quad sistema}{tiempo}\right] = 0$$

$$\boxed{\rho A \left[\frac{dh}{dt}\right] = \rho q_e - \rho q_s}$$

El método de la transformada de Laplace se utiliza muy a menudo en la resolución de los problemas que se presentan en el estudio de los lazos de control continuos.

La transformada de Laplace, convierte las ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo, en ecuaciones algebraicas en el dominio de la variable s. En la solución de ecuaciones diferenciales mediante el uso de la transformada de Laplace, quedan incluidas las condiciones iniciales y se obtienen simultáneamente las soluciones homogénea y particular.

La transformada de Laplace se define por,

$$\mathrm{L}\left[f(t)\right] = \overline{\mathrm{F}}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \qquad (1.1)$$

Donde: f (t) existe para todo $0 \leq t < \infty$

$s = \sigma + j\omega$ variable compleja

Tabla 2-1.1 Transformadas de Laplace de funciones comunes

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\operatorname{sen} \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \operatorname{sen} \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = u(t)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x\right] = \mathcal{L}[u(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + \mathcal{L}\left[3\frac{dx}{dt}\right] + \mathcal{L}[2x] = U(s)$$

$$\mathcal{L}[2x] = 2X(s)$$

$$\mathcal{L}\left[3\frac{dx}{dt}\right] = 3sX(s) - 3X(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{dx'}{dt}\right] = s\mathcal{L}[x'] - x'(0)$$

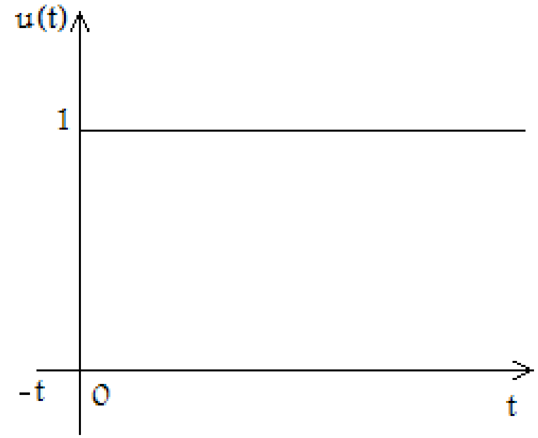
$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s[sX(s) - x(0)] - x'(0) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$

$$s^2X(s)+3sX(s)+2X(s)-x'(0)-sx(0)-3x(0)=U(s)$$

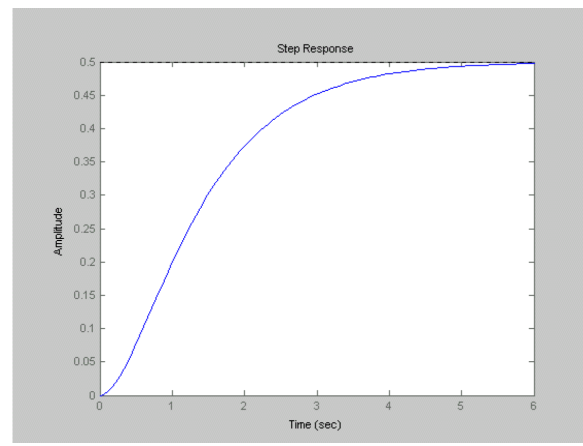
$$X(s)=\frac{sx(0)+3x(0)+x'(0)+U(s)}{s^2+3s+2}$$

$$X(s)=\frac{sx(0)+3x(0)+x'(0)+U(s)}{(s+2)(s+1)}$$

$$X(s)=\frac{sx(0)+3x(0)+x'(0)+1/s}{(s+2)(s+1)}$$



$$X(s)=\left(\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+1}\right)x(0)+\left(\frac{-1}{s+2}+\frac{1}{s+1}\right)x'(0)+\frac{1/2}{s}+\frac{1/2}{s+2}+\frac{1}{s+1}$$



$$x(t)=\left(-e^{-2t}+2e^{-t}\right)x(0)+\left(-e^{-2t}+e^{-t}\right)x'(0)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}+e^{-t}$$

Propiedades fundamentales de la función trasformada

- **Linealidad**

$$\mathcal{L}\left[a_1 y_1 + a_2 y_2\right] = a_1 \mathcal{L}\left[y_1\right] + a_2 \mathcal{L}\left[y_2\right]$$

- **Traslado**

$$\mathcal{L}\left[y\left(t \pm d\right)\right] = e^{\pm td} Y(s)$$

Teorema del valor inicial y del valor final

Otra de las características interesantes del método de la transformada de Laplace, es que permite obtener importante información del comportamiento del sistema analizado, sin necesidad de resolver la ecuación diferencial.

El teorema del valor inicial dice:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

El teorema del valor final dice:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Función de transferencia

La función de transferencia de un sistema se define como la relación de la transformada de Laplace de la salida respecto de la entrada, despreciando todas las condiciones iniciales.

$$\text{Funcion de transferencia} = G(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{salida}(t)]}{\mathcal{L}[\text{entrada}(t)]}$$

Haciendo las condiciones iniciales iguales a cero (x(0)=0; x´(0)=0),

$$s^2 X(s) + 3sX(s) + 2X(s) - x'(0) - sx(0) - 3x(0) = U(s)$$

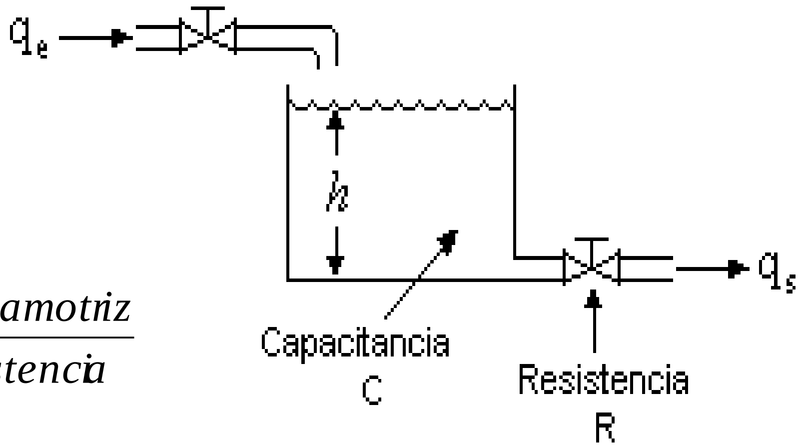
$$\boldsymbol{G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 3.s + 2}}$$

Proceso de nivel

$$A_T \frac{dh}{dt} = (q_e - q_s)$$

$$0 = (\bar{q}_e - \bar{q}_s) \Rightarrow \bar{q}_e = \bar{q}_s$$

$$\boxed{A_T \frac{dh}{dt} = (q_e - \bar{q}_e) - (q_s - \bar{q}_s)}$$



$$L\left[A_T \frac{d\hat{h}}{dt} + \frac{\hat{h}}{R}\right] = L[\hat{q}_e(t)]$$

$$q_s = \frac{h}{R} = \frac{Fuerza motriz}{resistencia}$$

$$L\left[A_T \frac{d\hat{h}}{dt}\right] + L\left[\frac{\hat{h}}{R}\right] = L[\hat{q}_e(t)]$$

$$A_T \cdot sH(s) + \frac{1}{R} H(s) = Q_e(s)$$

$$A_T \cdot \boldsymbol{R \cdot sH(s) + R \cdot \frac{1}{R} H(s) = R \cdot Qe(s)}$$

$$(A_T \cdot \boldsymbol{R})\boldsymbol{sH(s) + H(s) = R \cdot Qe(s)}$$

$$\boldsymbol{\tau . sH(s) + H(s) = K \cdot Qe(s)}$$

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{H(s)}{Qe(s)} = \frac{K}{(\tau \cdot s + 1)}}$$

Modelo de un sistema eléctrico

Las ecuaciones que describen la combinación de los bloques funcionales eléctricos son las leyes de Kirchhoff, las cuales pueden expresarse como:

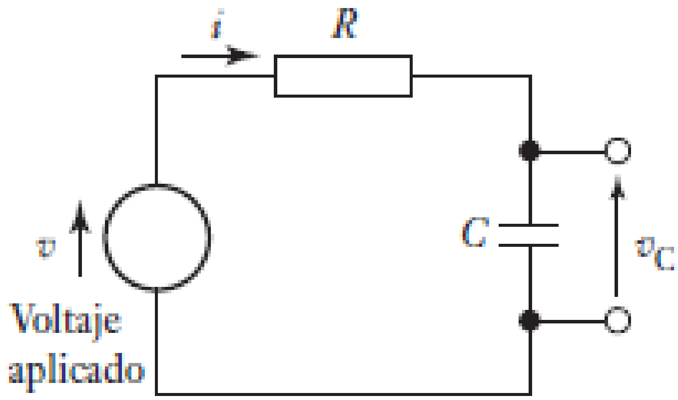
1ª ley: la corriente total que entra en un nodo es igual a la corriente total que sale de él; es decir, la suma algebraica de las corrientes de un nodo es cero.

2ª ley: en un circuito cerrado o malla, la suma algebraica de las diferencias de potencial de cada una de las partes del circuito es igual al voltaje aplicado o fuerza electromotriz (fem).

$$v = v_R + v_C$$

$$v = iR + v_C$$

$$i = C\left(\frac{dv_C}{dt}\right)$$



$$\boxed{v = RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + v_C}$$

Sistema térmico

Si R es la resistencia térmica que se opone al flujo calorífico del líquido del termómetro, entonces

$$q = \frac{T_L - T}{R}$$

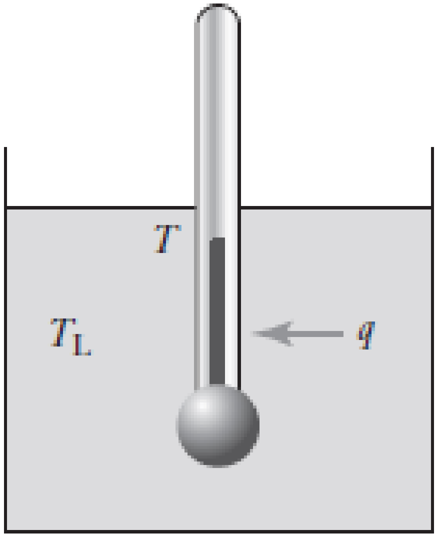
donde q es la razón neta del flujo calorífico del líquido al termómetro. La capacitancia térmica C del termómetro está dada por la ecuación

$$q_1 - q_2 = C\frac{dT}{dt}$$

Dado que sólo existe un flujo neto calorífico del líquido al termómetro, $q_1 = q$ y $q_2 = 0$; por lo tanto

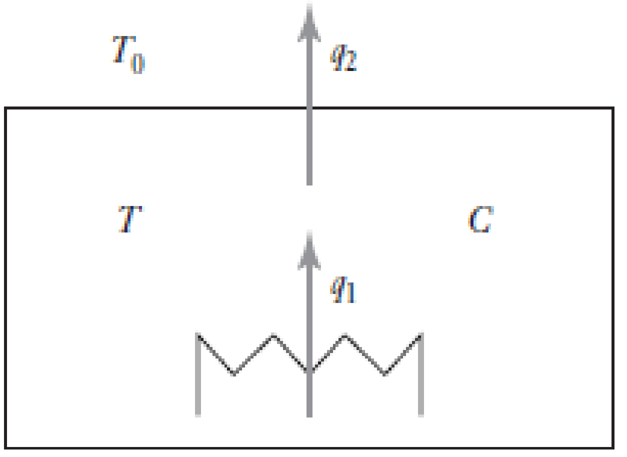
$$q = C\frac{dT}{dt}$$

$$C\frac{dT}{dt} = \frac{T_L - T}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{RC\frac{dT}{dt} + T = T_L}$$



Sistema térmico

C capacitancia térmica del aire de la habitación
R resistencia térmica de los muros
q1 calor aportado por el calentador eléctrico
q2 calor perdido al exterior
T Temperatura del aire (se considera ctte)



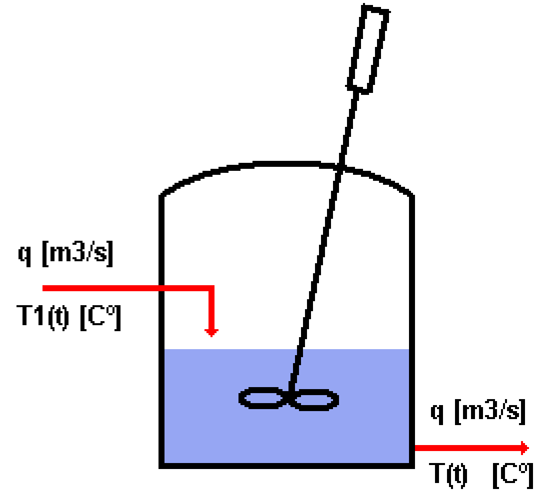
$$q_1 - q_2 = C\frac{dT}{dt}$$

$$q_2 = \frac{T - T_0}{R}$$

$$q_1 - \frac{T - T_0}{R} = C\frac{dT}{dt} \Longrightarrow \boxed{RC\frac{dT}{dt} + T = Rq_1 + T_0}$$

Proceso térmico

$$q*\rho_i*C_{p_1}*T_1(t)-q*\rho*C_p*T(t)=\frac{\partial(V*\rho*C_v*T(t))}{\partial t}$$



$$q*\rho i*C_{p_1}*T_1(t)-q*\rho*C_p*T(t)=V*\rho*C_v\frac{\partial T(t)}{\partial t}$$

$$q*\rho*C_p*_i-q*\rho*C_p*\overline{T}=0$$

$$q*\rho*C_p*\left[T_i(t)-\overline{T}_i\right]-q*\rho*C_p*\left[T(t)-\overline{T}\right]=V*\rho*C_v*\frac{\partial\left[T(t)-\overline{T}\right]}{\partial t}$$

Variables de desviación:

$$\bar{\bar{T}}(t)=T(t)-\overline{T}$$

$$\bar{\bar{T}}_i(t)=T_i(t)-\overline{T}_i$$

$$q*\rho*C_p*\bar{\bar{T}}i(t)-q*\rho*C_p*\bar{\bar{T}}(t)=V*\rho*C_v\frac{\partial\bar{\bar{T}}(t)}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{V*\rho*C_v}{q*\rho*C_p}*\frac{\partial\bar{\bar{T}}(t)}{\partial t}+\bar{\bar{T}}(t)=\bar{\bar{T}}_i(t)} \Rightarrow \tau*\frac{\partial\bar{\bar{T}}(t)}{\partial t}+\bar{\bar{T}}(t)=\bar{\bar{T}}_i(t)$$

$$\tau sT(s)-\tau T(0)+T(s)=T_i(s) \Rightarrow \boxed{\frac{T(s)}{T_i(s)}=\frac{1}{\tau s+1}}$$

Sistemas de primer orden

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} = \quad \text{Ctte capacitiva}$$

$$K = \frac{b}{a_0} = \quad \text{Ganancia}$$

$$a_1\left[\frac{dy}{dt}\right] + a_0 \cdot y = b \cdot u$$

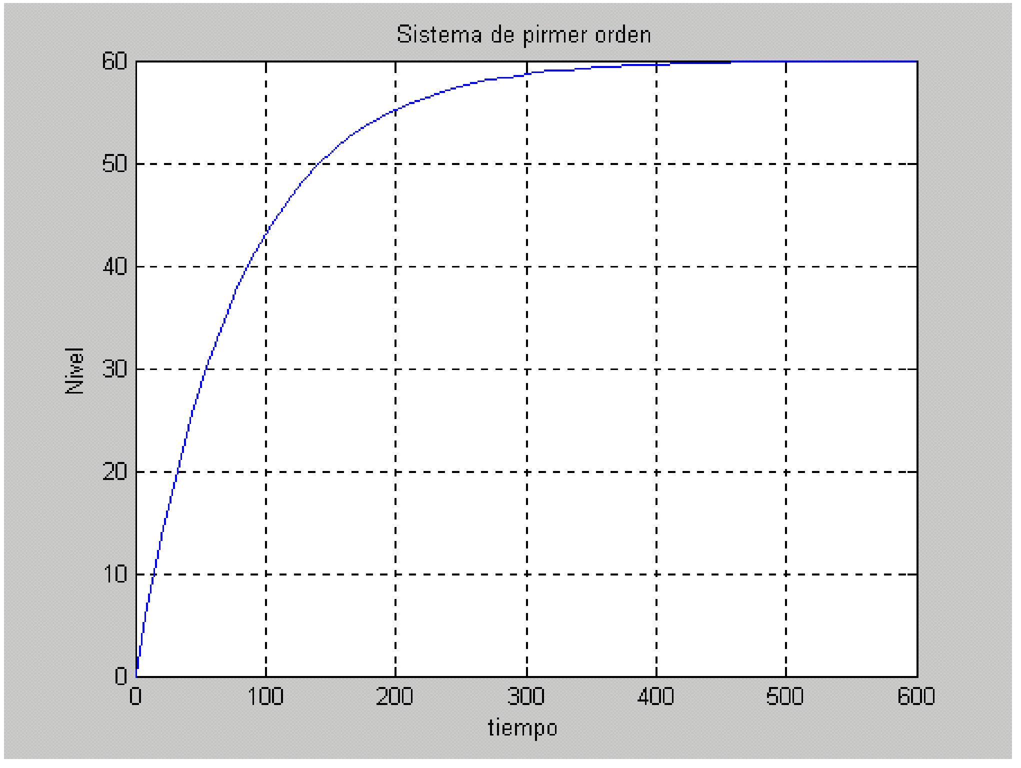
$$\boxed{\tau\left[\frac{dy}{dt}\right] + y = k \cdot u}$$

$$\tau\left[s \cdot Y(s) - y_0\right] + Y(s) = K \cdot U(s)$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}}$$

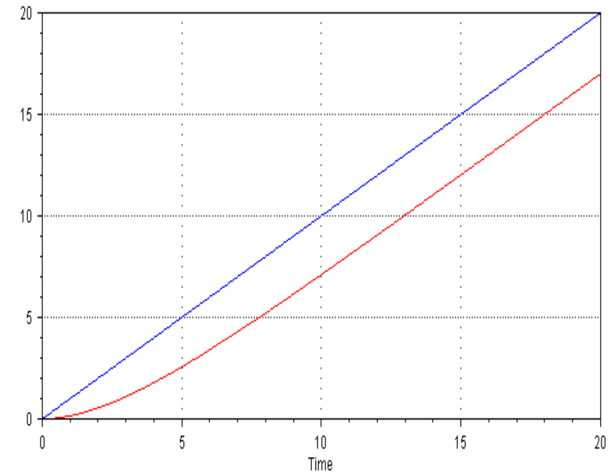
$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{K \cdot E}{\tau . s + 1} \cdot \frac{1}{s} = KE \frac{1}{s(\tau \cdot s + 1)}$$

$$\boxed{y(t) = KE\left[1 - e^{-t/\tau}\right]}$$



Respuesta de sistemas de primer orden

Entrada rampa



K=1, τ=3

$$m(t) = n \cdot t \longrightarrow M(t) = \frac{n}{s^2}$$

$$C(s) = \frac{k}{\tau\, s+1} \cdot \frac{n}{s^2} = \frac{k/\tau}{s+\frac{1}{\tau}} \cdot \frac{n}{s^2} = \frac{A}{s+\frac{1}{\tau}} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2}$$

Si multiplicamos ambos lados por $\left(s+\frac{1}{\tau}\right)$

$$\frac{k}{\tau} \cdot \frac{n}{s^2} = A + \frac{B}{s} \cdot \left(s+\frac{1}{\tau}\right) + \frac{C}{s^2} \cdot \left(s+\frac{1}{\tau}\right)$$

◆ **Si** $s = 1/\tau \longrightarrow$

$$A = \frac{k}{\tau} .n. \left(\tau^2\right) = k.n.\tau$$

$$B = -kn\tau$$

$$C = \frac{k/\tau}{0+\frac{1}{\tau}} .n = k.n$$

$$\boxed{C(s) = \frac{A}{s+\frac{1}{\tau}} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} = \frac{kn\tau}{s+\frac{1}{\tau}} - \frac{kn\tau}{s} + \frac{kn}{s^2}}$$

$$\boxed{c(t) = kn\tau.e^{\frac{-t}{\tau}} - kn\tau + knt}$$

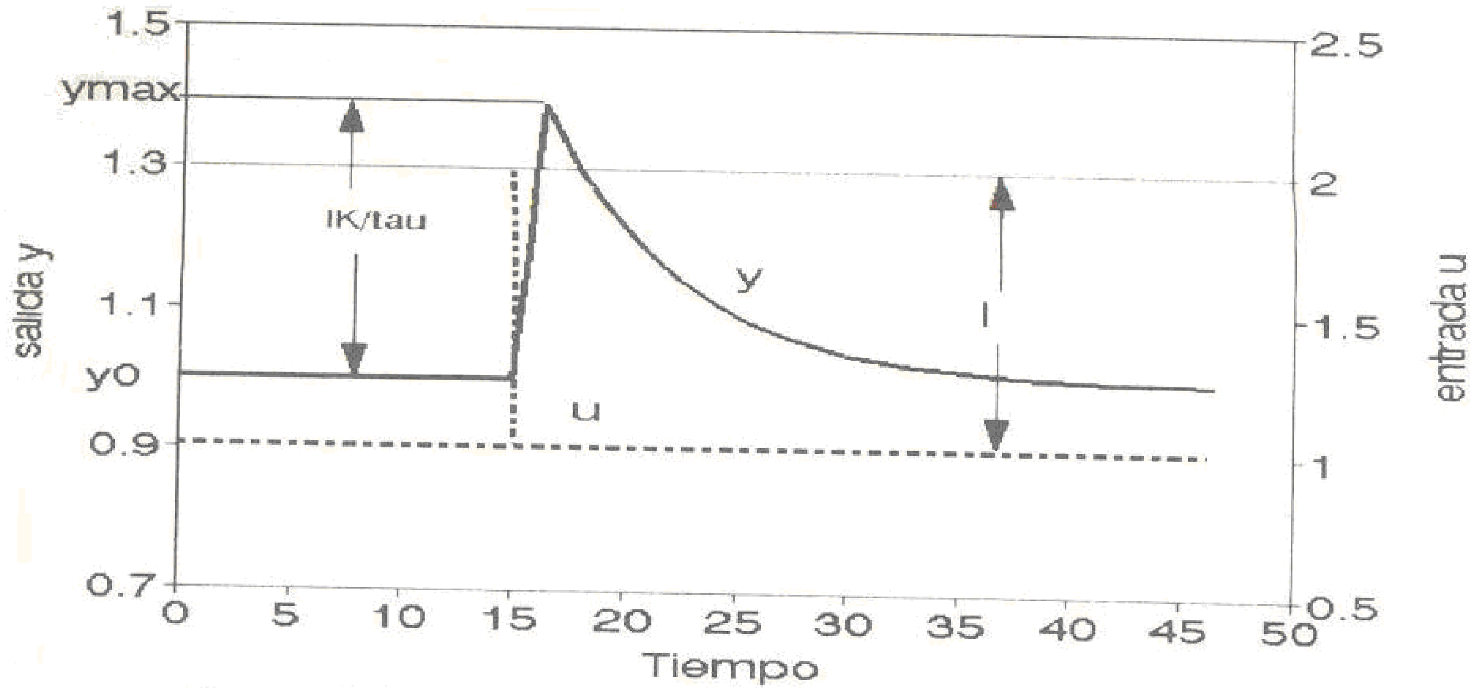
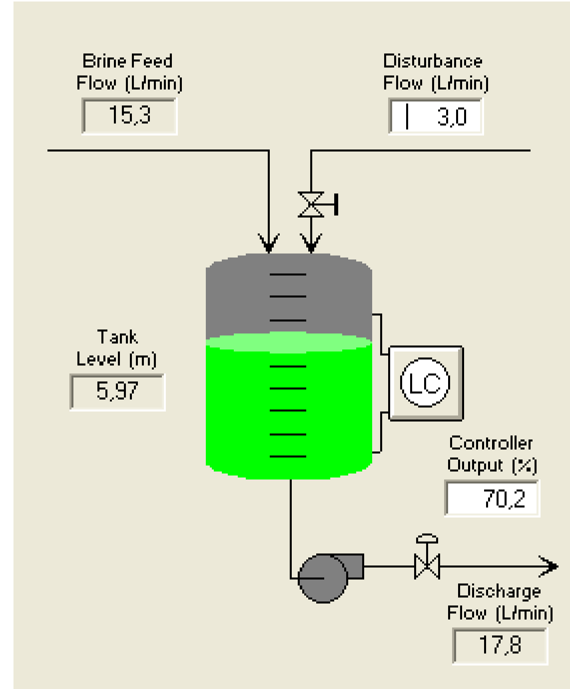


Figura 2.2
Respuesta impulso de un sistema de primer orden.

Proceso de nivel



$$A_T \frac{dh}{dt} = (q_e - q_s)$$

$$0 = (\bar{q}_e - \bar{q}_s) \Rightarrow \bar{q}_e = \bar{q}_s$$

$$\boxed{A_T \frac{dh}{dt} = (q_e - \bar{q}_e) - (q_s - \bar{q}_s) = (q_e - \bar{q}_e)}$$

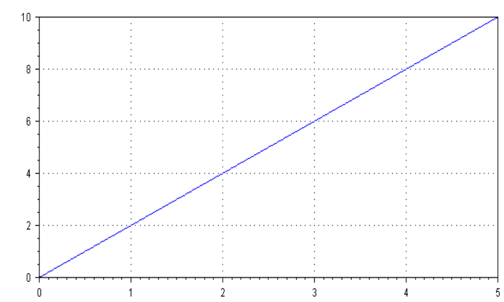
$$L\left[A_T \frac{dh}{dt}\right] = L[q_e(t)]$$

$$L\left[A_T \frac{dh}{dt}\right] = L[q_e(t)]$$

$$A_T \cdot sH(s) = Q_e(s)$$

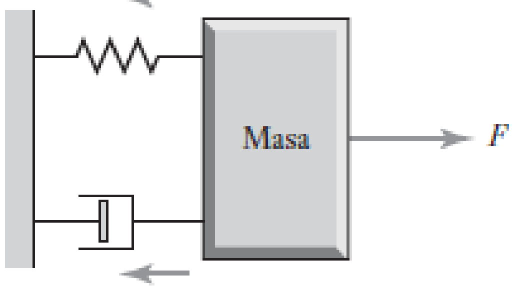
$$\tau . sH(s) = K \cdot Q_e(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{K}{(\tau \cdot s)}}$$



E=1,
K=2

Sistemas mecánicos

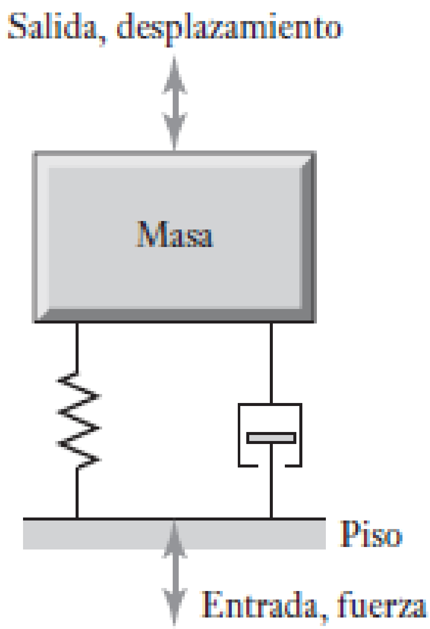


fuerza neta aplicada a la masa $m = F - kx - cv$

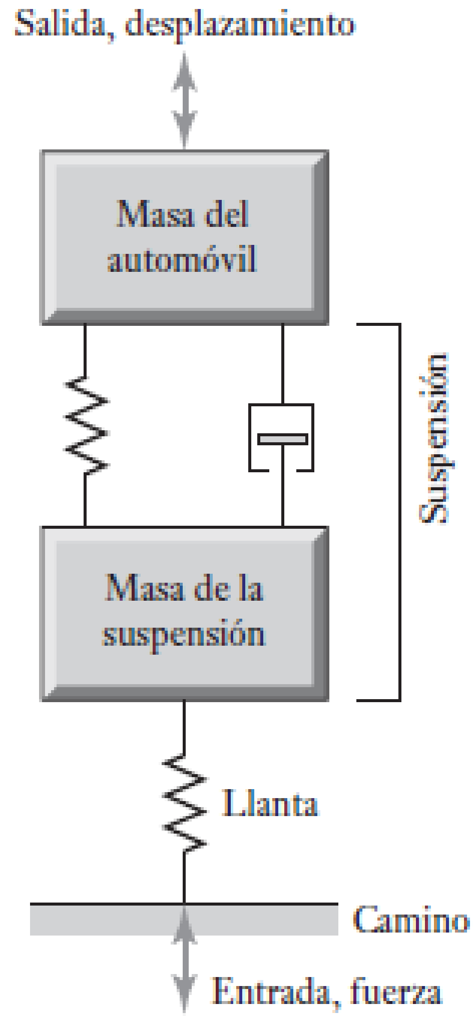
fuerza neta aplicada a la masa $= ma$

$$F - kx - c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F}$$

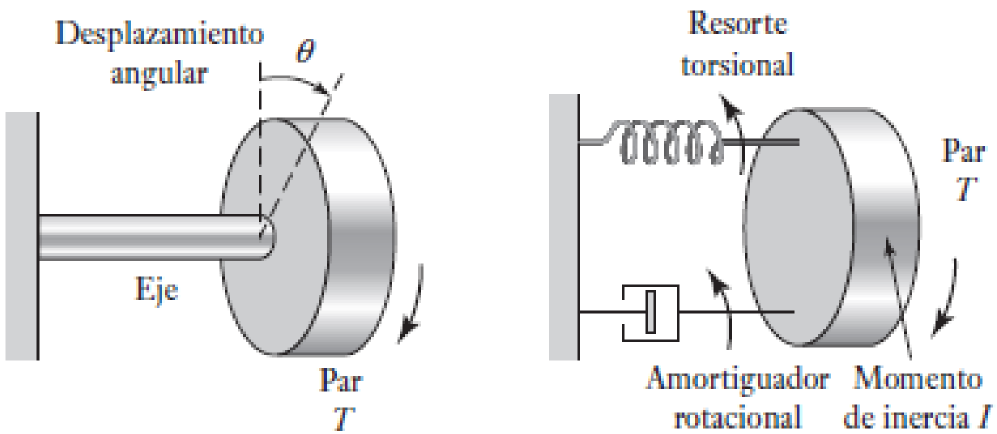


a) una máquina colocada en el piso



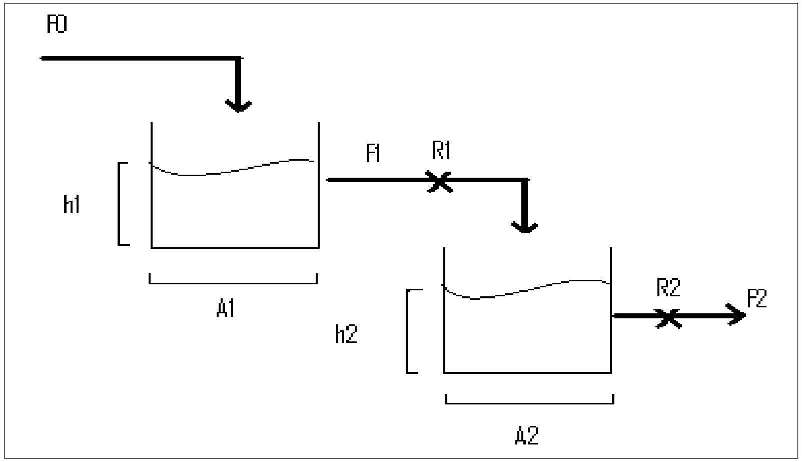
b) chasis de un auto mientras la rueda gira en el camino

Un sistema sometido a un par que provoca el giro de una masa en el extremo de un eje.



$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + k\theta = T$$

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{.\partial h_1}{\partial t} = F_0 - F_1 = F_0 - \dfrac{h_1}{R_1} \\ A_2 \dfrac{.\partial h_2}{\partial t} = F_1 - F_2 = F_1 - \dfrac{h_2}{R_2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} A_1.R_1 \dfrac{.\partial h_1}{\partial t} + \dfrac{h_{1.}R_1}{R_1} = F_0.R_1 \\ A_2.R_2 \dfrac{.\partial h_2}{\partial t} + \dfrac{h_{2.}R_2}{R_2} = \dfrac{h_1.R_2}{R_1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$R_1.A_1 = \tau_1 \qquad R_1 = k_1$$

$$R_2.A_2 = \tau_2 \qquad R_2 = k_2$$

$$\begin{cases} \tau_1 \dfrac{.\partial h_1}{\partial t} + h_1 = F_0.k_1 \longrightarrow \tau_1.h_1'(0) + \tau_1.s.h_1(s) + \tau_1.h_1(0) + h_1(s) = k_1.F_0(s) \\ \tau_2 \dfrac{.\partial h_2}{\partial t} + h_2 = \dfrac{h_1.k_2}{k_1} \longrightarrow \tau_2.h_2'(0) + \tau_2.s.h_2(s) + \tau_2.h_2(0) + h_2(s) = \dfrac{k_2}{k_1}.h_1(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_1.s.h_1(s) + h_1(s) = k_1.F_0(s) \\ \tau_2.s.h_2(s) + h_2(s) = \dfrac{k_2}{k_1}.h_1(s) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{G_1(s) = \frac{h_1(s)}{F_0(s)} = \frac{k_1}{\tau_1.s+1}} \\ &\boxed{G_2(s) = \frac{h_2(s)}{h_1(s)} = \frac{\frac{k_2}{k_1}}{\tau_2.s+1}} \end{aligned}\right\} \boxed{\frac{k_2}{(\tau_1.s+1).(\tau_2.s+1)}}$$

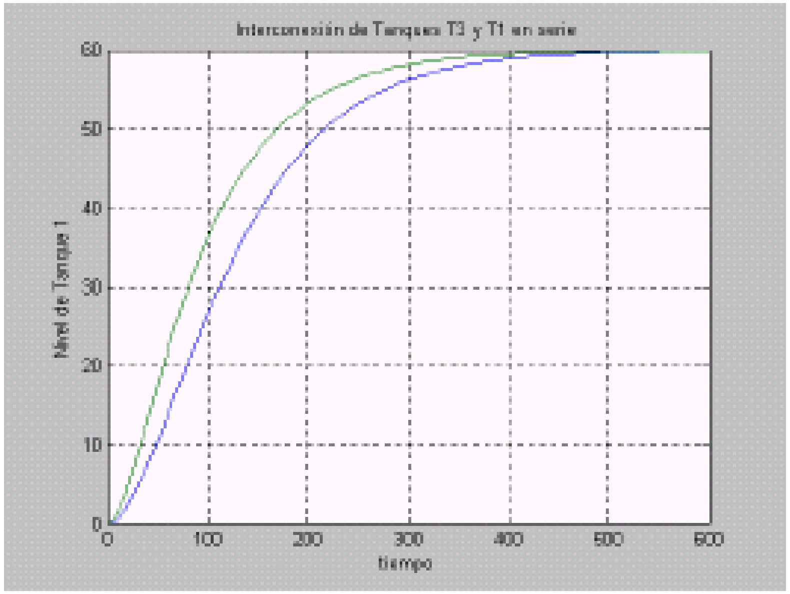
$$G_1(s) = \frac{h_1(s)}{F_0(s)} = \frac{k_1}{\tau_1.s+1}$$

$$G_2(s) = \frac{h_2(s)}{h_1(s)} = \frac{\frac{k_2}{k_1}}{\tau_2.s+1}$$

$$G(s) = G_1(s).G_2(s) = \frac{\boldsymbol{h_2(s)}}{\boldsymbol{F_0(s)}}. = \frac{\boldsymbol{k_1}}{\boldsymbol{\tau_1.s+1}} \quad \frac{\frac{k_2}{k_1}}{\tau_2.s+1}$$

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{k_2}{(\tau_1.s+1).(\tau_2.s+1)}} = \frac{k_2}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1+\tau_2)s+1}$$

$$\frac{h_1(s)}{q_e(s)} = \frac{K_s}{(\tau_1 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$$



Respuesta al escalón del sistema

$$H_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} Q_i(s) - \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} Q_o(s)$$

$$H_2(s) = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} H_1(s)$$

$$\boxed{H_2(s) = \frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} (Q_i(s) - Q_o(s))}$$

$$\boxed{\frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}} \quad \textbf{(1)}$$

$$\boxed{\frac{H_2(s)}{Q_o(s)} = \frac{-K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}} \quad \textbf{(2)}$$

$\tau_1 = \frac{A_1}{C_1}$, minutos

$\tau_2 = \frac{A_2}{C_2}$, minutos

$K_1 = \frac{1}{C_1}$, pies-min/pies^3

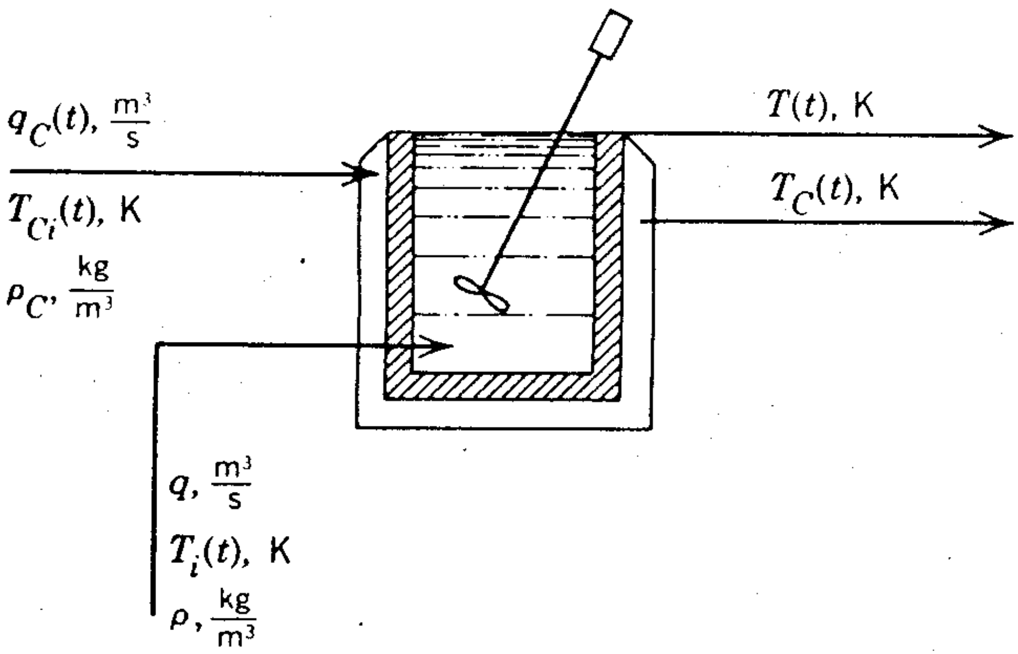
$K_2 = \frac{C_1}{C_2}$, sin dimensiones

Analicemos las unidades de las constantes

Que significa el signo en cada caso?

PROCESO TÉRMICO

Objetivo: enfriar un fluido caliente que se procesa



Se considera que:

***Capacidades caloríficas y densidad no cambia con la temperatura**

***Nivel y área de transferencia de calor en el tanque son constantes**

***Tanque bien aislado**

***Se desprecia la dinámica de las paredes del tanque**

Balance de energía de estado dinámico para el fluido que se procesa:

$$q\rho C_p T_i(t) - UA[T(t) - T_C(t)] - q\rho C_p T(t) = V\rho C_V \frac{dT(t)}{dt} \quad (1)$$

donde:

U = coeficiente global de transferencia de calor, se supone constante, J/m^2-K-s
A = área de transferencia de calor, m^2
V = volumen del tanque, m^3
C_p, C_V = capacidades caloríficas del fluido que (2) cesa, J/kg-K

Balance de energía de estado dinámico en la camisa de enfriamiento:

$$q_C(t)\rho_C C_{pC} T_{C_i}(t) + UA[T(t) - T_C(t)] - q_C(t)\,\rho_C C_{pC} T_C(t)$$

$$= V_C \rho_C C_{V_C} \frac{dT_C(t)}{dt} \quad (2)$$

donde:

C_{p_C}, C_{V_C} = capacidades caloríficas del agua de enfriamiento, J/kg-K
V_C = volumen de la camisa de enfriamiento, m^3

Obtenemos las ecuaciones dinámicas:

$$\boxed{q\rho C_p \mathbf{T}_i(t) - UA[\mathbf{T}(t) - \mathbf{T}_C(t)] - q\rho C_p \mathbf{T}(t) = V\rho C_v \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}} \quad (3)$$

$$\boxed{C_1 Q_C(t) + C_2 \mathbf{T}_{Ci}(t) + UA\,[\mathbf{T}(t) - \mathbf{T}_C(t)] - C_3 Q_C(t) - C_2 \mathbf{T}_C(t) = V_C \rho_C C_{vC} \frac{d\mathbf{T}_C(t)}{dt}} \quad (4)$$

donde: las variables de desviación son:

$$\mathbf{T}_i(t) = T_i(t) - \bar{T}_i$$

$$\mathbf{T}(t) = T(t) - \bar{T}$$

$$\mathbf{T}_C(t) = T_C(t) - \bar{T}_C$$

$$Q_C(t) = q_C(t) - \bar{q}_C$$

$$\mathbf{T}_{C_i}(t) = T_{C_i}(t) - \bar{T}_{C_i}$$

$$C_1 = \rho_C C_{p_C} \bar{T}_{C_i}, \qquad \mathrm{J/m^3}$$

$$C_2 = \bar{q}_C \rho_C C_{p_C}, \qquad \mathrm{J/s - K}$$

$$C_3 = \rho_C C_{p_C} \bar{T}_C, \qquad \mathrm{J/m^3}$$

Ordenando la ec. (3) y aplicando transformada de Laplace se obtiene:

$$\boxed{\mathrm{T}(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1}\left[K_1 \mathrm{T}_i(s) + K_2 \mathrm{T}_c(s)\right]} \qquad (5)$$

donde:

$$\tau_1 = \frac{V\rho C_V}{UA + q\rho C_p}, \qquad \text{segundos}$$

$$K_1 = \frac{q\rho C_p}{UA + q\rho C_p}, \qquad \text{sin dimensiones}$$

$$K_2 = \frac{UA}{UA + q\rho C_p}, \qquad \text{sin dimensiones}$$

De manera semejante de la ec. (4) se obtiene:

$$\boxed{\mathbf{T}_c(s) = \frac{1}{\tau_2 s + 1}\left[K_3 \mathbf{T}_{ci}(s) - K_4 Q_c(s) + K_5 \mathbf{T}(s)\right]} \qquad \textbf{(6)}$$

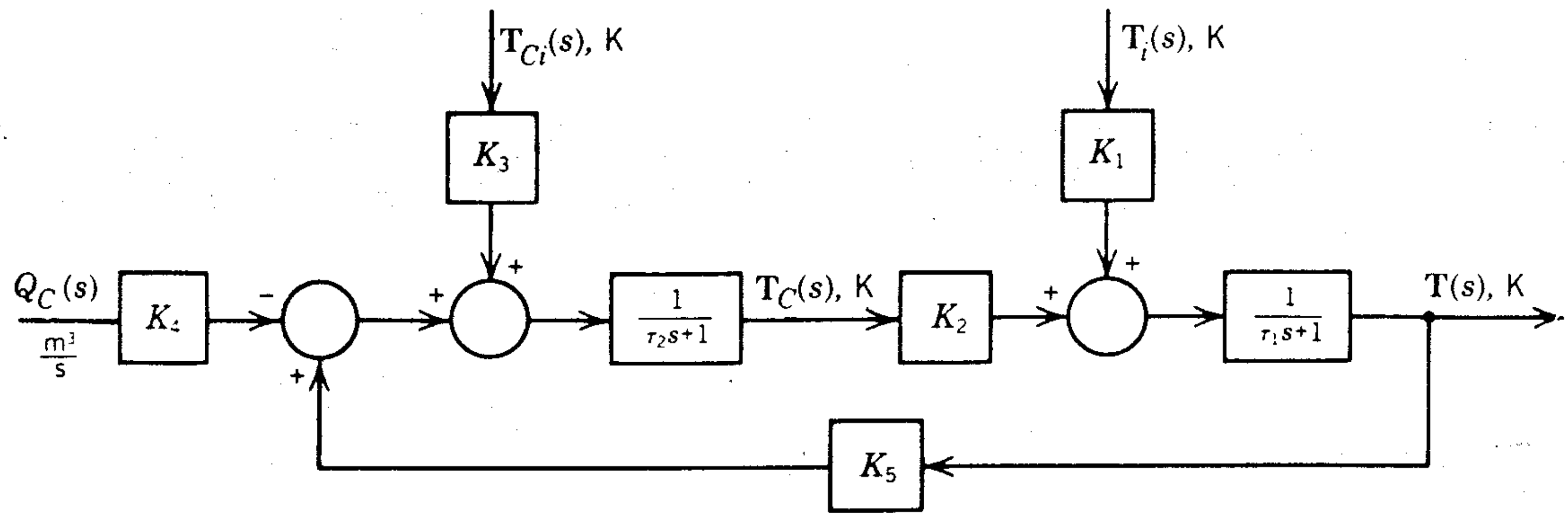
$$\tau_2 = \frac{V_C \rho_C C_{V_C}}{C_2 + UA}, \qquad \text{segundos}$$

$$K_4 = \frac{C_3 - C_1}{C_2 + UA}, \qquad \mathrm{K/m^3\text{-}s}$$

$$K_3 = \frac{C_2}{C_2 + UA}, \qquad \text{sin dimensiones}$$

$$K_5 = \frac{UA}{C_2 + UA}, \qquad \text{sin dimensiones}$$

Diagrama de bloques



Reemplazando la (6) en la (5) se obtienen las siguientes funciones de transferencia:

$$\frac{\mathbf{T}(s)}{\mathbf{T}_i(s)} = \left(\frac{K_1}{1 - K_2K_5}\right)\left[\frac{\tau_2 s + 1}{\left(\frac{\tau_1\tau_2}{1 - K_2K_5}\right)s^2 + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{1 - K_2K_5}\right)s + 1}\right]$$

$$\frac{\mathbf{T}(s)}{\mathbf{T}_{C_i}(s)} = \left(\frac{K_2K_3}{1 - K_2K_5}\right)\left[\frac{1}{\left(\frac{\tau_1\tau_2}{1 - K_2K_5}\right)s^2 + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{1 - K_2K_5}\right)s + 1}\right]$$

$$\frac{\mathbf{T}(s)}{Q_C(s)} = \left(\frac{-K_4K_2}{1 - K_2K_5}\right)\left[\frac{1}{\left(\frac{\tau_1\tau_2}{1 - K_2K_5}\right)s^2 + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{1 - K_2K_5}\right)s + 1}\right]$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\cdot(cs + 1)}{\tau^2\cdot s^2 + 2\xi\cdot\tau\cdot s + 1}}$$

Sistemas interactuantes

$$\frac{H_2(s)}{Q_o(s)} = \frac{-\dfrac{K_4K_5}{1-K_5}}{\left(\dfrac{\tau_4\tau_5}{1-K_5}\right)s^2 + \left(\dfrac{\tau_4+\tau_5}{1-K_5}\right)s + 1}$$

Al comparar ambas ecuaciones, se puede observar que las ganancias y las constantes de tiempo son diferentes.

En el caso interactivo, la constante de tiempo mayor es mas grande , por lo tanto el sistema responde mas lentamente.

Otra característica importante es que dichas constantes de tiempo son reales

Sistemas no interactuantes

$$\frac{H_2(s)}{Q_o(s)} = \frac{-K_1K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1}$$

$$\tau_4 = \tau_5 = \tau$$

$$\tau_{4ef} = \frac{\tau}{1+\sqrt{K_5}} = \frac{\tau}{1.707} = 0.58\tau$$

$$\tau_{5ef} = \frac{\tau}{1-\sqrt{K_5}} = \frac{\tau}{0.293} = 3.417$$

Para el caso de dos constantes de tiempo iguales, con K5=0.5, podemos demostrar que las constantes

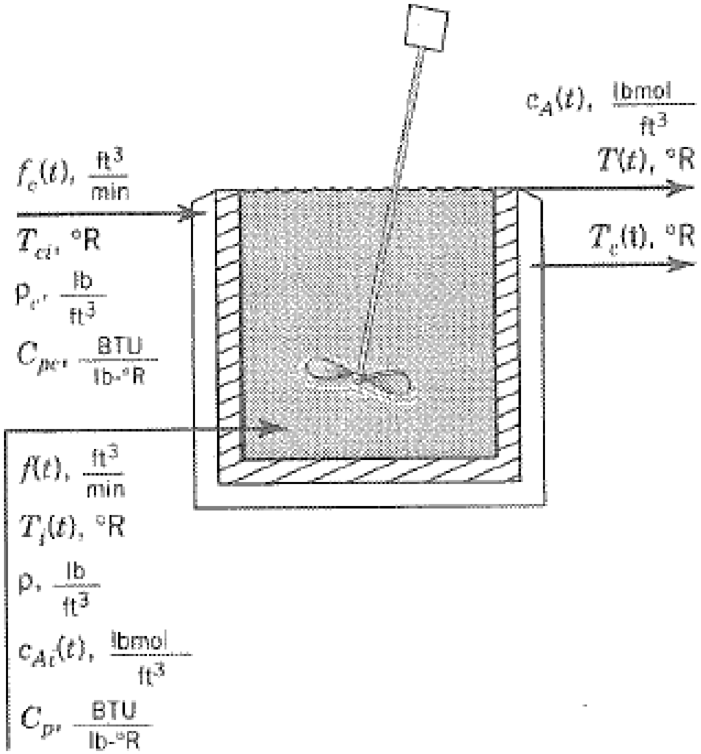
efectivas se modifican en la siguiente relación:

$$\frac{\tau_{5ef}}{\tau_{4ef}} = 5.8$$

Reactor químico no isotérmico

$$r_A(t) = k_o e^{-E/RT(t)} c_A^2(t)$$ **(Ec 1)**

Ecuación no lineal!!!!



$$\begin{bmatrix}\text{Tasa del}\\ \text{componente A}\\ \text{que entra al reactor}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Tasa del}\\ \text{componente A}\\ \text{que sale del reactor}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Tasa de}\\ \text{producción del}\\ \text{componente A}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Tasa de cambio}\\ \text{del componente}\\ \text{A acumulado}\\ \text{en el reactor}\end{bmatrix}$$

$$f(t)c_{Ai}(t) - f(t)c_A(t) - Vr_A(t) = V\frac{dc_A(t)}{dt}$$ **(Ec 2)**

$$\begin{array}{c} \text{Tasa de energía} \\ \text{que entra al reactor} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Tasa de energía} \\ \text{que sale del reactor} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Tasa de energía} \\ \text{asociada con} \\ \text{la reacción} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Tasa de cambio de la} \\ \text{energía acumulada} \\ \text{en el reactor} \end{array}$$

$$\boxed{f(t)\rho C_p T_i(t) - UA[T(t) - T_c(t)] - f(t)\rho C_p T(t) - Vr_A(\Delta H_r)} \boxed{= V\rho C_v \frac{dT(t)}{dt}}$$

(Ec 3)

$$\boxed{f_c(t)\rho_c C_{p_c} T_{c_i}(t) + UA[T(t) - T_c(t)] - f_c(t)\rho_c C_{p_c} T_c(t)} \boxed{= V_c \rho_c C_{v_c} \frac{dT_c(t)}{dt}}$$

(Ec 4)

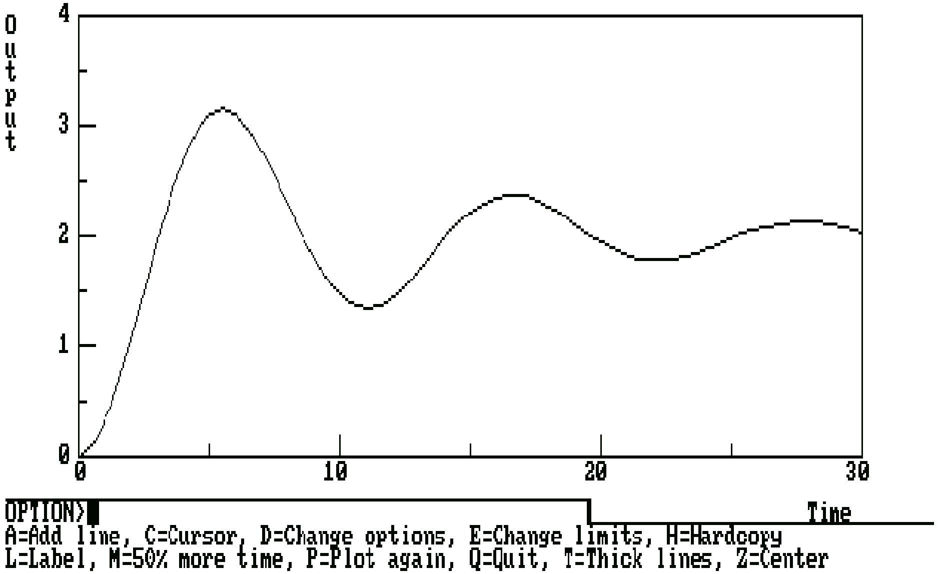
Sistemas de segundo orden

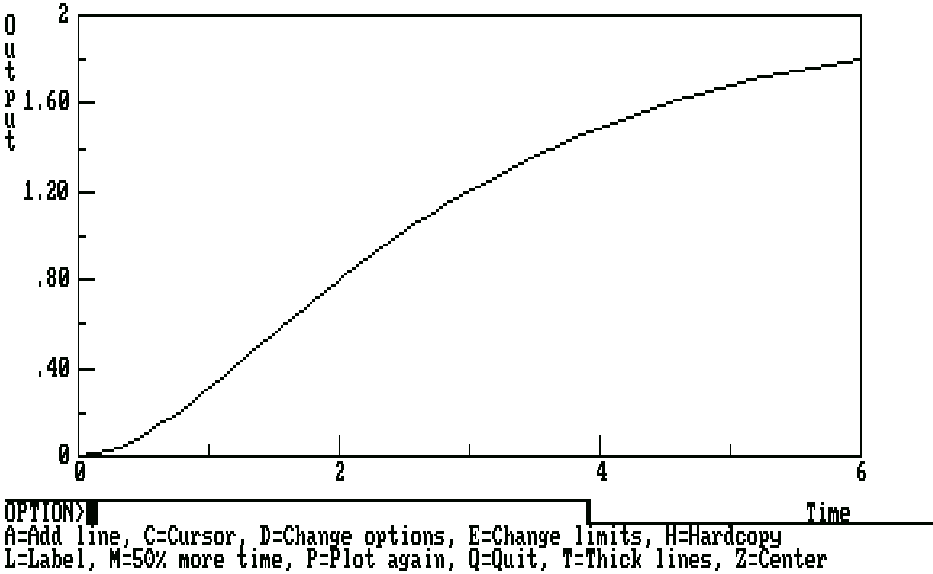
$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}; \qquad 2\xi\tau = \frac{a_1}{a_0}; \qquad K = \frac{b_0}{a_0}; \qquad c = \frac{b_1}{a_0}$$

$$\boxed{\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dy}{dt} + y = K\left[U + c\frac{du}{dt}\right]}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{K(cs+1)}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau.s + 1}$$





$\xi < 1$ $\xi > 1$

$$\xi > 1 \Rightarrow 2 \text{ polos reales negativos y distintos}$$

$$\xi = 1 \Rightarrow 2 \text{ polos reales negativos e iguales}$$

$$\xi < 1 \Rightarrow 2 \text{ polos complejos conjugados con parte real negativa}$$

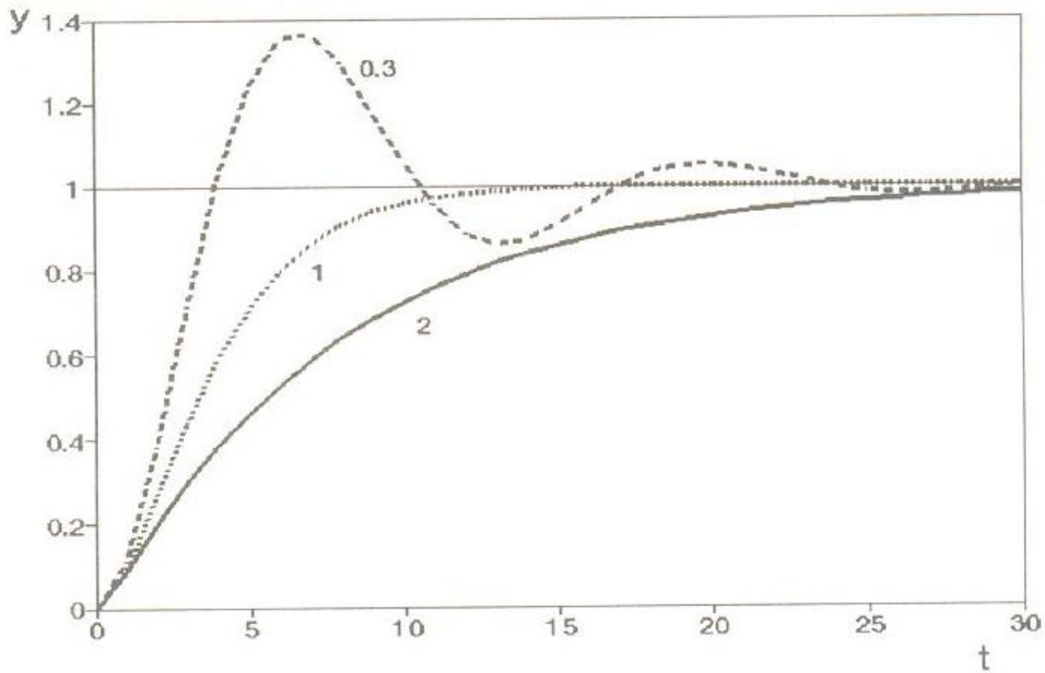


Figura 2.12
Respuesta escaló
sistemas de segur
orden.

Respuesta de sistemas de segundo orden

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\cdot(cs+1)}{\tau^2\cdot s^2 + 2\xi\cdot\tau\cdot s + 1}$$

Entrada escalón

$$Y(s) = \frac{K\cdot E}{s\cdot\left(\tau^2\cdot s^2 + 2\xi\cdot\tau\cdot s + 1\right)} \qquad Y(s) = \frac{K\cdot E\cdot r_1\cdot r_2}{s\cdot\left(s - r_1\right)\cdot\left(s - r_2\right)}$$

$$\left(s - r_1\right)\cdot\left(s - r_2\right) = \frac{\left(\tau^2\cdot s^2 + 2\xi\cdot\tau\cdot s + 1\right)}{\tau^2}$$

Para el caso en que las raíces son reales y diferentes, es decir ξ > 1:

$$\boxed{y(t) = 1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2}\cdot e^{r_1\cdot t} - \frac{r_1}{r_1 - r_2}\cdot e^{r_2\cdot t}}$$

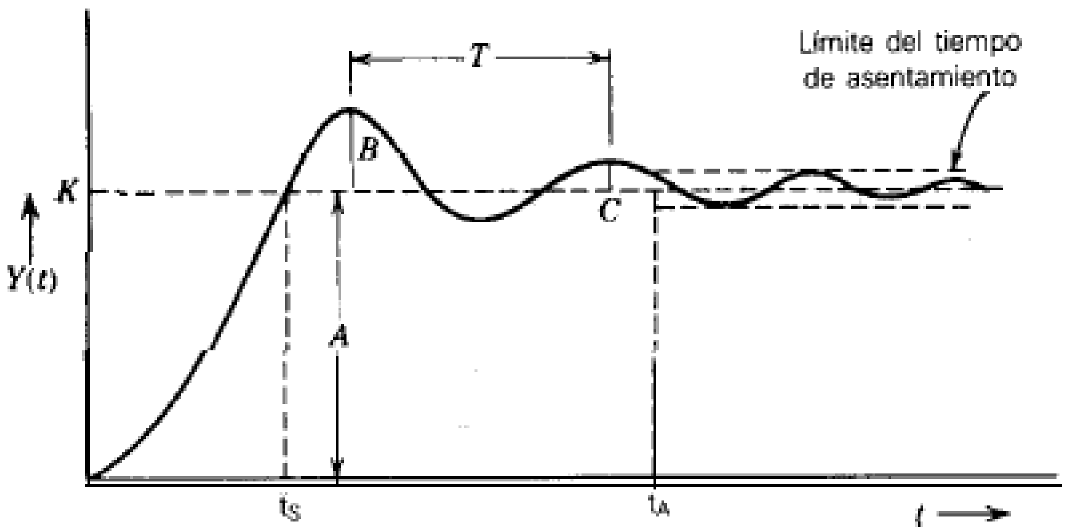
$$r_1 = \frac{-\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \qquad r_2 = \frac{-\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}$$

$$\boxed{y(t) = K\cdot E\cdot\left[1 - 0.5\cdot e^{\frac{-\xi}{\tau}\cdot t}\cdot\left[\left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right)\cdot e^{\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau}\cdot t} + \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right)\cdot e^{-\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau}\cdot t}\right]\right]}$$

ζ=1 ⟹ $$y(t) = k\left[1 - e^{-t/\tau}\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)\right]$$

ζ<1 ⟹ $$y(t)=1 - \frac{e^{-\varepsilon w_n t}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\sqrt{1-\varepsilon^2}\, \cos w_d t + \varepsilon . sen w_d t\right]$$

Frec nat amortiguada: $w_d = w_n\sqrt{1-\varepsilon^2}$



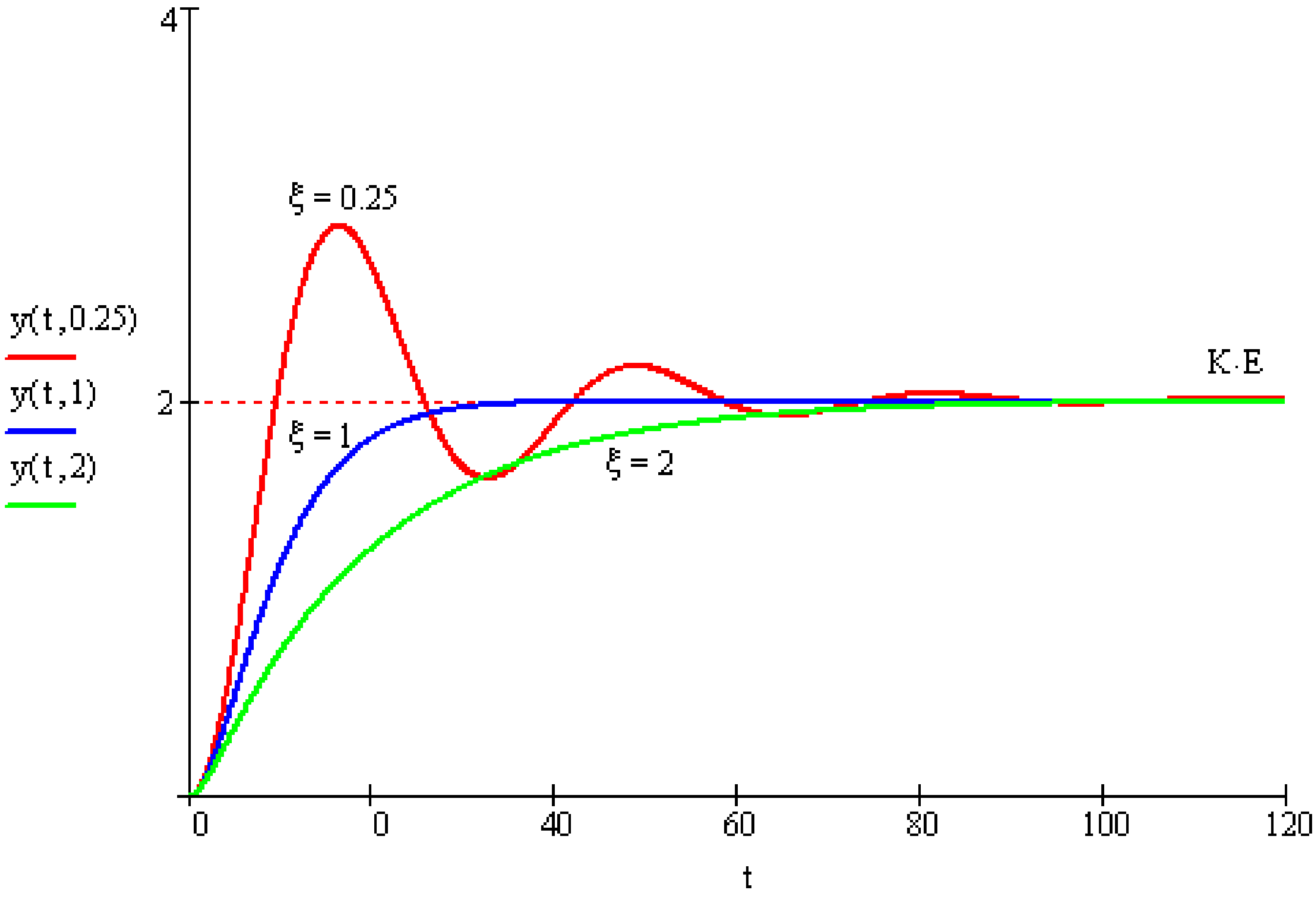
$$\frac{B}{A} = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\frac{C}{B} = e^{-2\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

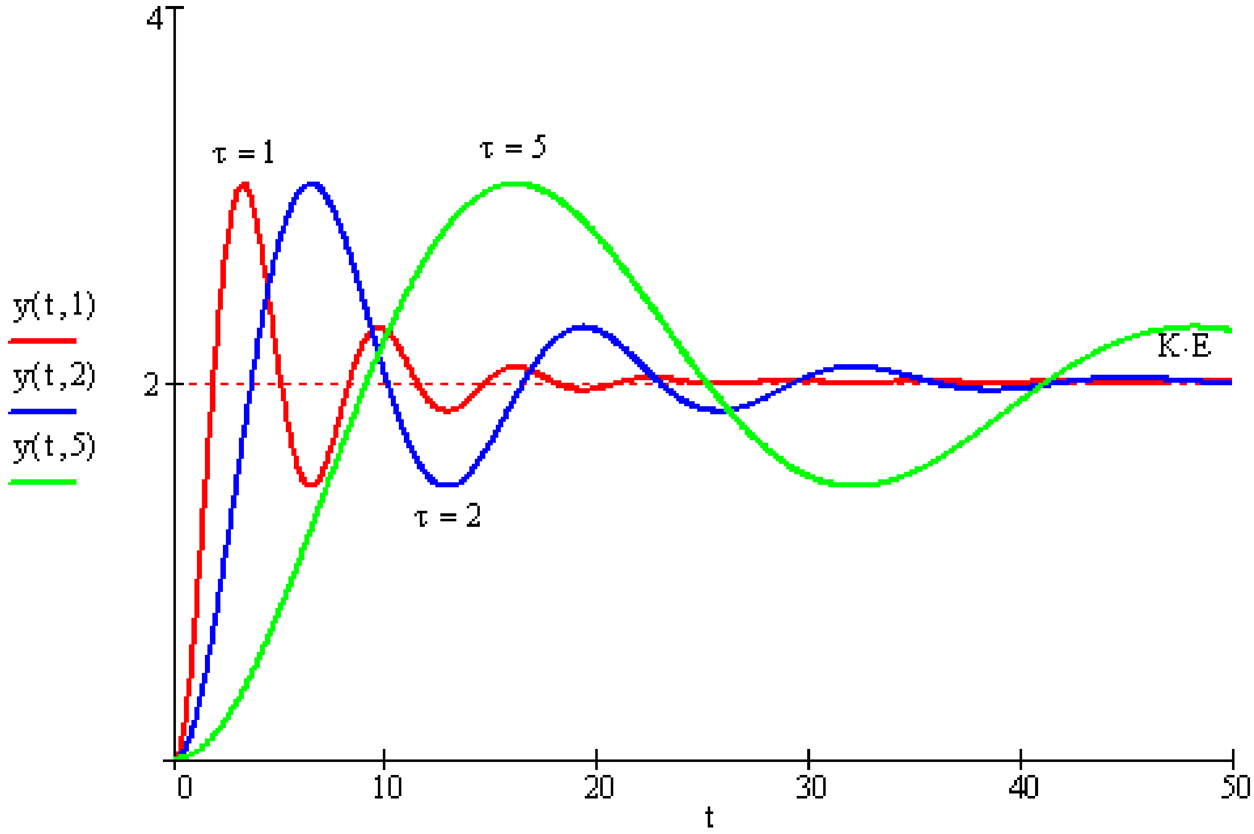
$$T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

$\xi = 0$ ⟹ $T_n = 2\pi\tau$ ⟹ $$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1}$$

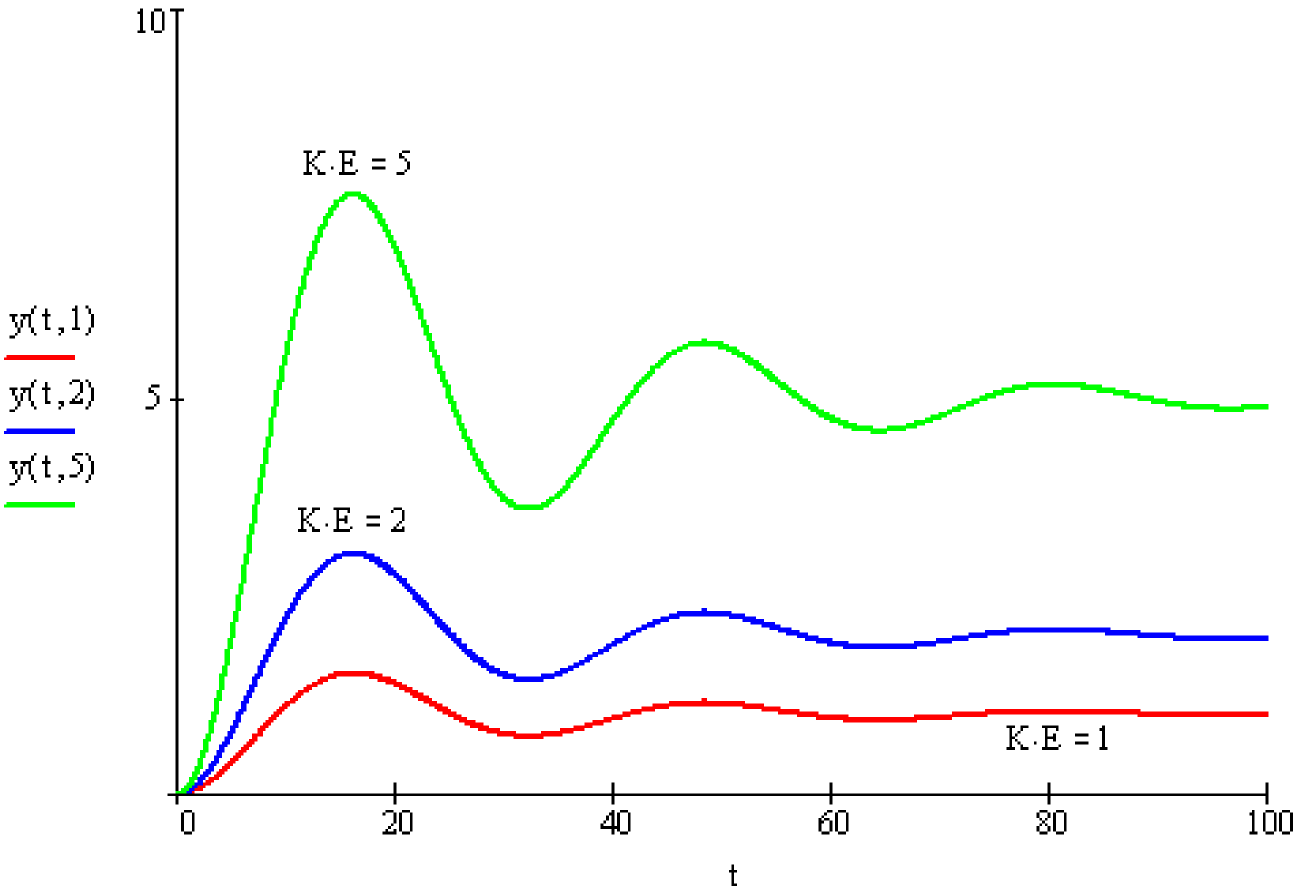
CASO 1 - ξ variable (K.E = 2; τ = 5)



CASO 2 - τ variable (K.E = 2; ξ = 0,2)



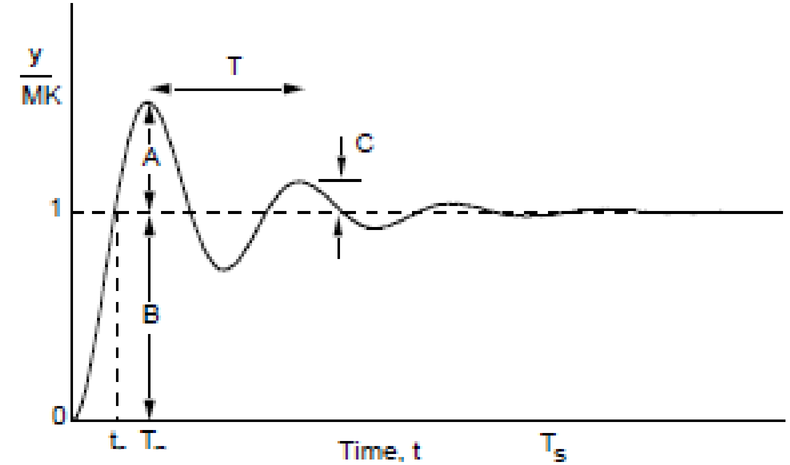
CASO 3 - K E variable (τ = 5; ξ = 0,2)



1. **Overshoot (OS)**

$$OS = \left[\frac{A}{B}\right] = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

$$T_p = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$



2. **Frequency (or period of oscillation, T)**

$$\omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau} \quad \text{or} \quad T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{since } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

3. **Settling time**

The real part of a complex pole in (3-19) is $-\zeta/\tau$, meaning that the exponential function forcing the oscillation to decay to zero is $e^{-\zeta t/\tau}$ as in Eq. (3-23). If we draw an analogy to a first order transfer function, the time constant of an underdamped second order function is τ/ζ. Thus to settle within ±5% of the final value, we can choose the settling time as [1]

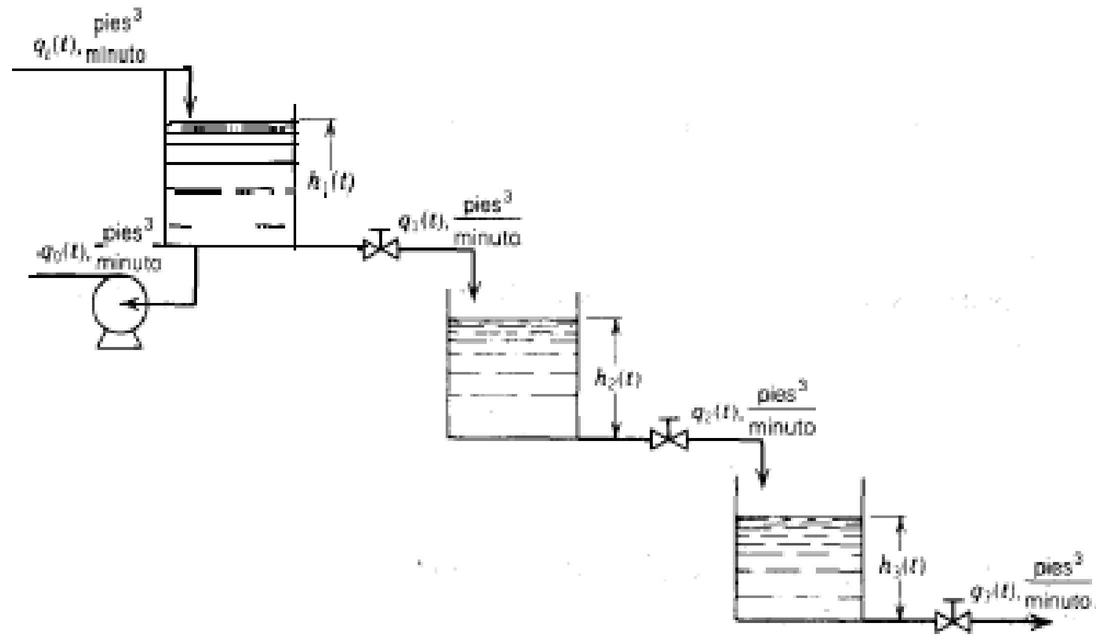
$$T_s = 3\frac{\tau}{\zeta} = \frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad (3\text{-}28)$$

4. **Decay ratio**

$$DR = \left[\frac{C}{A}\right] = \exp\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = OS^2$$

Sistemas de orden superior:

Sistemas en serie no interactivos



$$\frac{H_3(s)}{Q_i(s)} = \frac{K_1 K_2 K_3}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$$

$$\frac{H_3(s)}{Q_i(s)} = \frac{H_1(s)}{Q_i(s)} \cdot \frac{H_2(s)}{H_1(s)} \cdot \frac{H_3(s)}{H_2(s)}$$

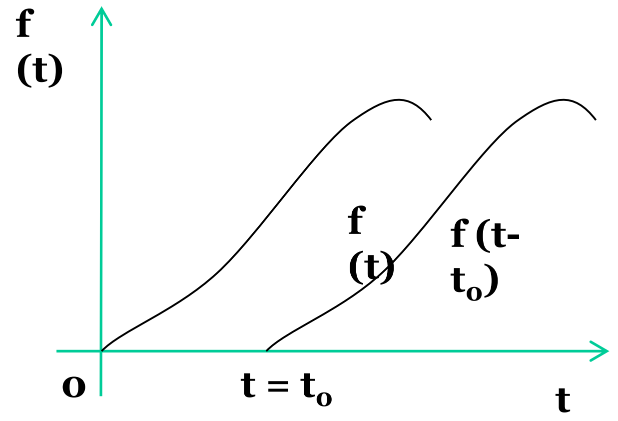
$$G(s) = \prod_{i=1}^{n} G_i(s)$$

$$\frac{H_3(s)}{Q_0(s)} = \frac{-K_1 K_2 K_3}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$$

Tiempo Muerto

El retardo de transporte ocasiona retardos de tiempo en un proceso; este fenómeno se conoce comúnmente como **tiempo muerto**.

Matemáticamente se expresa como la traslación de una función en el eje del tiempo; la función trasladada es la función original con retardo en el tiempo.



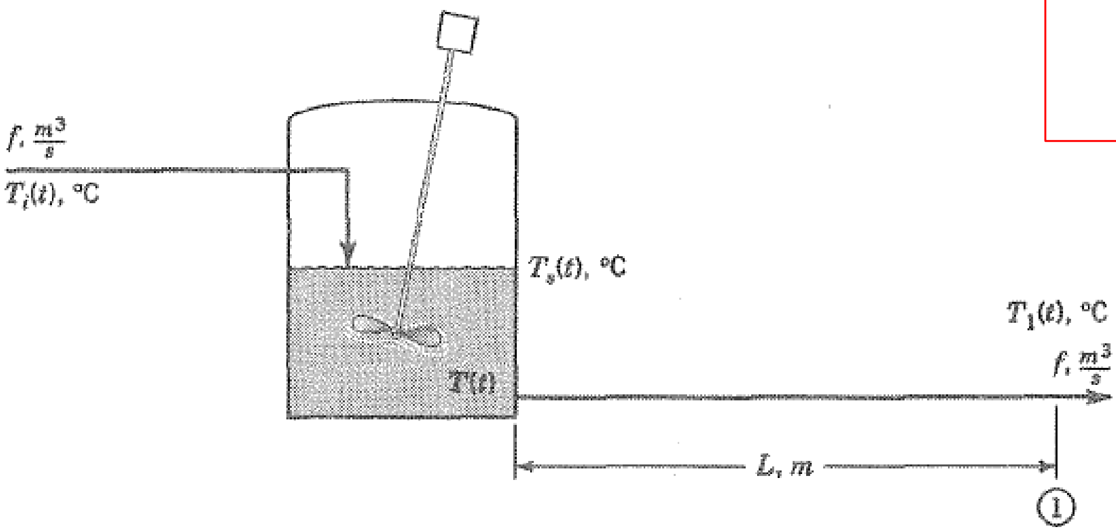
Transformada de Laplace de una función con retardo en el tiempo:

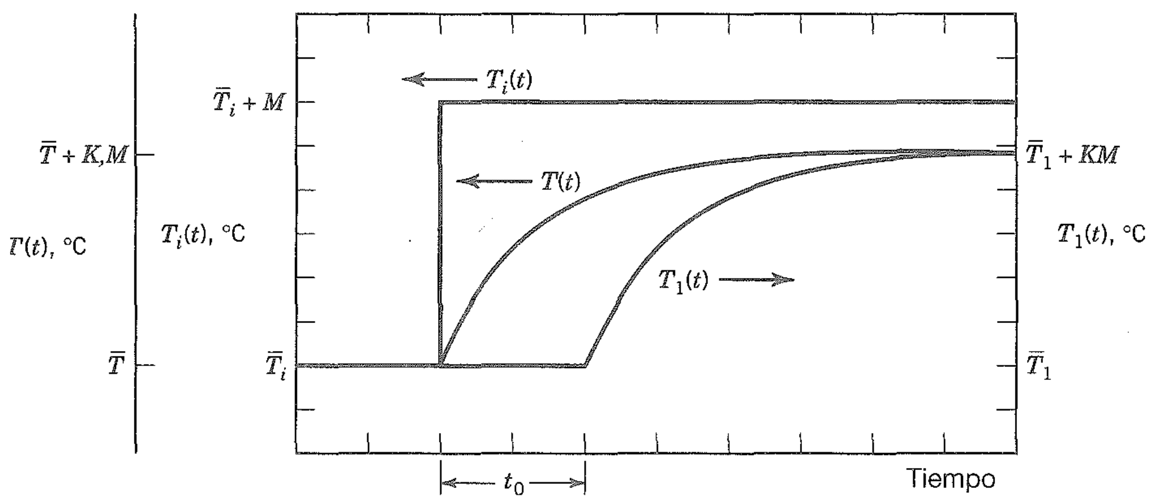
$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s)$$

Puesto que la transformada de Laplace no contiene información acerca de la función original para tiempo negativo, se supone que la función retardada es cero para todos los tiempos menores al de retardo.

Proceso térmico con tiempo muerto

$$\frac{T_i}{T_s} = \frac{K * e^{-t_0.s}}{\tau.s + 1}$$





Proceso 1° orden SIN RETARDO con entrada escalón unitario

$$\hat{T}(s) = \frac{A}{\tau s^2 + s}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\hat{T}(t) = A\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\boxed{T(t) = \bar{T} + A\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Proceso 1° orden CON RETARDO con entrada escalón unitario

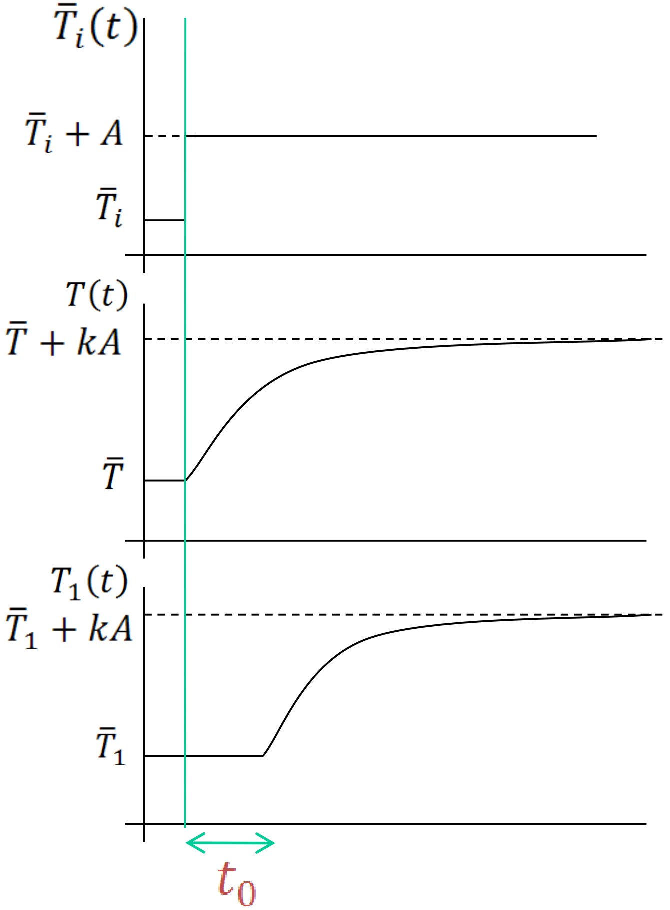
$$\boxed{T(t-t_0) = \bar{T} + A\left(1 - e^{-(t-t_0)/\tau}\right)}$$

- Recordando que: $\mathcal{L}[\mathrm{f}(\mathrm{t}-\mathrm{t}_0)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{s}\mathrm{t}_0}\mathrm{F}(\mathrm{s})$
- La función de transferencia para un proceso de este tipo es:

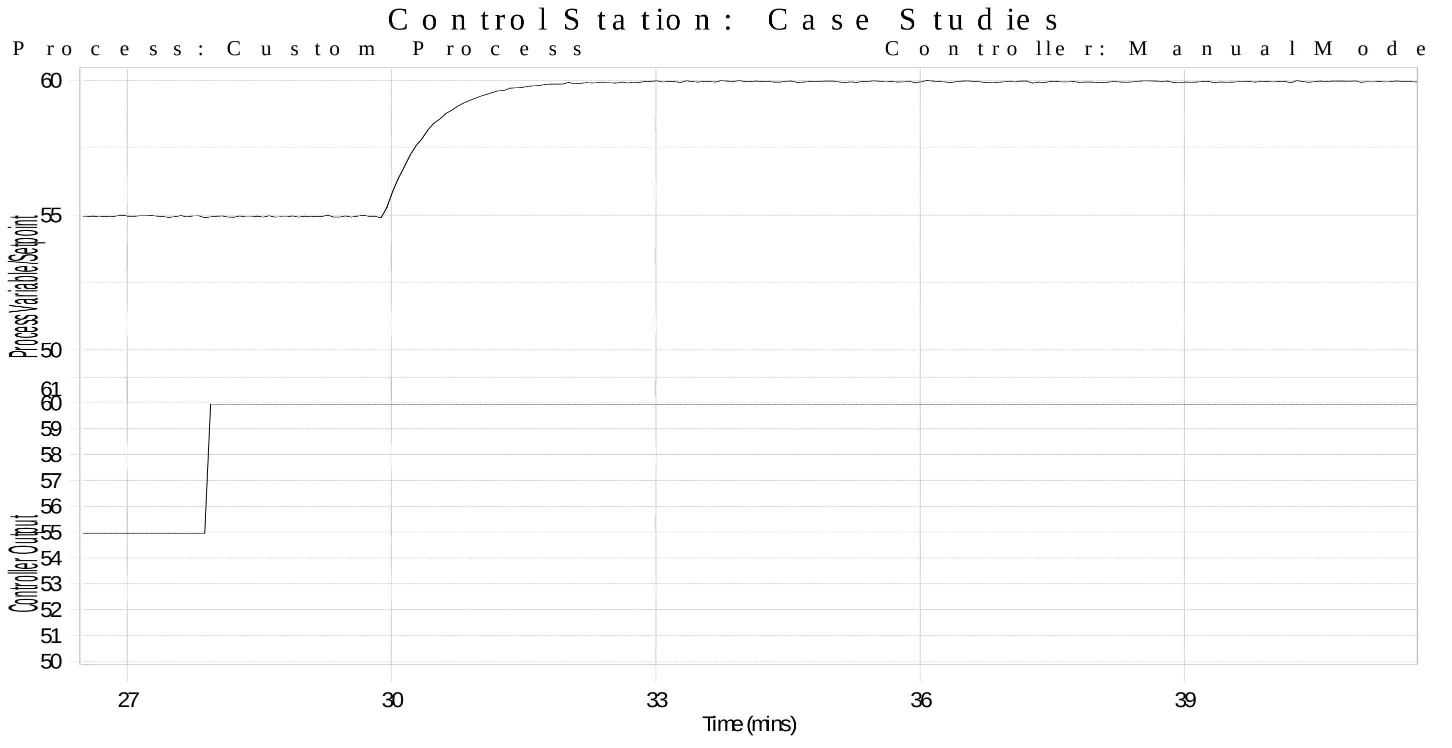
$$G(s) = \underbrace{\frac{k}{[\tau s + 1]}}_{\text{Función de transferencia general de un proceso sin retardo}} \underbrace{e^{-st_0}}_{\text{Transformada de Laplace del puro tiempo muerto}}$$

Función de Transferencia para proceso con tiempo muerto

- Por ejemplo, si se supone un incremento en escalón de $T_i(t)$:



Tiempo muerto + Capacitancia

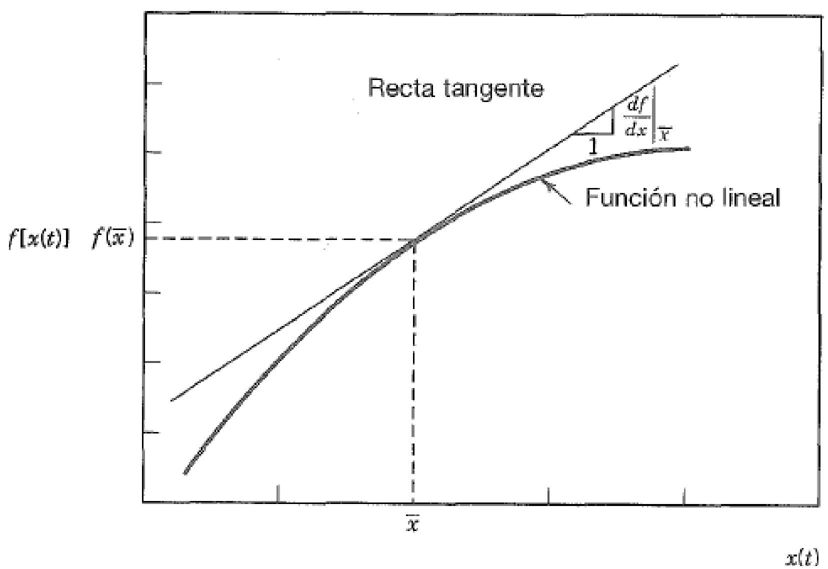


Linealización de sistemas

Aplicando series de Tayor:

$$f[x(t)] = f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} [x(t) - \bar{x}] + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{\bar{x}} [x(t) - \bar{x}]^2 + \cdots$$

$$\boxed{f[x(t)] \approx f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} [x(t) - \bar{x}]}$$



La aproximación lineal es la tangente a la función no lineal en el punto base $\bar{x}$.

Linealización de sistemas

Linealizamos la Ecuación de Arrhenius, que expresa la dependencia del coeficiente *k (*tasa de reacción) en función de la Temperatura

$$k[T(t)] = k_0 e^{-E/RT(t)}$$

$$k[T(t)] \approx k(\bar{T}) + \left.\frac{dk}{dT}\right|_{\bar{T}} [T(t) - \bar{T}]$$

$$\left.\frac{dk}{dT}\right|_{\bar{T}} = \frac{d}{dT}\left[k_0 e^{-E/(RT(t))}\right]_{T=\bar{T}}$$

$$= k_0 e^{-E/(R\bar{T})} \frac{E}{R\bar{T}^2} = k(\bar{T}) \frac{E}{R\bar{T}^2}$$

Para linealizar funciones de dos o mas variables:

$$F(y,u) = F(y_0,u_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\begin{pmatrix} y_0 \\ u_0 \end{pmatrix}} (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{\begin{pmatrix} y_0 \\ u_0 \end{pmatrix}} (u - u_0)$$

Aplicando variables de desviación:

$$F(\overline{y},\overline{u}) = \left.\frac{\partial F}{\partial \overline{y}}\right|_{\begin{pmatrix} \overline{y}_0 \\ \overline{u}_0 \end{pmatrix}} \overline{y} + \left.\frac{\partial F}{\partial \overline{u}}\right|_{\begin{pmatrix} \overline{y}_0 \\ \overline{u}_0 \end{pmatrix}} \overline{u}$$

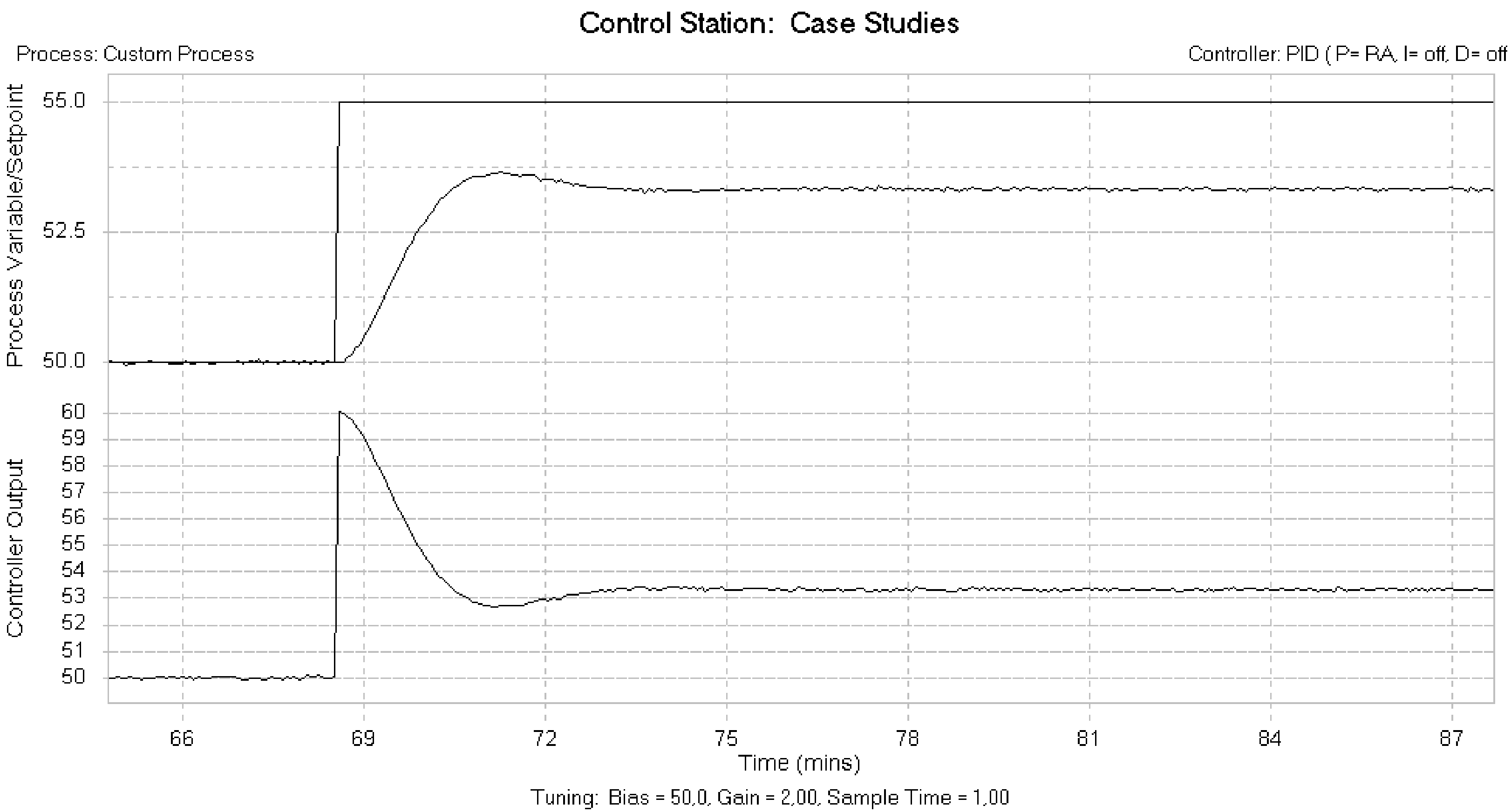
Acciones básicas de control

PID

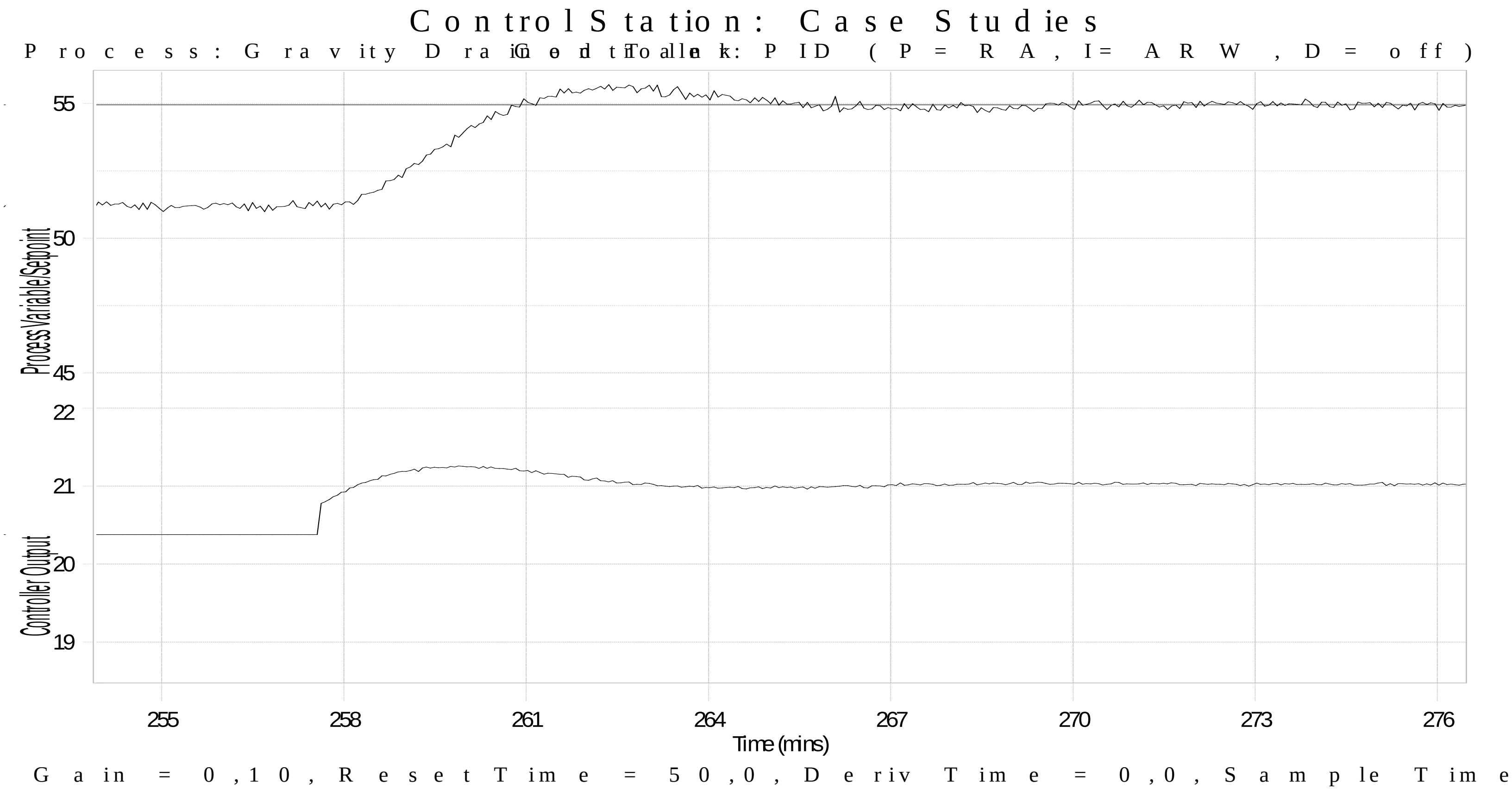
$$\mathrm{m(t)} = \mathrm{K_c}\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d\,\frac{de(t)}{dt} \right]$$

$$\mathrm{G_c}(s) = \mathrm{K_c}\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d\,s \right)$$

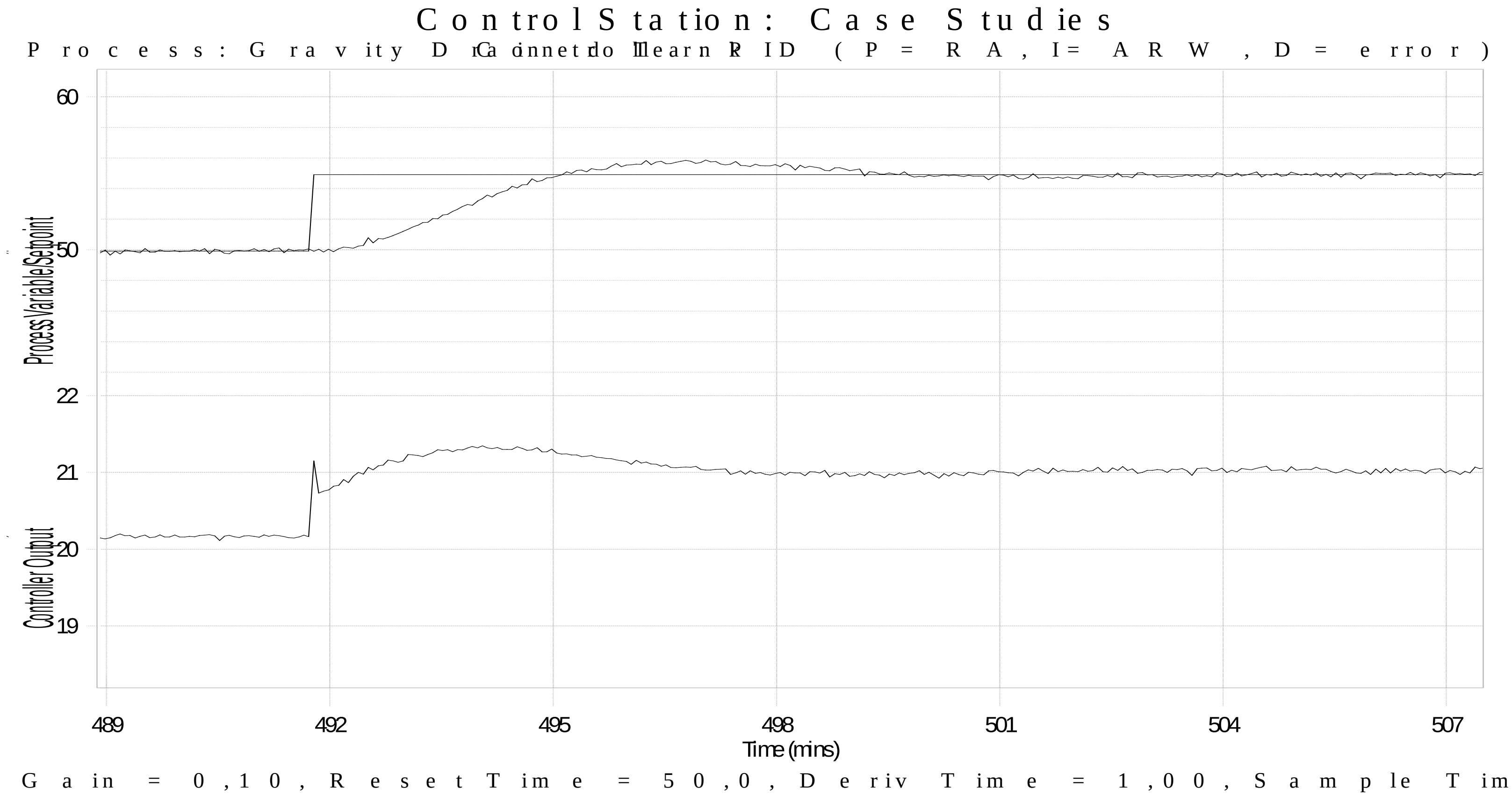
Acción solo proporcional → Error de offset



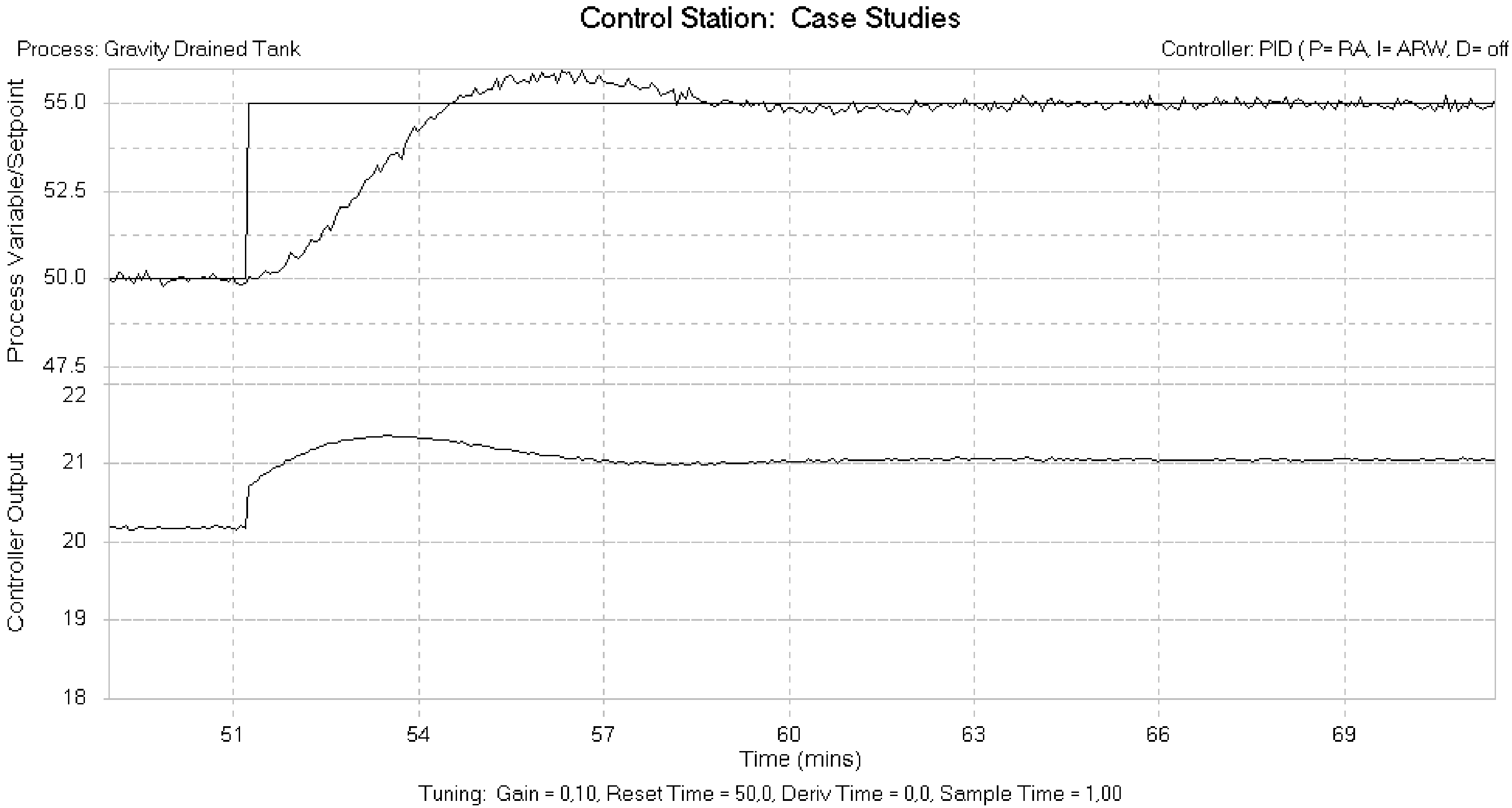
Corrección del error de offset por la acción integral



Excesiva acción derivativa



Acción proporcional + integral+derivativa



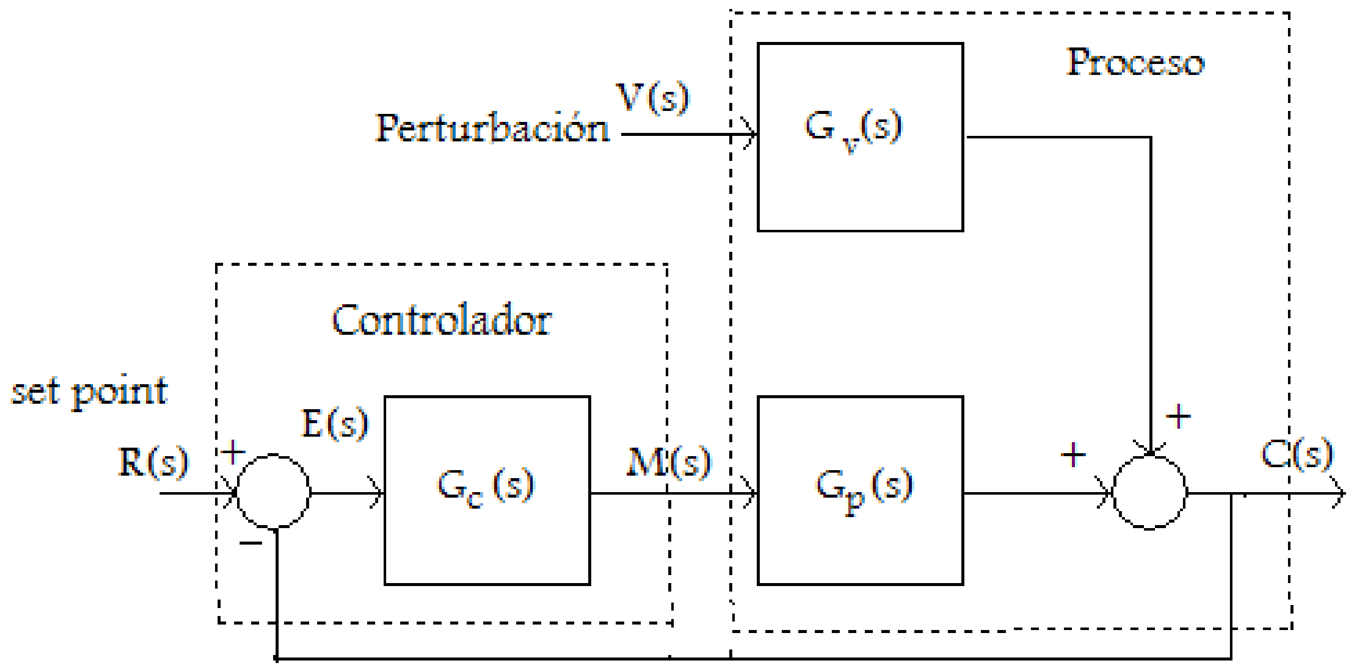

Proceso
Perturbación
V(s)
$G_v(s)$
Controlador
set point
R(s)
E(s)
+
−
$G_c(s)$
M(s)
$G_p(s)$
+
+
C(s)

Figura 1.6

Función de transferencia de lazo abierto

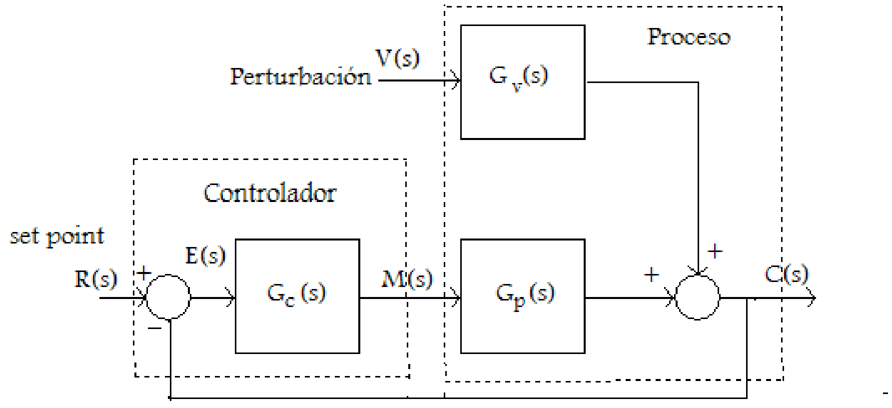


Figura 1.6

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = G_c(s) G_p(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

Función de transferencia de lazo cerrado

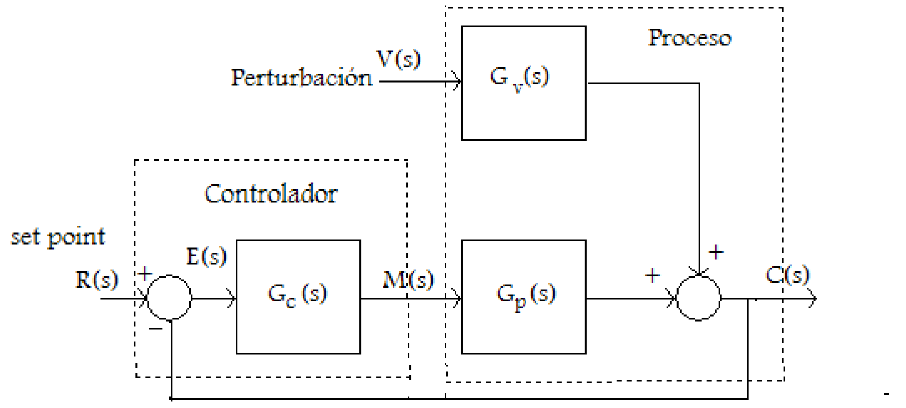


Figura 1.6

$$= \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$