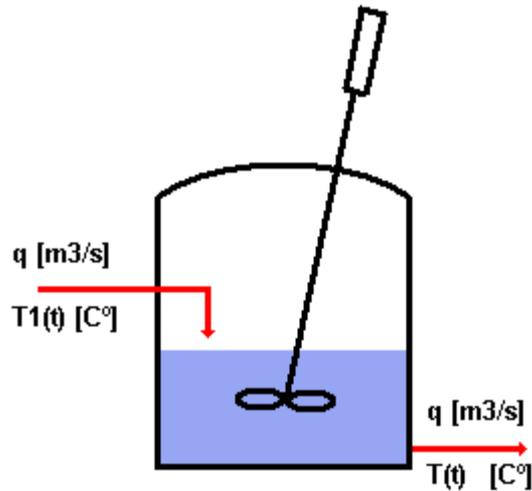


EJEMPLO 1

Proceso Térmico



Balance de energía

$$q * \rho_i * h_i(t) - q * \rho * h(t) = \frac{\partial(V * \rho * u(t))}{\partial t}$$

En términos de la temperatura

$$q * \rho_i * C_{p_i} * T_i(t) - q * \rho * C_p * T(t) = \frac{\partial(V * \rho * C_v * T(t))}{\partial t}$$

Ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden

$$q * \rho_i * C_{p_i} * T_i(t) - q * \rho * C_p * T(t) = V * \rho * C_v * \frac{\partial T(t)}{\partial t} \quad \text{ecuación 1}$$

ρ_i, ρ = densidad del líquido a la entrada y a la salida, respectivamente en kg/m³
 C_{p_i}, C_p = capacidad calorífica a presión cte. del líquido a la entrada y a la salida respectivamente en J/kg*C°

C_v = capacidad calorífica a volumen cte. del líquido en J/kg*C°

V = Volumen del líquido en el tanque en m³

h_i, h = entalpía del líquido a la entrada y a la salida respectivamente en J/kg

u = energía interna del líquido en el tanque J/kg

Se escribe el balance de energía del contenido del tanque en estado

$$\text{estacionario: } q * \rho * C_p * \bar{T}_i - q * \rho * C_p * \bar{T} = 0 \quad \text{Ecuación 2}$$

Al substraer la **ecuación 2** de la **ecuación 1** se obtiene:

$$q * \rho * C_p * [T_i(t) - \bar{T}_i] - q * \rho * C_p * [T(t) - \bar{T}] = V * \rho * C_v * \frac{\partial [T(t) - \bar{T}]}{\partial t}$$

$$\text{variables de desviación } \bar{\bar{T}}(t) = T(t) - \bar{T} \quad \text{y} \quad \bar{\bar{T}}_i(t) = T_i(t) - \bar{T}_i$$

Se sustituyen las ecuaciones

$$q * \rho * C_p * \bar{\bar{T}}_i(t) - q * \rho * C_p * \bar{\bar{T}}(t) = V * \rho * C_v * \frac{\partial \bar{\bar{T}}(t)}{\partial t}$$

Se puede reordenar como sigue: $\frac{V * \rho * C_v}{q * \rho * C_p} * \frac{\partial \bar{T}(t)}{\partial t} + \bar{T}(t) = \bar{T}_i(t)$

Siendo $\tau = \frac{V * \rho * C_v}{q * \rho * C_p}$

$$\tau * \frac{\partial \bar{T}(t)}{\partial t} + \bar{T}(t) = \bar{T}_i(t)$$

Puesto que esta es una ecuación diferencial lineal, con la utilización de la transformada de Laplace se obtiene:

$$\tau s T(s) - \tau T(0) + T(s) = T_i(s)$$

Pero $T(0) = 0$ y, por lo tanto, algebraicamente

$$\frac{T(s)}{T_i(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$T(s) = \frac{1}{\tau s + 1} * T_i(s)$$

EJEMPLO 2

PROCESO DE UN GAS

q_0 = Variable Manipulada
 q_i = Perturbación
 $\Delta P = P - P_2$ Variable Controlada
 Set Point = ΔP

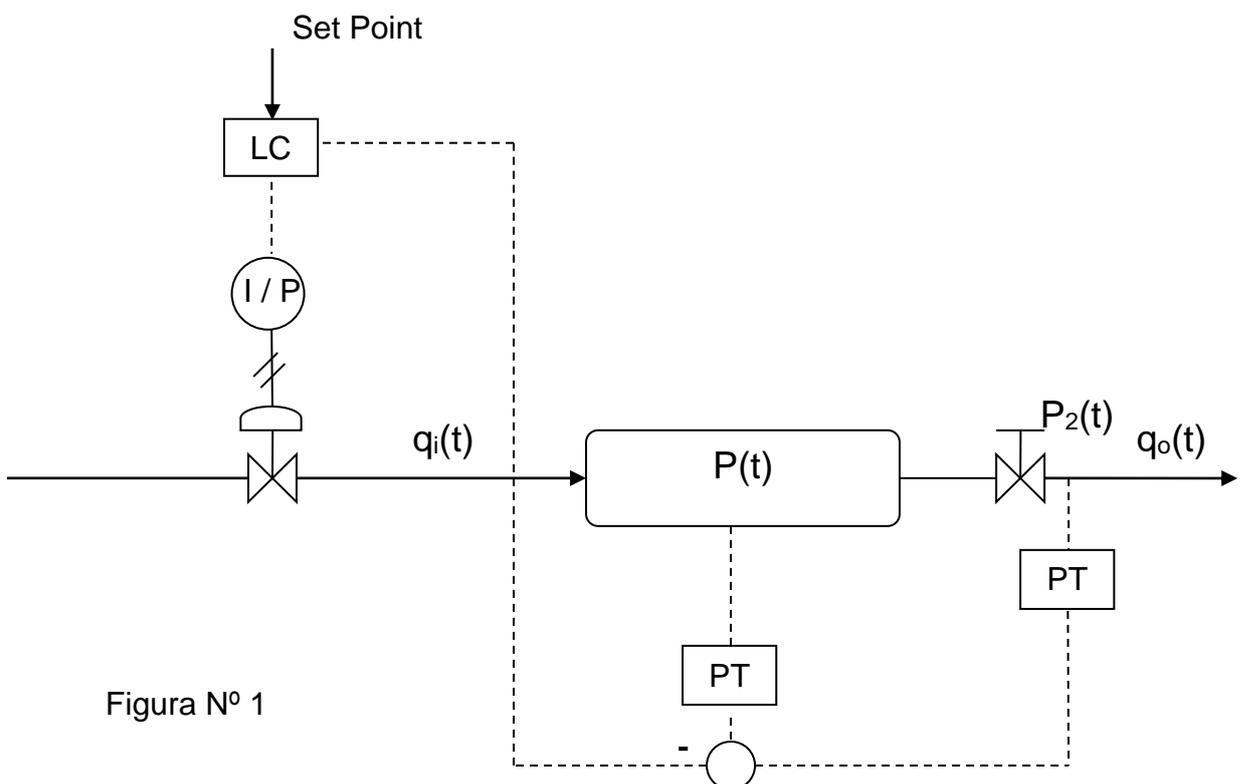


Figura N° 1

Considérese el recipiente de un gas que se muestra en la figura N° 1, el recipiente actúa como un amortiguador o tanque de compensación. Se supone que el proceso es **isotérmico** y el flujo a través de la válvula de salida se expresa como:

$$q_o = \frac{p(t) - p_2(t)}{R_v}$$

Siendo R_v la resistencia al flujo en la válvula, psi/scfm

- No se genera ni se consume masa en el sistema
- a presión en el tanque es baja, por lo que es aplicable la ecuación de estado de los gases perfectos:

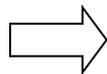
$$p(t) / m(t) = RT / VM$$

M peso molecular del gas
 R cte de los gases perfectos

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{RT}{VM} \frac{dm(t)}{dt}$$

Balance de masa:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \rho q_i(t) - \rho q_o(t) \quad (a)$$



$$\frac{dp(t)}{dt} \frac{VM}{RT} = \rho q_i(t) - \rho \frac{[p(t) - p_2(t)]}{R_v}$$

En estado estacionario

$$0 = \rho q_i'(t) - \rho \frac{[p'(t) - p_2'(t)]}{R_v} \quad (b)$$

Se sustrae (b) en (a)

$$\frac{dp}{dt} \frac{VM}{RT} - \rho q_i' + \frac{\rho(p' - p_2')}{R_v} = \rho q_i(t) - \rho \frac{(p - p_2)}{R_v} - \rho q_i' + \frac{\rho(p' - p_2')}{R_v}$$

como

$$\rho q_i' + \frac{\rho(p' - p_2')}{R_v} = \frac{VM}{RT} \frac{dp'}{dt}$$



$$\frac{dp}{dt} \frac{VM}{RT} - \frac{dp'}{dt} \frac{VM}{RT} = \rho(q_i - q_i') - \frac{\rho}{R_v} (p - p_2 - p' + p_2')$$

$$\frac{VM}{RT} \frac{dp - dp'}{dt} = \rho(q_i - q_i') - \frac{\rho}{R_v} [(p - p') - (p_2 - p_2')]$$

Variables de desviación:

$$\begin{aligned} Q(t) &= q_i(t) - q_i' \\ P(t) &= p(t) - p' \\ P_2(t) &= p_2(t) - p_2' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{VM}{RT} \frac{dP(t)}{dt} = \rho Q(t) - \frac{\rho}{R_v} (P(t) - P_2(t))$$

Multiplicando por R_v/ρ y reagrupando

$$R_v Q_i + P_2 = \frac{VM R_v}{RT \rho} \frac{dP(t)}{dt} + P(t) \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_1 = R_v \\ \tau = \frac{VM R_v}{RT \rho} \text{ (minutos)} \end{array} \right.$$

$$\boxed{K_1 Q_i(t) + P_2(t) = \tau \frac{dP(t)}{dt} + P(t)}$$

Transformada de Laplace:

$$K_1 Q_i(s) + P_2(s) = \tau s P(s) + P(s)$$

$$K_1 Q_i(s) + P_2(s) = P(s) (\tau s + 1)$$

$$\boxed{P(s) = \frac{K_1}{(\tau s + 1)} Q_i(s) + \frac{1}{(\tau s + 1)} P_2(s)}$$

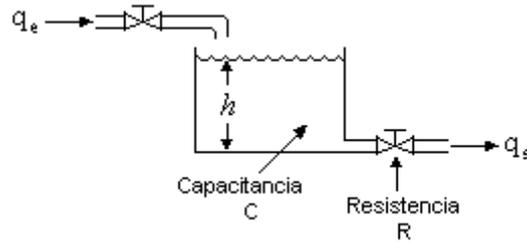
Funciones de transferencia de primer orden:

$$\boxed{\frac{P(s)}{Q_i(s)} = \frac{K_1}{(\tau s + 1)}}$$

$$\boxed{\frac{P(s)}{P_2(s)} = \frac{1}{(\tau s + 1)}}$$

EJEMPLO 3

Calcular la constante T y la función de transferencia para el siguiente sistema:



[Acumulación de masa en el sistema]: $A_T \frac{dh}{dt} = (q_e - q_s)$

Ecuación de Estado Estacionario: $0 = (\bar{q}_e - \bar{q}_s) \Rightarrow \bar{q}_e = \bar{q}_s$

Ecuación de Estado dinámico: $A_T \frac{dh}{dt} = (q_e - \bar{q}_e) - (q_s - \bar{q}_s)$

Suponiendo una descarga lineal o linealizada, el caudal de salida q_s , está relacionado con la presión hidrostática del nivel h a través de una resistencia:

$$q_s = \frac{h}{R} = \frac{\text{Fuerzamotiz}}{\text{resistencià}}$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación de Estado dinámico:

$$A_T \frac{dh}{dt} = q_e - \frac{h}{R}$$

$$A_T \frac{dh}{dt} + \frac{h}{R} = q_e$$

Aplicando la **Transformada de Laplace**:

$$L \left[A_T \frac{dh}{dt} + \frac{h}{R} \right] = q(s)$$

$$L \left[A_T \frac{dh}{dt} \right] + L \left[\frac{h}{R} \right] = q(s)$$

$$A_T \cdot sH(s) + \frac{1}{R} H(s) = q(s)$$

Multiplicando ambos miembros por R , para llevarlo a la forma conveniente:

$$A_T \cdot R \cdot sH(s) + R \cdot \frac{1}{R} H(s) = R \cdot q(s)$$

Resulta: $(A_T \cdot R)sH(s) + H(s) = R \cdot q(s)$

Haciendo: $\tau = A_T \cdot R$

$K = R$

$$\boxed{\tau \cdot sH(s) + H(s) = K \cdot q(s)}$$

La Ecuación de Transferencia será:

$$\tau \cdot sH(s) + H(s) = K \cdot q(s)$$

$$(\tau \cdot s + 1)H(s) = K \cdot q(s)$$

$$G(s) = \frac{H(s)}{q(s)} = \frac{K}{(\tau \cdot s + 1)}$$

EJEMPLO 4

Reactor Químico

El reactor químico es el ejemplo típico de un proceso altamente no lineal. Considérese el reactor que se muestra en la siguiente figura:

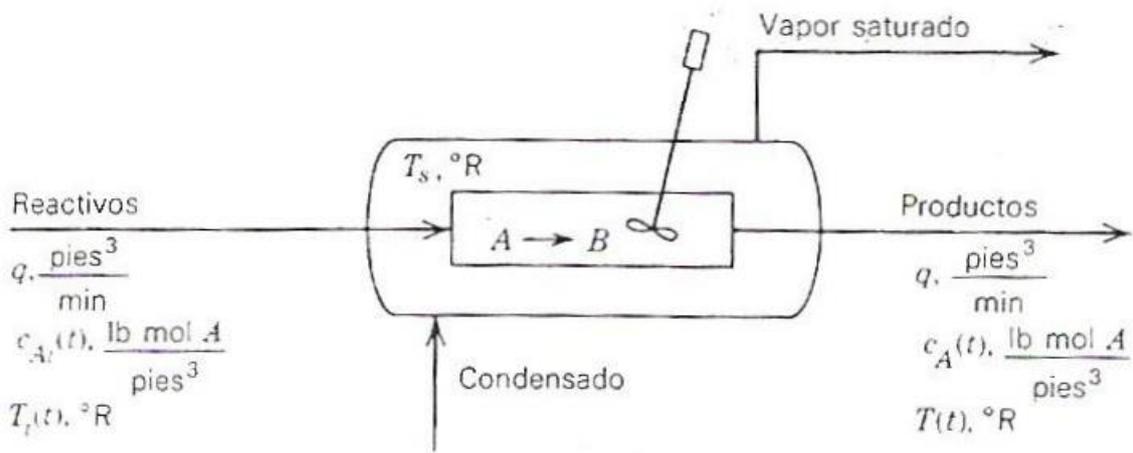


Figura 3-20. Reactor químico.

El reactor es un recipiente en el que ocurre una reacción altamente exotérmica, del tipo $A \rightarrow B$. Para eliminar el calor de la reacción, se rodea al reactor con un forro en el que se obtiene vapor saturado a partir de líquido saturado. Se puede suponer que la temperatura del forro, T_s es constante, que el forro está bien aislado, que los reactivos y los productos son líquidos y sus densidades y capacidades caloríficas no varían mucho con la temperatura o la composición.

La tasa de reacción está dada por la siguiente expresión:

$$r_{A(t)} = k_0 e^{-E/RT(t)} c_{A(t)} \text{ [lb mol producido de A/pies}^3 \text{ min]}$$

El factor de frecuencia k_0 y la energía de activación E , son constantes específicas para cada reacción; se considera que el calor de reacción es constante y se expresa por ΔH_r en Btu/lb mol de A, después de reaccionar.

Se tiene interés en conocer el efecto de los cambios en la concentración de entrada de A, $C_{Ai}(t)$ y de la temperatura de entrada, $T_i(t)$, sobre la concentración de salida de A, $C_A(t)$.

Al escribir el balance molar de estado dinámico para el reactor, se tiene:

$$qC_{Ai}(t) - Vr_A(t) - qC_A(t) = V \frac{dc_A(t)}{dt} \quad (3-62)$$

Tenemos 1 ecuación con 2 incógnitas ($C_A(t)$, $r_A(t)$), donde V es el volumen del reactor en pies³.

De la tasa de reacción se obtiene otra relación:

$$r_A(t) = k_0 e^{-E/RT(t)} C_A(t) \quad (3-63)$$

Tenemos 2 ecuaciones con 3 incógnitas ($T(t)$).

Aún falta una ecuación independiente para describir completamente este proceso, la relación debe involucrar a la temperatura de reacción. La ecuación que se requiere es un balance de energía para el reactor:

$$q\rho C_p T_i(t) - Vr_A(t)(\Delta H_r) - UA(T(t) - T_s) - q\rho C_p T(t) = V\rho C_v \frac{dT(t)}{dt} \quad (3-64)$$

donde:

- ρ = densidad de los productos y los reactivos, se supone constante, lbm/pies³
- C_p = capacidad calorífica a presión constante de los productos y los reactivos, se supone constante, Btu/lbm^oR
- C_v = capacidad calorífica a volumen constante, se supone constante, Btu/lbm^oR
- U = coeficiente global de transferencia de calor, se supone constante Btu/^oRpies²min
- A = área de transferencia de calor, pies²
- ΔH_r = calor de reacción, se supone constante, Btu/lb mol de reacción de A
- T_s = temperatura de vapor saturado, ^oR

Las ecuaciones (3-62), (3-63) y (3-64) describen el reactor químico. Este sistema de ecuaciones es completamente alineal, principalmente la ecuación (3-63) y, nuevamente, la solución de las mismas se puede obtener mediante métodos numéricos o mediante la linealización del término no lineal, de manera que se pueda obtener una solución analítica aproximada. Utilizaremos el último método para determinar las funciones de transferencia que se desean.

Al linealizar la ecuación (3-63) alrededor de las mismas condiciones de operación \bar{T} y \bar{C}_A , se tiene:

$$r_A(t) = \bar{r}_A + C_1 \mathbf{T}(t) + C_2 C_A(t) \quad (3-65)$$

donde:

$$\bar{r}_A = k_0 e^{-E/RT} \bar{c}_A$$

$$C_1 = \left. \frac{\partial r_A(t)}{\partial T(t)} \right|_{ss} = \frac{k_0 E \bar{c}_A}{R \bar{T}^2} e^{-E/RT}$$

$$C_2 = \left. \frac{\partial r_A(t)}{\partial C_A(t)} \right|_{ss} = k_0 e^{-E/RT}$$

$$\mathbf{T}(t) = T(t) - \bar{T}$$

$$C_A(t) = c_A(t) - \bar{c}_A$$

Al sustituir la ecuación (3-65) en las ecuaciones (3-62) y (3-64), se obtienen dos ecuaciones diferenciales lineales con dos incógnitas:

$$qC_{Ai}(t) - Vr_A - VC_1 \mathbf{T}(t) - VC_2 C_A(t) - qC_A(t) = V \frac{dc_A(t)}{dt} \quad (3-66)$$

$$q\rho C_p T_i(t) - V(\Delta H_r) \bar{r}_A - V(\Delta H_r) C_1 \mathbf{T}(t) - V(\Delta H_r) C_2 C_A(t) - UA(T(t) - T_s) - q\rho C_p T(t) = V\rho C_v \frac{dT(t)}{dt} \quad (3-67)$$

Se usa el método descrito en los ejemplos anteriores para obtener las dos ecuaciones diferenciales en términos de las variables de desviación:

$$qC_{Ai}(t) - VC_1 \mathbf{T}(t) - VC_2 C_A(t) - qC_A(t) = V \frac{dC_A(t)}{dt} \quad (3-68)$$

$$q\rho C_p T_i(t) - V(\Delta H_r) C_1 \mathbf{T}(t) - V(\Delta H_r) C_2 C_A(t) - UA \mathbf{T}(t) - q\rho C_p \mathbf{T}(t) = V\rho C_v \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} \quad (3-69)$$

Donde

$$C_{Ai}(t) = c_{Ai}(t) - \bar{c}_{Ai}$$

$$\mathbf{T}_i(t) = T_i(t) - \bar{T}_i$$

Al reordenar las ecuaciones (3-68) y (3-69) algebraicamente, se tiene

$$\tau_1 \frac{dC_A(t)}{dt} + C_A(t) = K_1 C_{Ai}(t) - K_2 \mathbf{T}(t) \quad (3-70)$$

$$\tau_2 \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} + \mathbf{T}(t) = K_3 \mathbf{T}_i(t) - K_4 C_A(t) \quad (3-71)$$

Donde:

$$\tau_1 = \frac{V}{VC_2 + q}, \text{ minutos}$$

$$K_1 = \frac{q}{VC_2 + q}, \text{ sin dimensiones}$$

$$K_2 = \frac{VC_1}{VC_2 + q}, \frac{\text{lb mol de } A}{\text{pies}^3 \cdot ^\circ\text{R}}$$

$$\tau_2 = \frac{V\rho C_v}{V(\Delta H_r)C_1 + UA + q\rho C_p}, \text{ minutos}$$

$$K_3 = \frac{q\rho C_p}{V(\Delta H_r)C_1 + UA + q\rho C_p}, \text{ sin dimensiones}$$

$$K_4 = \frac{V(\Delta H_r)C_2}{V(\Delta H_r)C_1 + UA + q\rho C_p}, \frac{^\circ\text{R} \cdot \text{pies}^3}{\text{lb mol de } A}$$

Aplicando la transformada de Laplace, a las ecuaciones (3-70) y (3-71), se tiene:

$$C_A(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} C_{Ai}(s) - \frac{K_2}{\tau_1 s + 1} T(s) \quad (3-72)$$

$$T(s) = \frac{K_3}{\tau_2 s + 1} T_i(s) - \frac{K_4}{\tau_2 s + 1} C_A(s) \quad (3-73)$$

En la figura (3-21) se ilustra la representación en bloque de este proceso.

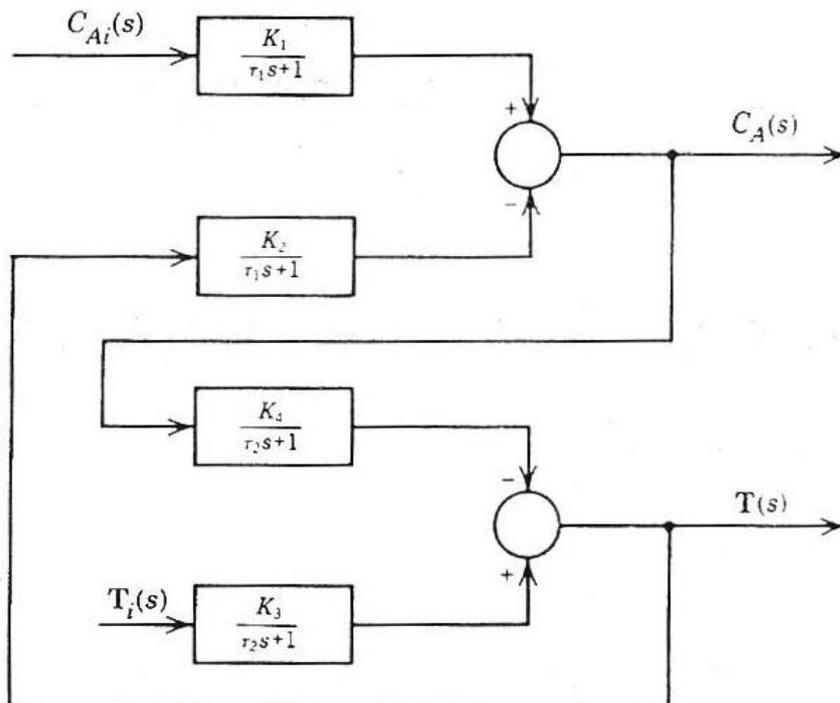


Figura 3-21. Diagrama de bloques de un reactor químico.

En este proceso de reacción se tiene una nueva característica que no se vio antes. Se trata del primer ejemplo en que existe interacción entre dos variables; se dice que estas dos variables, la concentración de salida, $C_A(t)$ y la temperatura de salida $T(t)$, están acopladas y cualquier perturbación que afecte a una, afecta a la otra. Por ejemplo, si cambia la temperatura de entrada de los reactivos, esto afecta a la temperatura de salida, a través de la función de transferencia:

$$\frac{T(s)}{T_i(s)} = \frac{K_3}{\tau_2 s + 1}$$

Pero si la temperatura de salida cambia, esto afecta también a la concentración de salida, a través de la función de transferencia:

$$\frac{C_A(s)}{T(s)} = \frac{K_2}{\tau_1 s + 1}$$

Los procesos en que ocurre esto se conocen como interactivos, y el control de ambas variables representa un desafío muy interesante para el ingeniero de proceso o control.

Se debe notar que las ganancias y la constante de tiempo dependen del punto de linealización, y en consecuencia no son constantes sobre todo el rango, debido a la característica no lineal del proceso.

EJEMPLO 5

ANTITRANSFORMADA DE UNA FUNCIÓN DE PRIMER ORDEN PARA ENTRADA RAMPA

La ecuación diferencial de un sistema de primer orden es la siguiente:

$$a_1 \cdot \frac{dc(t)}{dt} + a_0 \cdot c(t) = b \cdot m(t)$$

Si $a_0 \neq 0$ y considerando:

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} \qquad k = \frac{b}{a_0}$$

$$\tau \cdot \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = k \cdot m(t)$$

Aplicando Transformada de Laplace:

$$\tau [s \cdot C(s) - c(0)] + C(s) = k \cdot M(s)$$

Despejando:

$$M(s) = \frac{C(s) \cdot (\tau s + 1)}{k}$$

Por lo tanto la función de transferencia resulta:

$$G_p(s) = \frac{C(s)}{M(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}$$

Teniendo en cuenta que la entrada es rampa, resulta:

$$m(t) = n \cdot t \longrightarrow M(s) = \frac{n}{s^2}$$

Entonces:

$$C(s) = G_p(s) \cdot M(s)$$

$$C(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \cdot \frac{n}{s^2} = \frac{k/\tau}{s + \frac{1}{\tau}} \cdot \frac{n}{s^2} = \frac{A}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2}$$

Si multiplicamos ambos lados por $\left(s + \frac{1}{\tau}\right)$

$$\frac{k}{\tau} \cdot \frac{n}{s^2} = A + \frac{B}{s} \cdot \left(s + \frac{1}{\tau}\right) + \frac{C}{s^2} \cdot \left(s + \frac{1}{\tau}\right)$$

◆ Si $s = 1/\tau$

$$A = \frac{k}{\tau} \cdot n \cdot (\tau^2) = k \cdot n \cdot \tau$$

Si $C(s) = \frac{A}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2}$ lo multiplico por s^2 :

$$\frac{s^2 \cdot A}{s + \frac{1}{\tau}} + B \cdot s + C = \frac{k/\tau}{s + \frac{1}{\tau}} \cdot \frac{n}{s^2} \cdot s^2 = \frac{k/\tau}{s + \frac{1}{\tau}} \cdot n$$

◆ Si $s=0$

$$C = \frac{k/\tau}{0 + \frac{1}{\tau}} \cdot n = k \cdot n$$

Finalmente para calcular B, hacemos lo siguiente:

$$B = \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{d}{ds} \left[(s-0)^2 \cdot \frac{kn}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s^2} \right] = kn \frac{d(\tau s + 1)^{-1}}{ds} = kn \cdot [-1 \cdot (\tau s + 1)^{-2}] \tau = -kn\tau \frac{1}{(\tau s + 1)^2}$$

◆ Si $s=0$

$$B = -kn\tau$$

Entonces llegamos a ala expresión :

$$C(s) = \frac{A}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} = \frac{kn\tau}{s + \frac{1}{\tau}} - \frac{kn\tau}{s} + \frac{kn}{s^2}$$

Siendo su transformada: $c(t) = kn\tau.e^{\frac{-t}{\tau}} - kn\tau + knt$

EJEMPLO 6

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Sistemas conectados en serie (no interactivos).

Son aquellos donde un sistema de primer orden influye sobre un segundo pero éste no puede influir sobre el primero.

Si se calcula la función de transferencia global del diagrama de bloques de la Figura 1, se obtiene:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{K_1K_2}{(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)}$$

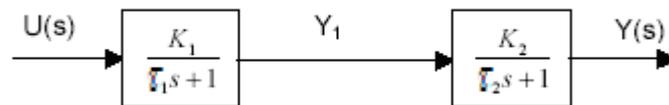


Figura 1: Diagrama en bloques de sistemas en serie no - interactivos

Que tiene la forma de la ecuación (6). Identificando términos se obtiene:

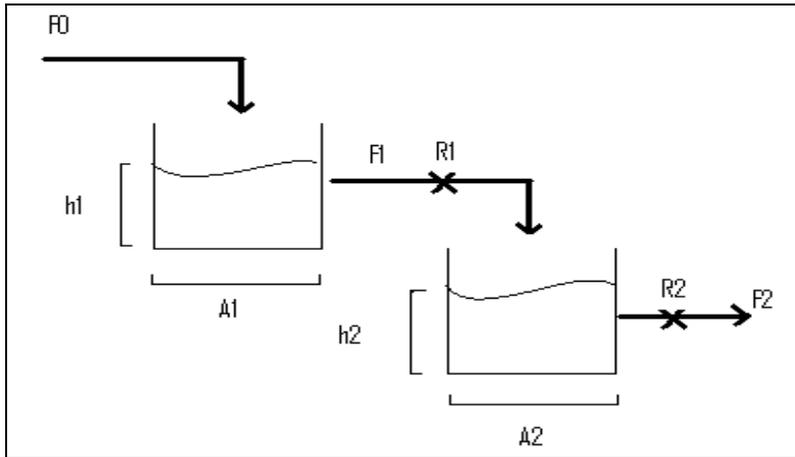
$$G(s) = \frac{K_1K_2}{\tau_1\tau_2s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1} = \frac{K(sc+1)}{\tau^2s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (7)$$

por lo tanto:

$$K=K_1K_2 ; \tau^2 = \tau_1 \tau_2 ; \xi = (\tau_1 + \tau_2) / 2 \sqrt{\tau_1 \tau_2} ; c = 0$$

Ejemplo:

Tanques conectados en serie en forma no interactiva:



$$A_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} = F_0 - F_1 = F_0 - \frac{h_1}{R_1}$$

$$A_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} = F_1 - F_2 = \frac{h_1}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}$$

Forma Estándar:

$$A_1 \cdot R_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{h_1 \cdot R_1}{R_1} = F_0 \cdot R_1$$

$$R_1 \cdot A_1 = \tau_1$$

$$R_1 = k_1$$

$$A_2 \cdot R_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{h_2 \cdot R_2}{R_2} = \frac{h_1 \cdot R_2}{R_1}$$

$$R_2 \cdot A_2 = \tau_2$$

$$R_2 = k_2$$

Reemplazando:

$$\tau_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} + h_1 = F_0 \cdot k_1$$

$$\tau_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + h_2 = \frac{h_1 \cdot k_2}{k_1}$$

Aplicando Transformada de Laplace:

$$1) \ell \left| \tau_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} + h_1 \right| = \ell |F_0 \cdot k_1|$$

$$2) \ell \left| \tau_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + h_2 \right| = \ell \left| \frac{h_1 \cdot k_2}{k_1} \right|$$

$$1) \tau_1 \cdot h_1'(0) + \tau_1 \cdot s \cdot h_1(s) + \tau_1 \cdot h_1(0) + h_1(s) = k_1 \cdot F_0(s)$$

$$\boxed{\tau_1 \cdot s \cdot h_1(s) + h_1(s) = k_1 \cdot F_0(s)}$$

$$2) \tau_2 \cdot h_2'(0) + \tau_2 \cdot s \cdot h_2(s) + \tau_2 \cdot h_2(0) + h_2(s) = \frac{k_2}{k_1} \cdot h_1(s)$$

$$\boxed{\tau_2 \cdot s \cdot h_2(s) + h_2(s) = \frac{k_2}{k_1} \cdot h_1(s)}$$

Función de Transferencia:

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

$$G_1(s) = \frac{h_1(s)}{F_0(s)} = \frac{k_1}{\tau_1 \cdot s + 1} \qquad G_2(s) = \frac{h_2(s)}{h_1(s)} = \frac{\frac{k_2}{k_1}}{\tau_2 \cdot s + 1}$$

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{h_2(s)}{F_0(s)} = \frac{k_1}{\tau_1 \cdot s + 1} \cdot \frac{\frac{k_2}{k_1}}{\tau_2 \cdot s + 1} = \frac{k_2}{(\tau_1 \cdot s + 1)(\tau_2 \cdot s + 1)}$$

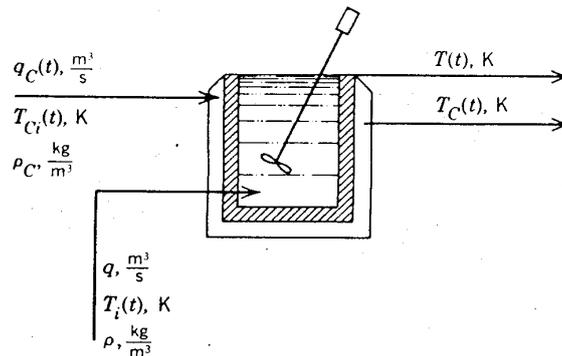
$$G(s) = \frac{k_2}{(\tau_1 \cdot s + 1)(\tau_2 \cdot s + 1)} = \frac{k_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1}$$

Viendo la última ecuación y comparándola con la ecuación general de los sistemas de Segundo Orden, podemos ver que la Ecuación de Transferencia del ejemplo pertenece a este caso.

EJEMPLO 7

PROCESO TÉRMICO

Objetivo: enfriar un fluido caliente que se procesa



Se considera que:

- *Capacidades caloríficas y densidad no cambia con la temperatura
- *Nivel y área de transferencia de calor en el tanque son constantes
- *Tanque bien aislado
- *Se desprecia la dinámica de las paredes del tanque

Balance de energía de estado dinámico para el fluido que se procesa:

$$qpC_p T_i(t) - UA[T(t) - T_c(t)] - qpC_p T(t) = V\rho C_V \frac{dT(t)}{dt} \quad (1)$$

donde:

- U = coeficiente global de transferencia de calor, se supone constante, J/m²-K-s
- A = área de transferencia de calor, m²
- V = volumen del tanque, m³
- C_p, C_V = capacidades caloríficas del fluido que se procesa, J/kg-K

Balance de energía de estado dinámico en la camisa de enfriamiento:

$$q_c(t)\rho_c C_{p_c} T_c(t) + UA[T(t) - T_c(t)] - q_c(t)\rho_c C_{p_c} T_c(t) = V_c \rho_c C_{v_c} \frac{dT_c(t)}{dt} \quad (2)$$

donde:

$$C_{p_c}, C_{v_c} = \text{capacidades caloríficas del agua de enfriamiento, J/kg-K}$$

$$V_c = \text{volumen de la camisa de enfriamiento, m}^3$$

Obtenemos las ecuaciones dinámicas:

$$q\rho C_p T_i(t) - UA[T(t) - T_c(t)] - q\rho C_p T(t) = V\rho C_v \frac{dT(t)}{dt} \quad (3)$$

y

$$C_1 Q_c(t) + C_2 T_{c_i}(t) + UA [T(t) - T_c(t)] - C_3 Q_c(t) - C_2 T_c(t) = V_c \rho_c C_{v_c} \frac{dT_c(t)}{dt} \quad (4)$$

donde: las variables de desviación son:

$$C_1 = \rho_c C_{p_c} \bar{T}_c, \quad \text{Jm}^3$$

$$C_2 = \bar{q}_c \rho_c C_{p_c}, \quad \text{J/s - K}$$

$$C_3 = \rho_c C_{p_c} \bar{T}_c, \quad \text{Jm}^3$$

$$T_i(t) = T_i(t) - \bar{T}_i$$

$$T(t) = T(t) - \bar{T}$$

$$T_c(t) = T_c(t) - \bar{T}_c$$

$$\hat{Q}_c(t) = q_c(t) - \bar{q}_c$$

$$T_{c_i}(t) = T_{c_i}(t) - \bar{T}_{c_i}$$

Ordenando la ec. (3) y aplicando transformada de Laplace se obtiene:

$$T(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1} [K_1 T_i(s) + K_2 T_c(s)] \quad (5)$$

donde:

$$\tau_1 = \frac{V\rho C_v}{UA + q\rho C_p}, \quad \text{segundos}$$

$$K_1 = \frac{q\rho C_p}{UA + q\rho C_p}, \quad \text{sin dimensiones}$$

$$K_2 = \frac{UA}{UA + q\rho C_p}, \quad \text{sin dimensiones}$$

De manera semejante de la ec. (4) se obtiene:

$$T_c(s) = \frac{1}{\tau_2 s + 1} [K_3 T_{c_i}(s) - K_4 Q_c(s) + K_5 T(s)] \quad (6)$$

donde:

$$\tau_2 = \frac{V_C \rho_C C_{V_C}}{C_2 + UA}, \quad \text{segundos} \qquad K_4 = \frac{C_3 - C_1}{C_2 + UA}, \quad \text{K/m}^3\text{-s}$$

$$K_3 = \frac{C_2}{C_2 + UA}, \quad \text{sin dimensiones}$$

$$K_5 = \frac{UA}{C_2 + UA}, \quad \text{sin dimensiones}$$

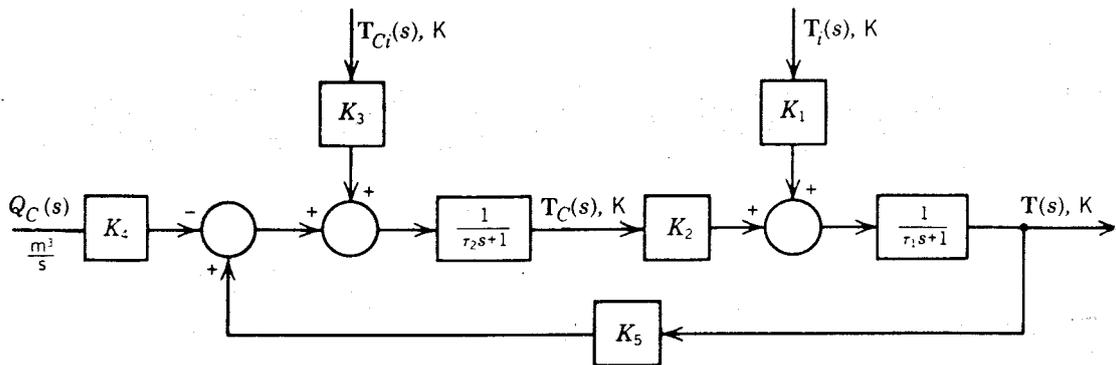
Reemplazando la (6) en la (5) se obtienen las siguientes funciones de transferencia:

$$\frac{T(s)}{T_i(s)} = \left(\frac{K_1}{1 - K_2 K_5} \right) \left[\frac{\tau_2 s + 1}{\left(\frac{\tau_1 \tau_2}{1 - K_2 K_5} \right) s^2 + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{1 - K_2 K_5} \right) s + 1} \right]$$

$$\frac{T(s)}{T_{C_i}(s)} = \left(\frac{K_2 K_3}{1 - K_2 K_5} \right) \left[\frac{1}{\left(\frac{\tau_1 \tau_2}{1 - K_2 K_5} \right) s^2 + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{1 - K_2 K_5} \right) s + 1} \right]$$

$$\frac{T(s)}{Q_C(s)} = \left(\frac{-K_4 K_2}{1 - K_2 K_5} \right) \left[\frac{1}{\left(\frac{\tau_1 \tau_2}{1 - K_2 K_5} \right) s^2 + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{1 - K_2 K_5} \right) s + 1} \right]$$

Diagrama de bloques



EJEMPLO 8

RESPUESTA DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN A UNA FUNCION ESCALON

Una función de transferencia de segundo orden se puede escribir de la forma siguiente:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K \cdot (cs + 1)}{\tau^2 \cdot s^2 + 2\xi \cdot \tau \cdot s + 1}$$

Donde:

G(s): Es función de transferencia del sistema.

K: Ganancia estática.

ξ : Factor de amortiguamiento.

τ : Recíproco de la frecuencia umbral de oscilación (periodo natural).

c: Inverso aditivo del valor recíproco del cero de la función de transferencia (igual a cero).

La respuesta de la función de transferencia de segundo orden a un cambio escalón de magnitud genérica E en la función de entrada, $U(s) = E/s$, se obtiene de la manera siguiente:

$$Y(s) = \frac{K \cdot E}{s \cdot (\tau^2 \cdot s^2 + 2\xi \cdot \tau \cdot s + 1)}$$

La función anterior se puede expresar como:

$$Y(s) = \frac{K \cdot E \cdot r_1 \cdot r_2}{s \cdot (s - r_1) \cdot (s - r_2)} \quad (1)$$

Donde r_1 y r_2 son las raíces del polinomio superior tal que se cumple:

$$(s - r_1) \cdot (s - r_2) = \frac{(\tau^2 \cdot s^2 + 2\xi \cdot \tau \cdot s + 1)}{\tau^2}$$

Las raíces son iguales a:

$$r_1 = \frac{-\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \quad \text{y por} \quad r_2 = \frac{-\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \quad \text{lo que:} \quad r_1 \cdot r_2 = 1/\tau^2$$

De estas ecuaciones puede verse de antemano que la respuesta en el tiempo dependerá del valor que tome el factor de amortiguamiento y la constante τ .

Para el caso en que las raíces son reales y diferentes, es decir $\xi > 1$:

La ecuación (1) responde a la forma:

$$Y(s) = \frac{a \cdot b}{s \cdot (s + a) \cdot (s + b)}$$

La antitransformada de Laplace para este caso es:

$$y(t) = 1 - \frac{b}{b - a} \cdot e^{-a \cdot t} + \frac{a}{b - a} \cdot e^{-b \cdot t}$$

Entonces:

$$y(t) = 1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2} \cdot e^{r_1 \cdot t} - \frac{r_1}{r_1 - r_2} \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

Sustituyendo:

$$y(t) = K \cdot E + \frac{K \cdot E \cdot r_2}{r_1 - r_2} \cdot e^{r_1 \cdot t} - \frac{K \cdot E \cdot r_1}{r_1 - r_2} \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

Teniendo en cuenta que:

$$r_1 - r_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}$$

Reemplazando en (2):

$$y(t) = K \cdot E + \frac{K \cdot E \cdot \tau}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left[\left(\frac{-\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \right) \cdot e^{\left(\frac{-\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \right) \cdot t} - \left(\frac{-\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \right) \cdot e^{\left(\frac{-\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \right) \cdot t} \right]$$

$$y(t) = K \cdot E + \frac{K \cdot E \cdot \tau}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left[\left(\frac{-\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \right) \cdot e^{\frac{-\xi}{\tau} \cdot t} \cdot e^{\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \cdot t} - \left(\frac{-\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \right) \cdot e^{\frac{-\xi}{\tau} \cdot t} \cdot e^{-\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \cdot t} \right]$$

$$y(t) = K \cdot E + \frac{K \cdot E \cdot \tau}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{\frac{-\xi}{\tau} \cdot t} \cdot \left[\left(\frac{-\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \right) \cdot e^{\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \cdot t} - \left(\frac{-\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \right) \cdot e^{-\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \cdot t} \right]$$

$$y(t) = K \cdot E + K \cdot E \cdot 0.5 \cdot e^{\frac{-\xi}{\tau} \cdot t} \cdot \left[\left(\frac{-\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} - 1 \right) \cdot e^{\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \cdot t} - \left(\frac{-\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + 1 \right) \cdot e^{-\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \cdot t} \right]$$

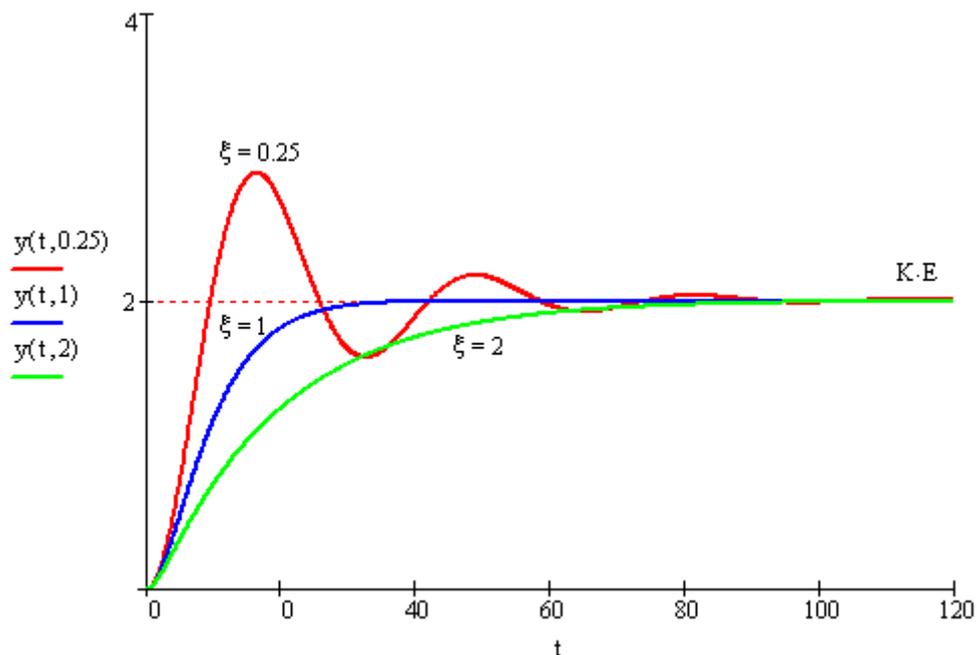
Multiplicando y dividiendo por -1 el segundo miembro, se obtiene:

$$y(t) = K \cdot E \cdot \left[1 - 0.5 \cdot e^{\frac{-\xi}{\tau} \cdot t} \cdot \left[\left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \cdot e^{\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \cdot t} + \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \cdot e^{-\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \cdot t} \right] \right] \quad (3)$$

Se analizan a continuación distintos gráficos, para los cuales se ha mantenido un único parámetro como variable, dejando los demás constantes.

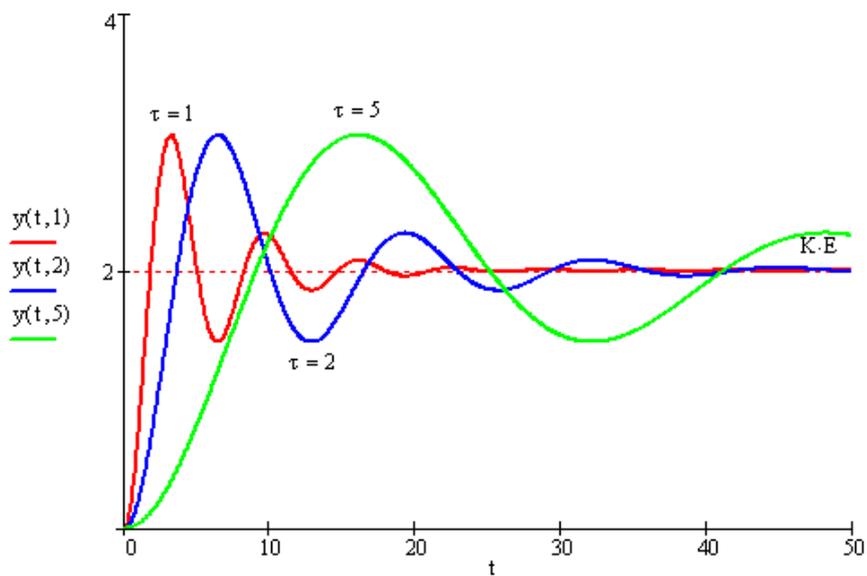
CASO 1 - ξ variable (K.E = 2; τ = 5)

Se presentan tres gráficas, donde el factor de amortiguamiento toma los siguientes valores: 0,25, 1 y 2.



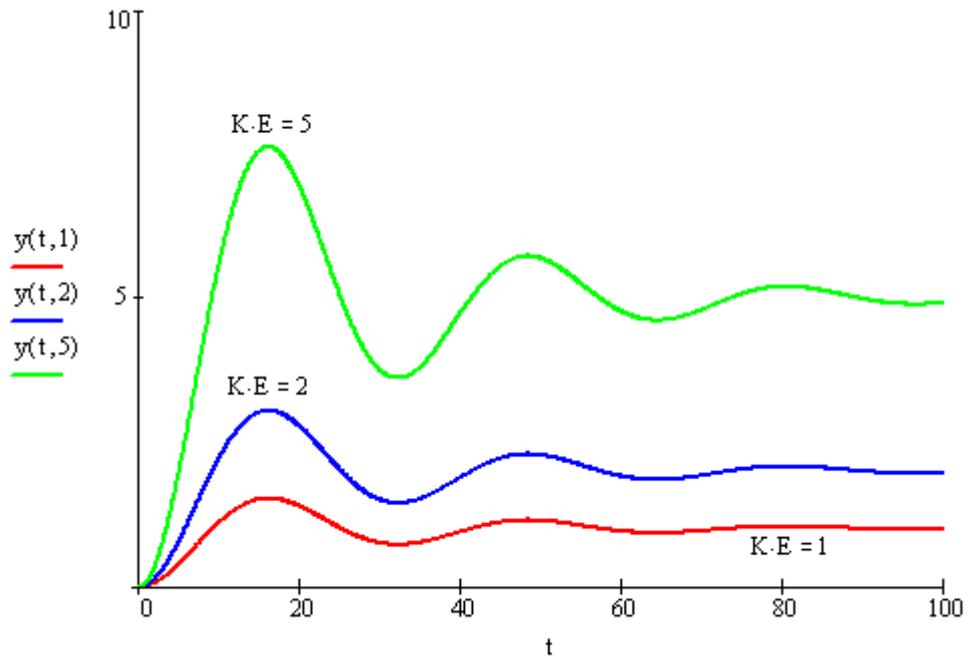
CASO 2 - τ variable (K.E = 2; $\xi = 0,2$)

Se presentan tres gráficas, donde el factor de amortiguamiento toma los siguientes valores: 1, 2 y 5.



CASO 3 - K o E variable ($\tau = 5$; $\xi = 0,2$)

Se presentan tres gráficas, donde el factor de amortiguamiento toma los siguientes valores: 1, 2 y 5.



A modo de aclaración es importante destacar que la expresión (3) no se puede resolver para un factor de amortiguamiento igual a 1, por lo que la bibliografía consultada adopta la siguiente fórmula:

$$y(t) = K \cdot E \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$