



3-1. Función de transferencia en el dominio de la frecuencia.

En capítulos anteriores se consideró la salida del sistema sujetos a una entrada impulso, escalón o rampa. Este capítulo amplía dicha consideración al caso cuando la entrada es senoidal. Mientras que en muchos sistemas de control no es posible encontrar normalmente una entrada senoidal, ésta es útil como entrada de prueba debido a que la forma en que el sistema responde a ella es una fuente de información muy útil para auxiliar en el análisis y diseño de sistemas.

El término *respuesta en frecuencia* se define como la respuesta en estado estable de un sistema a una entrada senoidal; la respuesta se monitorea sobre un intervalo de frecuencias. La respuesta en estado estable es la que permanece después de que todos los transitorios han decaído a cero. Existen varias técnicas para analizar los datos de la respuesta en frecuencia. En este capítulo se estudiarán dos de ellas: la de Bode y la de Nyquist.

Si a un sistema lineal se aplica una entrada senoidal, la salida es también una senoidal y de la misma frecuencia. La salida puede diferir de la entrada en amplitud y fase. El cociente de la amplitud de la salida entre la amplitud de la entrada se conoce como ganancia (también llamada *magnitud* o *razón de amplitud*). El corrimiento de fase de la senoidal de salida en relación con aquel de la senoidal de entrada se denomina *fase*. La variación de la magnitud y la fase con la frecuencia se denomina *respuesta en frecuencia* del sistema.

La función de transferencia $G(s)$ de un sistema en general se puede representar mediante

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)}$$

donde K es la ganancia
 z los ceros del sistema
 p los polos; habiendo m ceros y n polos

De este modo, puesto que $G(s)$ es el cociente entre la salida y la entrada, es decir $G(s) = X(s) / U(s)$, entonces la salida está dada por

$$Y(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)} U(s) \quad (\text{ec. 1})$$

De esta manera, si se considera una entrada senoidal

$$u(t) = a \sin \omega t$$

Donde a es la amplitud de la entrada y ω la frecuencia angular en rad/s, entonces

$$U(s) = \frac{a \omega}{s^2 + \omega^2}$$



Instrumentación y Control Automático

UNIDAD 3

Y la ecuación 1 se convierte en

$$Y(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)...(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)...(s - p_n)} \frac{a \omega}{s^2 + \omega^2}$$

Esta ecuación se puede solucionar usando fracciones parciales y obtener una relación de la forma

$Y(s) =$ términos transitorios + términos en estado estable

Si
$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{a \omega}{(s^2 + \omega^2)}$$

Podemos decir que:

$$Y(s) = \frac{A}{(s + j\omega)} + \frac{B}{(s - j\omega)} + (\text{Términos para los polos de } G(s))$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -j\omega} \left[\frac{(s + j\omega)a\omega G(s)}{(s^2 + \omega^2)} \right] = \frac{G(-j\omega)a\omega}{-2j\omega}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow j\omega} \left[\frac{(s - j\omega)a\omega G(s)}{(s^2 + \omega^2)} \right] = \frac{G(j\omega)a\omega}{2j\omega}$$

Por lo tanto:
$$Y(s) = \frac{a|G(j\omega)|}{2j} \left[\frac{-e^{-j\phi}}{s + j\omega} + \frac{e^{j\phi}}{s - j\omega} \right] + (\text{Términos de } G(s))$$

Al antitransformar, podemos encontrar $y(t)$:

$$y(t) = \frac{a|G(j\omega)|}{2j} \left[-e^{-j\phi} \cdot e^{-j\omega t} + e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t} \right] + \text{Términos transitorios}$$

$$y(t) = a|G(j\omega)| \left[\frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \right] + \text{Términos transitorios}$$

Los términos transitorios desaparecen con el tiempo. De esta manera si solo se tiene interés en el estado estable. La solución que se obtiene es

$$Y(t) = a |G(j\omega)| \text{ sen}(\omega t + \phi)$$

La salida en estado estable es senoidal con la misma frecuencia angular ω que la entrada. $G(j\omega)$ es la magnitud de la función de transferencia $G(s)$ cuando se reemplaza s por $j\omega$. El nombre que recibe $G(j\omega)$ es **función de transferencia en frecuencia**. $G(j\omega)$ se puede encontrar al reemplazar todos los valores de s en $G(s)$ por $j\omega$ y, así, reordenar la expresión para obtenerla en la forma que permite separar las partes real e imaginaria y, por lo tanto, identificar la magnitud y la fase.



Instrumentación y Control Automático

UNIDAD 3

Respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden.

Un sistema de primer orden tiene una función de transferencia de la forma

$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

Donde es la constante de tiempo. La función de respuesta en frecuencia, $G(j\omega)$, se puede obtener reemplazando s por $j\omega$. Por lo tanto

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}$$

Al multiplicar el numerador y el denominador de la ecuación por $1 - j\omega\tau$ (complejo conjugado del denominador) se obtiene

$$G(j\omega) = \frac{K(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{K}{1 + \omega^2\tau^2} - \frac{jK\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Esta ecuación proporciona la función de transferencia en frecuencia como un número complejo en la forma $x + jy$.

$$\text{Re} = \frac{K}{1 + \omega^2\tau^2} \quad \text{Im} = \frac{-K\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Luego la ganancia será:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\text{Re} = \frac{K}{1 + \omega^2\tau^2} \quad \text{Im} = \frac{-K\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Luego la ganancia será: $n(\omega\tau)$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

y el desfase:

$$\tan \phi = \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \quad \phi = -\arctan(\omega\tau)$$



Instrumentación y Control Automático

UNIDAD 3

Observemos que en sistema de primer orden la ganancia es inversamente proporcional a la frecuencia de la señal de entrada. Esto significa que para valores crecientes de la frecuencia de la señal de entrada, la ganancia disminuye y tiende a cero para una frecuencia que tiende a infinito. Es así que, para determinadas frecuencias de la excitación de entrada no tendremos salida. Quiere decir entonces que analizando el comportamiento de la función de transferencia de la señal de un elemento dinámico para todo el espectro de frecuencias de la señal de entrada podremos describirlo íntegramente.

Esta descripción se realiza gráficamente y se utilizan normalmente dos formas gráficas, una polar denominada **diagrama de Nyquist** y otra semilogarítmica denominada **diagrama de Bode**.

3-2. Diagrama de Nyquist.

El diagrama de Nyquist es una gráfica en el plano complejo de la función de transferencia en frecuencia $G(j\omega)$ para todos los valores de frecuencia ω de la señal de entrada entre cero e infinito, lo que sería equivalente a decir que el diagrama de Nyquist es una traza polar de la respuesta en frecuencia del sistema. El extremo del vector $G(j\omega)$ genera en el plano complejo el denominado **lugar geométrico de**

Nyquist o lugar geométrico vectorial.

Debido a que en general las formas que representan los diagramas son muy complejas, resulta dificultosa su representación analítica. Se recurre en general al trazado gráfico del vector $G(j\omega)$ para distintos valores de ω .

Al trazar diagramas de Nyquist existen cuatro puntos clave que se deben representar:

- el inicio de la traza, donde $\omega=0$
- el fin de la traza, donde $\omega=\infty$
- donde la traza cruza al eje real, es decir, $\phi=0$ o ± 180
- y donde esta cruza al eje imaginario, o sea, $\phi=\pm 90$

Por ejemplo para una capacitancia no autorregulada cuya función de transferencia en frecuencia es $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ el diagrama de Nyquist coincide con el eje imaginario, tal como se muestra en la figura 3.1. La flecha en el diagrama indica el sentido creciente de la frecuencia

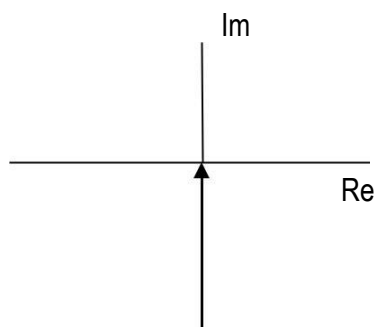


FIGURA 3-1



Instrumentación y Control Automático

UNIDAD 3

Para una capacitancia autorregulada (sistema de primer orden) la función de transferencia en frecuencia es

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega\tau} = \frac{K(1-j\omega\tau)}{1+\omega^2\tau^2}$$

Así, debido a que la magnitud $|G(j\omega)|$ es la raíz cuadrada de la parte real al cuadrado más la parte imaginaria al cuadrado entonces,

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

Y la fase es $\phi = -\arctan(\omega\tau)$

Cuando $\omega = 0$, entonces $|G(j\omega)| = 1$ y $\phi = 0$

Cuando ω tiende a infinito, $|G(j\omega)|$ tiende a 0 y ϕ a -90

También se pueden calcular otros puntos para ayudar a dibujar la traza de Nyquist.

Así, por ejemplo, cuando $\omega = 1/\tau$, entonces $|G(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$ y $\phi = -45$. La figura 3.2 muestra la traza de Nyquist, la cual es un semicírculo.

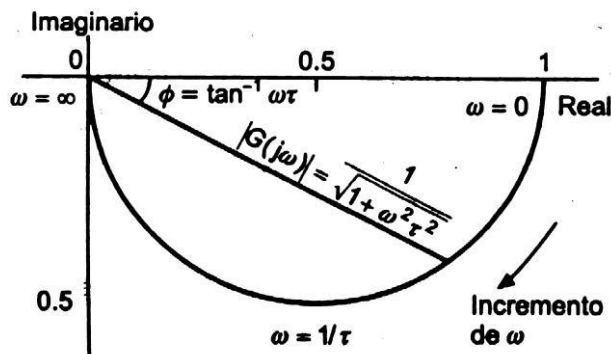


FIGURA 3-2

Considere ahora una función de transferencia correspondiente a un sistema con dos capacitancias autorreguladas (también denominado retardo doble).

$$G(s) = \frac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$$

La función de transferencia en frecuencia será

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}$$

Y normalizando



Instrumentación y Control Automático

UNIDAD 3

$$G(j\omega) = K \frac{(1 - j\omega\tau_1)(1 - j\omega\tau_2)}{[1 + (\omega\tau_1)^2][1 + (\omega\tau_2)^2]}$$

Operando

$$G(j\omega) = K \frac{1 - \omega^2\tau_1\tau_2 - j(\omega\tau_1 + \omega\tau_2)}{[1 + (\omega\tau_1)^2][1 + (\omega\tau_2)^2]}$$

De donde

$$\text{Re}[G(j\omega)] = K \frac{1 - \omega^2\tau_1\tau_2}{[1 + (\omega\tau_1)^2][1 + (\omega\tau_2)^2]}$$

$$\text{Im}[G(j\omega)] = -K \frac{(\omega\tau_1 + \omega\tau_2)}{[1 + (\omega\tau_1)^2][1 + (\omega\tau_2)^2]}$$

Expresiones que podemos utilizar para trazar el diagrama correspondiente al sistema, al ir dándole valores a ω como puede verse en la figura 3.3. Del mismo modo, que puede trazarse el diagrama en forma polar, calculando la ganancia y el desfase con los distintos valores de ω .

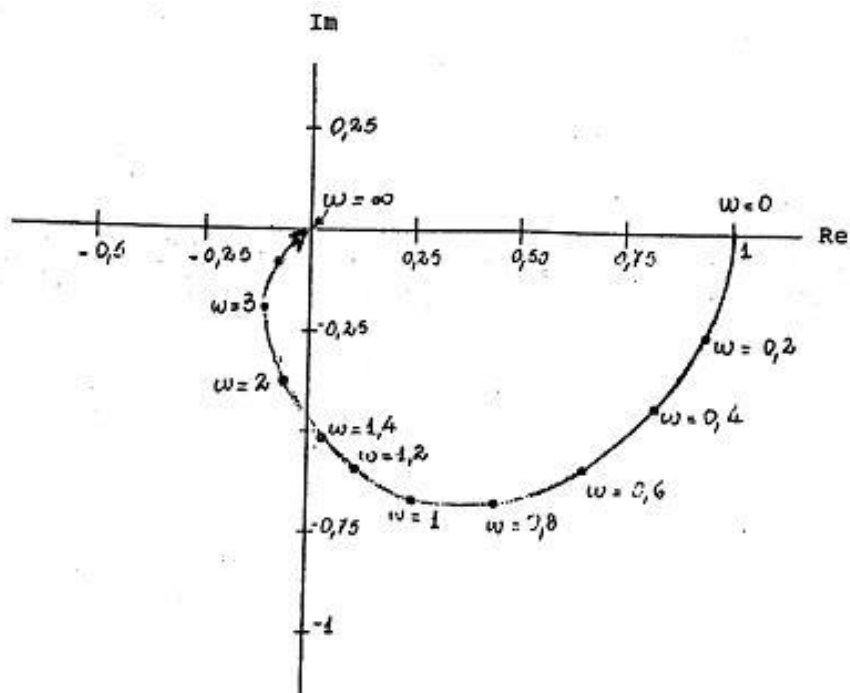


Fig 3-3-a

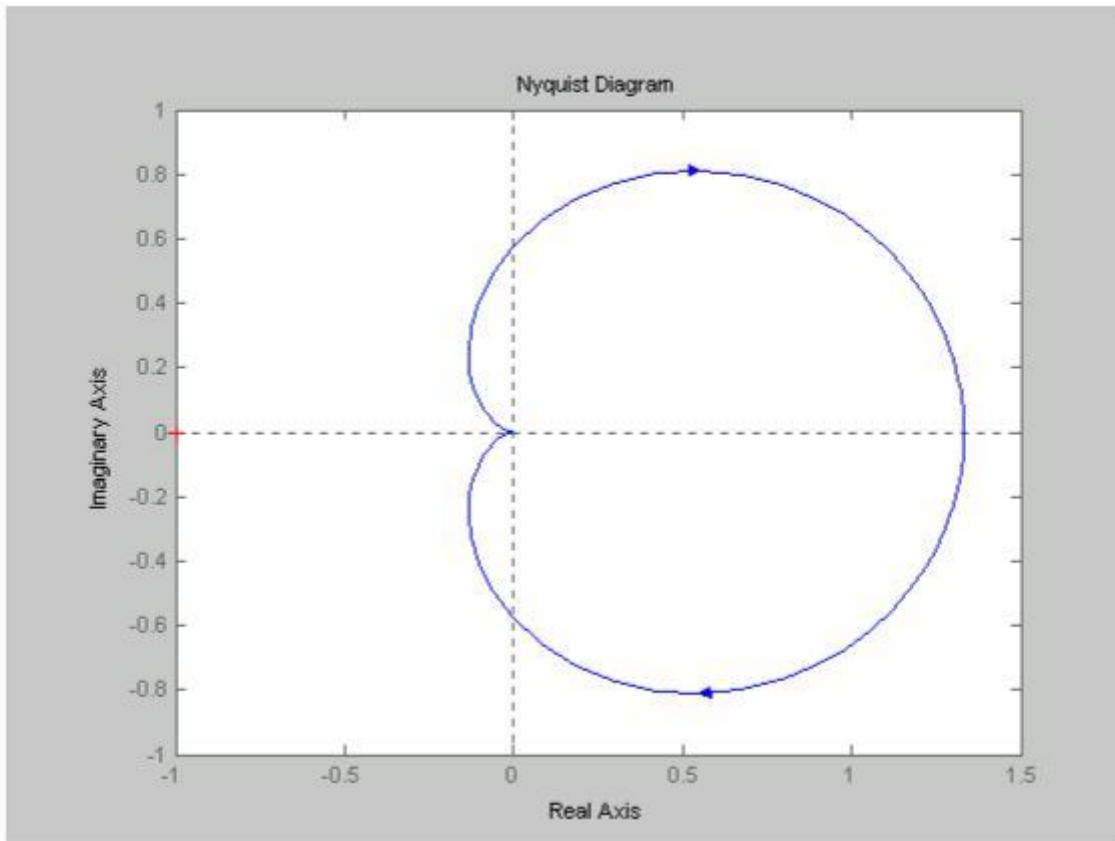


Figura 3 -3 -b

El diagrama de Nyquist es una herramienta invaluable para el desarrollo de los conceptos de estabilidad, útiles para el desarrollo de los sistemas de control, como veremos al estudiar el criterio de estabilidad de Nyquist. Sin embargo, las dificultades que tiene el trazado del diagrama de Nyquist para sistemas complejos y la presentación gráfica no lineal respecto a los valores de frecuencia, que juegan un importante papel en el diseño, hacen que en general recurramos a una forma alternativa de presentar la respuesta en frecuencia: el diagrama de Bode.

3-3. Diagrama de Bode.

El diagrama de Bode grafica la misma información que el diagrama de Nyquist, y consta de dos gráficas: una del ángulo de desfase ϕ graficada contra la frecuencia y otra del logaritmo de la ganancia graficada contra la frecuencia, ambas en escala logarítmica. La presentación logarítmica de la ganancia simplifica notablemente el procedimiento de graficación, puesto que permite utilizar el método de trazado a través de las asíntotas

La ganancia es expresada comúnmente en decibeles (dB).

Por ejemplo para un sistema de segundo orden, la fig 3-3-c nos muestra el diagrama de Bode:

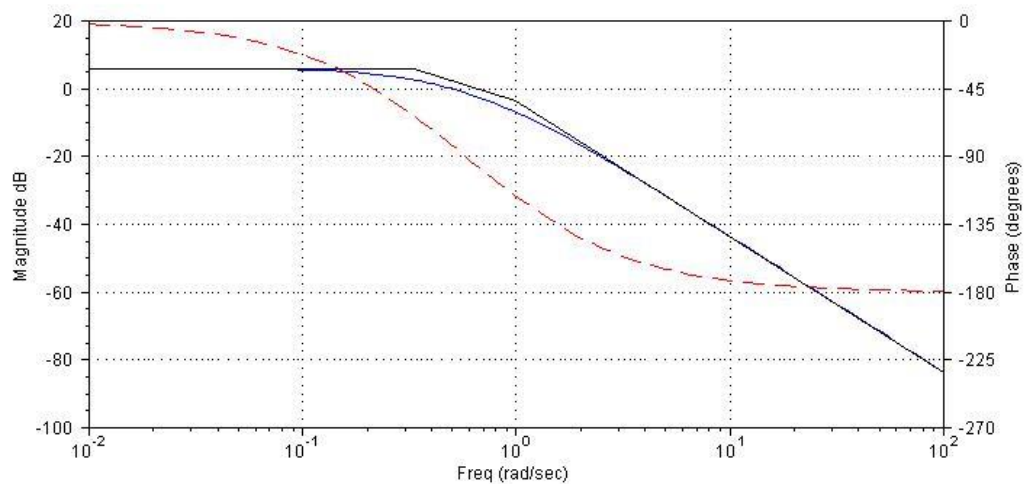


Fig. N° 3-3-c

La mayoría de las funciones de transferencia complejas de sistemas de proceso se forman como producto de componentes más simples, así $G(s)$ puede ser expresada de manera genérica como:

$$G(s) = K \frac{\prod (1 + \tau_j s) \prod [1 + 2\zeta_l \tau_l s + (\tau_l s)^2]}{s^N \prod (1 + \tau_i s) \prod [1 + 2\zeta_m \tau_m s + (\tau_m s)^2]} \quad (2)$$

En la que para todo k mayor que cero, las funciones de transferencia en frecuencia se forman con la combinación de los factores

$$(1 + j\Omega)^{\pm 1} \quad y \quad (1 + 2\zeta j\Omega + (j\Omega)^2)^{\pm 1} \quad (3)$$

Que están expresados en función de la frecuencia adimensional (normalizada) $\Omega = \omega\tau$ y de la relación de amortiguamiento ζ .

La figura 3.4 muestra los diagramas de bode de las expresiones anteriores (3) para el caso en el que el exponente toma el valor -1, es decir para factores en el denominador de la función de transferencia. La figura 3.4 muestra las gráficas de factores de primer orden y cuadráticos (para mayor información consultar Ogata pag. 500)

Instrumentación y Control Automático

UNIDAD 3

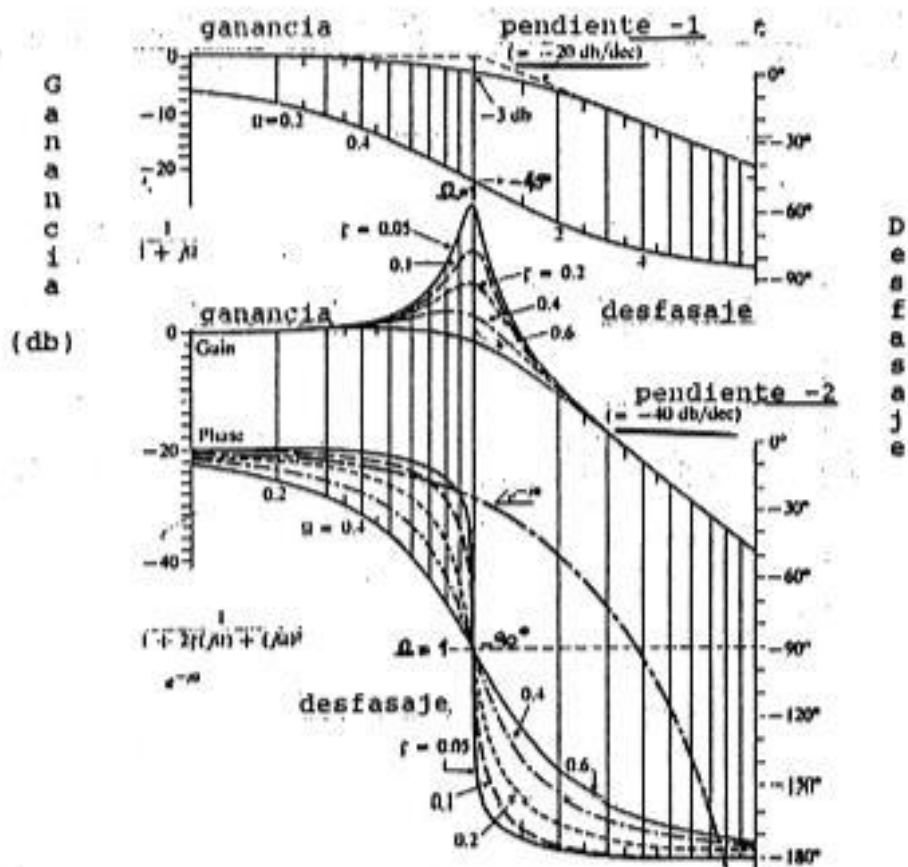


Figura 3-4

Para el exponente +1 de las expresiones, factores en el denominador de la función de transferencia, el diagrama de Bode es la imagen especular de las curvas de la figura 3.4, respecto de las líneas de 0 dB y 0°

La función de transferencia de la expresión 2, puede expresarse también como:

$$G(s) = \prod c_i(s) \quad (4)$$

Donde $c_i(s)$ son bloques formados por los factores (3)

El logaritmo de la ganancia y del desfase de la función de transferencia expresada según (ec. 4), son:

$$\log |G(j\omega)| = \log |G_1(j\omega)| + \log |G_2(j\omega)| + \log |G_3(j\omega)| + \dots \quad \phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots$$

Y el diagrama de Bode de la expresión (4) se reduce a graficar la suma de los diagramas de cada bloque $c_i(s)$.

Para cada bloque $c_i(s)$ se define una frecuencia de corte,



Instrumentación y Control Automático

UNIDAD 3

$$\omega_i = \frac{1}{\tau_i}$$

A la cual la frecuencia normalizada es $\Omega = 1$

Veamos los pasos prácticos a seguir para construir el diagrama de Bode de la función de transferencia

$$G(s) = \frac{1/2 * (1 + 0,5s)}{s * (1 + 0,8s + s^2)}$$

1) se determinan los bloques $c_i(s)$

$$C_1 = \frac{1}{2s} \quad C_2 = \frac{1}{(1 + 0,8s + s^2)} \quad C_3 = 1 + 0,5s$$

Y las frecuencias de corte correspondientes a cada uno, que son $\frac{1}{2}$, 1 y 2 correspondientemente. En general, la posición horizontal del diagrama está fijada por dichas frecuencias, las cuales se indican con flecha en la figura 3.5

i

Instrumentación y Control Automático

UNIDAD 3

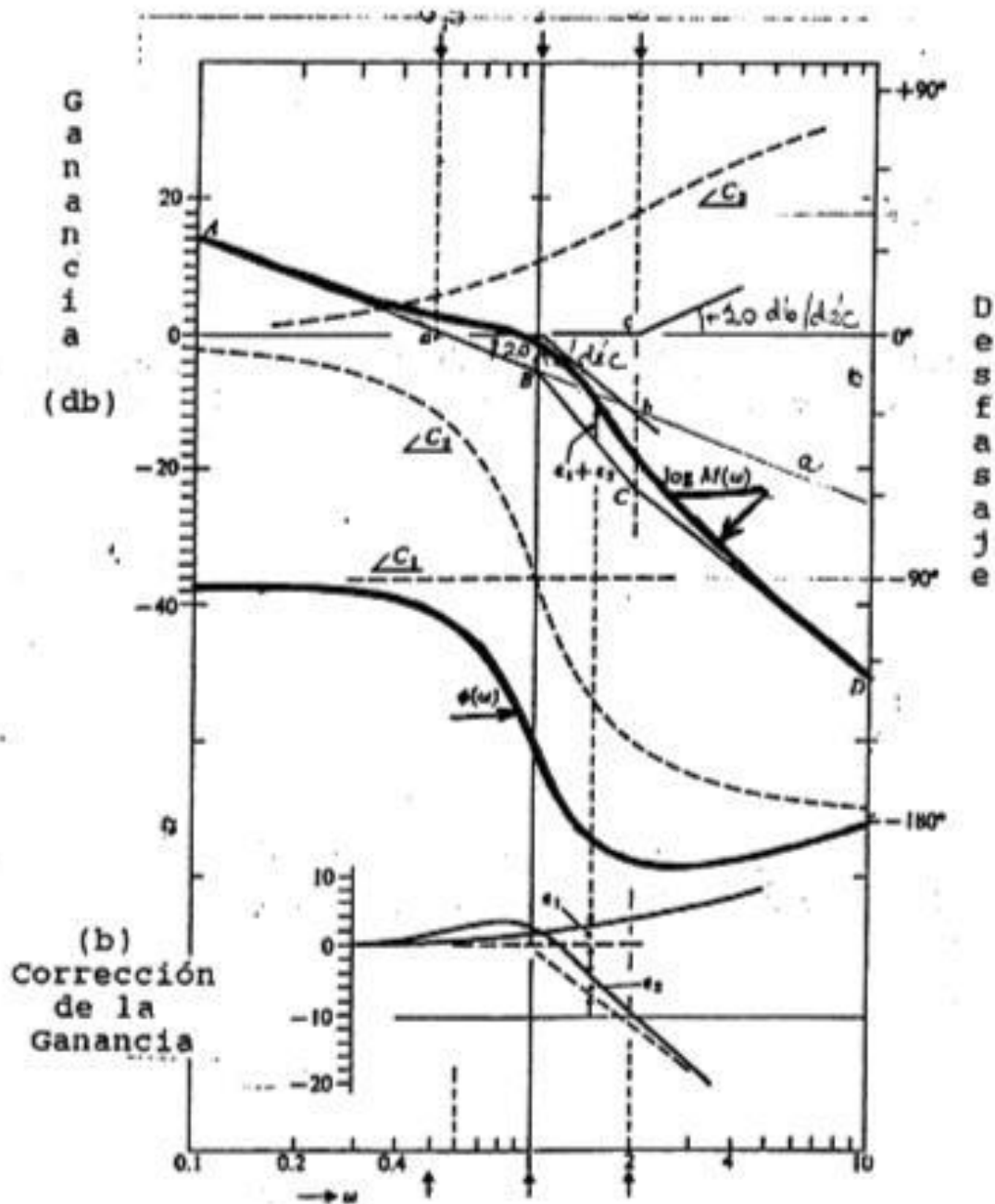


Figura 3 -5

2) se traza una gráfica aproximada mediante segmentos de rectas. Para C_1 es una recta de -20dB/década en frecuencia (pendiente -1) que corta al eje de 0 dB en la frecuencia $0,5$ (punto a de la figura 3.5). el diagrama de la ganancia C_2 se aproxima por dos asíntotas

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |C_2(j\omega)| = \frac{1}{\omega^2}$$



Instrumentación y Control Automático

UNIDAD 3

Que tiene una pendiente -2 para frecuencias mayores que uno (recta b en la figura) y

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |C_2(j\omega)| = 1$$

Recta que coincide con la línea de 0 dB (pendiente cero) para frecuencias menores que uno. Del mismo modo las asíntotas de C_3 son

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |C_3(j\omega)| = \omega$$

Recta con pendiente +1 para frecuencias mayores a dos (línea c en la figura) y

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |C_3(j\omega)| = 1$$

Asíntota que coincide con 0 dB para frecuencias mayores que dos.

Superponiendo todas las asíntotas se obtiene la gráfica ABCD, cuya pendiente cambia en B (de -1 a -3) y en C (de -3 a -2), puntos que coinciden con las frecuencias de corte determinadas en el primer paso.

3) Las correcciones de la gráfica de ganancia se realizan mediante las curvas de la figura 3.5 Las correspondientes a los bloques C_2 y C_3 se muestran al pie de la figura 3.5.

Obsérvese que para C_3 la curva se ha invertido pues es un factor en el numerador. Con las correcciones de ganancia indicadas como 1 y 2 se obtiene la gráfica de ganancia.

Es conveniente en general realizar las correcciones en la vecindad de las frecuencias de corte. Con dos o tres correcciones se puede obtener una gráfica bastante precisa.

4) La gráfica de desfase se realiza a través de las curvas de la figura 3.4 para C_2 y C_3 , adicionando -90° por C_1 , obteniéndose □

La curva de C_3 deberá tratarse en forma invertida.

Además del mostrado, existen diversos métodos para trazar el diagrama de Bode. En la figura 3.6 se presenta una tabla con los diagramas de Nyquist y Bode de diversas funciones de transferencia.



Función de Transferencia	Diagr. de Nyquist	Diagr. de Bode	
		M(s)	$\phi(s)$
Escalar 1			
Integrador <i>(ca. seitanos en la auto-cc.)</i> $\frac{1}{s}$			
Retardo simple <i>(Capac auto-cc.)</i> $\frac{1}{s+1}$			
Derivada con retardo $\frac{s}{s+1}$			
Integrador con retardo $\frac{1}{s(s+1)}$			
Acción PI $1 + \frac{1}{\tau s}$ 1			
Acción PID $1 + \frac{1}{\tau s} + \tau s$ 1 d			
Retardo doble $\frac{1}{(s+1)(\tau s+1)}$			
Oscilador amortiguado $\frac{1}{s^2+2\zeta s+1}$ $\zeta < 1/\sqrt{2}$			
Retraso de fase $\frac{\tau s+1}{s+1}$ $\tau < 1$			
Adelanto de fase $\frac{\tau s+1}{s+1}$ $\tau > 1$			

Figura 3 -6

3-4. Criterio de estabilidad de Nyquist.

La estabilidad de un sistema de control realimentado puede chequearse mediante el test de Nyquist que dice que:

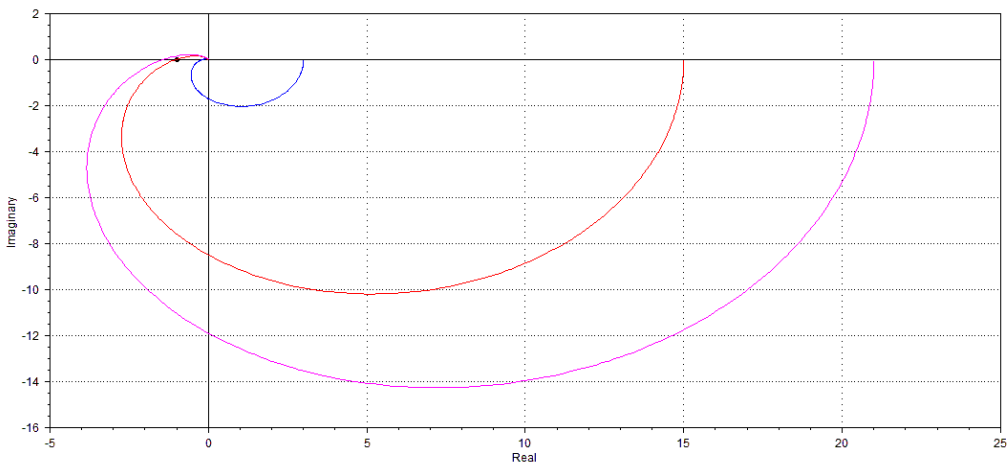
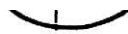
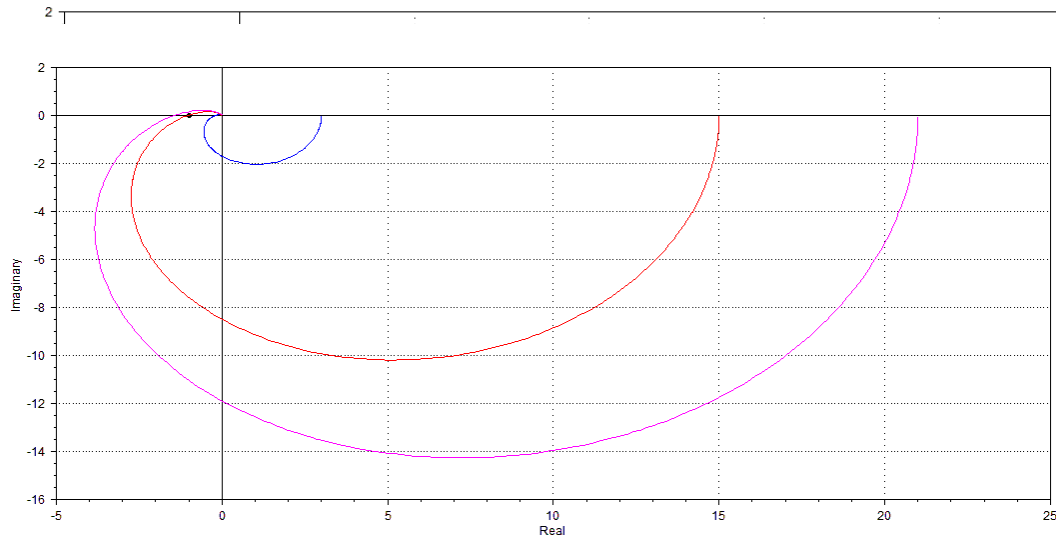


Figura 3-7

En esta ecuación tenemos dos valores conocidos N , que puede determinarse a través de la inspección del diagrama de Nyquist, y P , mientras que Z es la incógnita. Tomemos el caso de la función de transferencia de lazo abierto como

$$G(s) = \frac{k}{(1 + \tau s)(s^2 + 2\zeta s + 1)} \quad (6)$$

Que factorizada puede presentarse como

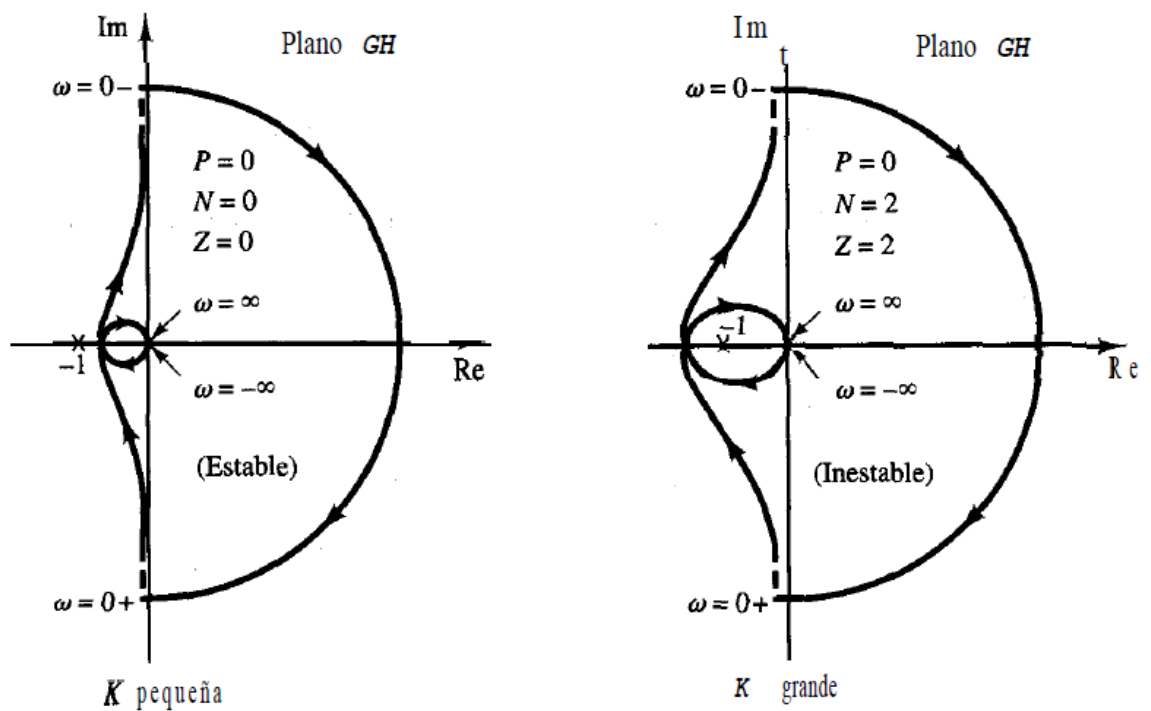
$$G(s) = \frac{k}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

Donde p_i son los polos de la función de transferencia con $\text{Re } p_i < 0$ para $i=1,2,3$

Este sistema en lazo abierto, es asintóticamente estable por lo que $p=0$. La figura 3.7 muestra el diagrama de Nyquist de la función (6) para una variación de w entre $-\infty$ y $+\infty$. Se muestra en línea llena el diagrama para valores positivos de w y en línea punteada para valores negativos de w

Para valores pequeños de k , el punto -1 sobre el eje real, se ubica en A y a medida que k crece se mueve hacia B.

En el primer caso, el diagrama de Nyquist no circunscribe el punto -1 por lo tanto $N=0$ y siendo $P=0$, Z será cero, lo cual significa que el sistema realimentado no tiene polos con parte real positiva en lazo cerrado, luego es estable. En el caso en que el punto -1 se sitúa en B, dicho punto queda circunscripto dos veces en sentido horario, luego $N=2$ y como $P=0$, será $Z=2$. Esto significa que el sistema en lazo cerrado tiene dos polos con parte real positiva y es por lo tanto inestable. En el límite de la estabilidad, el diagrama de Nyquist pasará por el punto -1





3-5. Diseño de los sistemas de control mediante análisis en lazo abierto.

La mayoría de los sistemas de control automático sobre procesos reales presentan funciones de transferencia que no tienen polos con parte real positiva y en general no se introducen polos con parte real positiva a través de los controladores, por lo que podemos decir que la condición típica es que sea $P=0$ en la expresión (5). Para la generalidad de los sistemas, el análisis de estabilidad a través de los diagramas de Nyquist se reduce a estudiar el comportamiento alrededor del punto $-1+ j0$, como puede observarse en la figura 3.8. Un sistema es estable en lazo cerrado si el punto $-1+ j0$, queda a la izquierda del diagrama de Nyquist de lazo abierto en el sentido del crecimiento de la frecuencia (ver figura 3.8.a). Un sistema en lazo cerrado estará en su límite de estabilidad cuando el diagrama de Nyquist en lazo abierto pase por el punto $-1+ j0$ (figura 3.8.b), siendo este el caso de oscilación permanente.

Como regla general podemos observar que un sistema es estable cuando el diagrama de Nyquist cruza el círculo unitario en el tercer cuadrante. En la figura 3.8 se muestran también los diagramas de Bode para cada caso. De esos diagramas podemos deducir que los márgenes de ganancia y de fase indicados representan el grado de estabilidad del sistema.

Margen de ganancia es la diferencia entre la ganancia a la frecuencia ω_p en que el sistema tiene un desfase de -180 y 0 dB.

$$\text{Margen de ganancia} = -|G(j\omega_p)| \text{ dB}$$

Margen de fase es la diferencia entre el desfase a la frecuencia ω_g en la que el sistema tiene una ganancia de 0 dB y -180°

$$\text{Margen de fase} = 180^\circ + \underline{|G(j\omega_g)|}$$

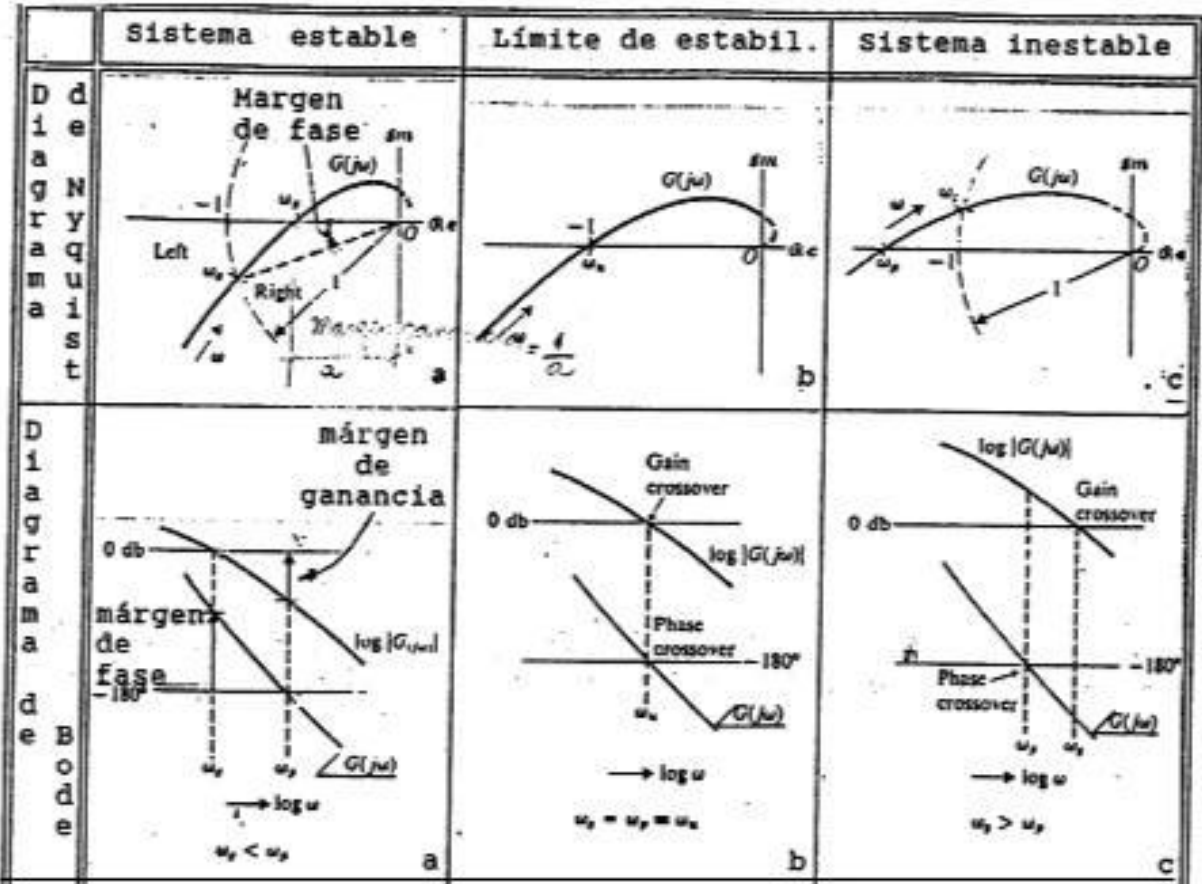


Figura 3 -8

Los márgenes de ganancia y de fase han sido definidos de tal modo que sean positivos cuando el sistema es estable.

El término margen pierde su sentido cuando el sistema alcanza el límite de estabilidad y más aún cuando es inestable.

Existe una regla práctica (regla de Oldemburger) para el diseño de los sistemas de control y es que los márgenes de ganancia y de fase deben ser:

Margen de ganancia 8 dB

Margen de fase 30°

Como hemos visto en el tema 2, existe un compromiso entre la estabilidad del sistema, que está ligada a una baja ganancia, y la efectividad del control, que está ligada a una alta ganancia. Un excesivo margen de ganancia lleva a una ganancia muy baja, lo cual no es recomendable debido a la presencia de error en estado estacionario inaceptable.

Si tenemos un proceso como el de la figura 3.9, cuya función de transferencia es

$$G_p(s) = \frac{e^{-\tau_d s}}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}$$



Instrumentación y Control Automático

UNIDAD 3

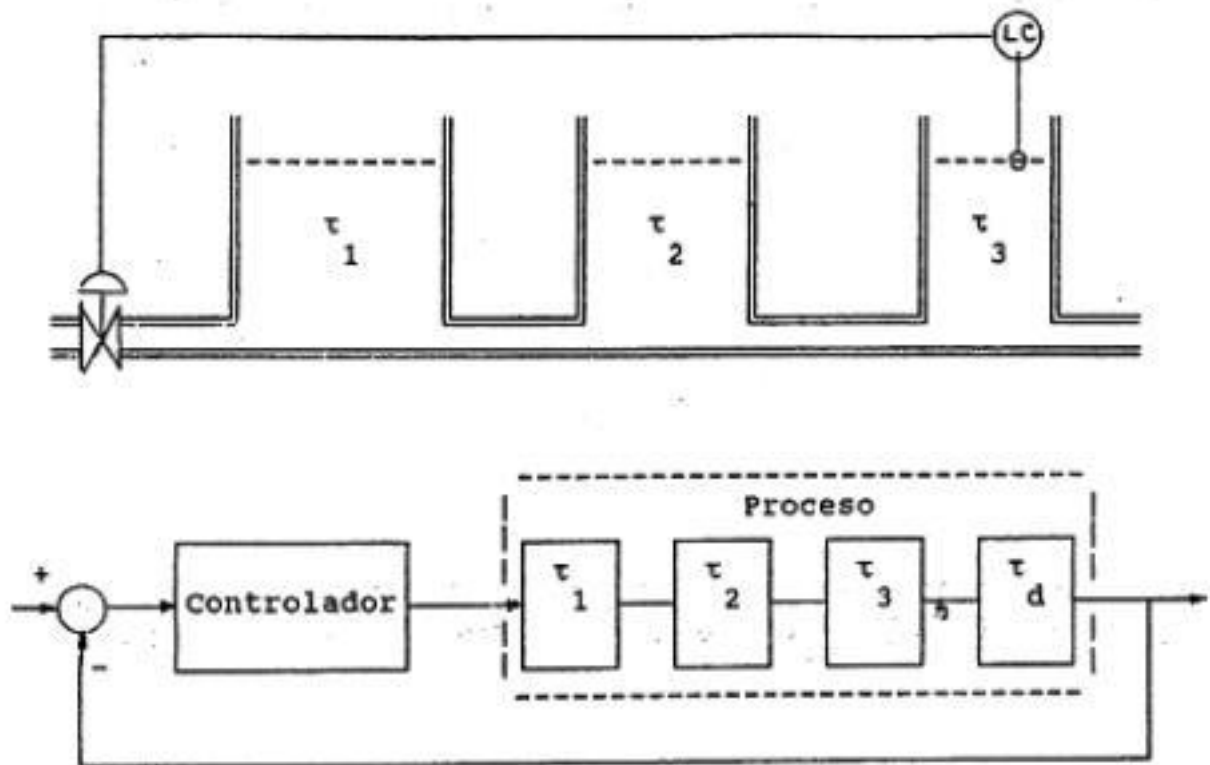


Figura 3 -9

Siendo $\tau_1 = 1$ $\tau_2 = 0.5$ $\tau_3 = 0.1$ $\tau_d = 0.5$

Si al proceso le aplicamos un controlador proporcional cuya función de transferencia es

$$G_c(s) = k_c$$

El diagrama de Bode de la figura 3.10, nos permite determinar el valor de la ganancia del controlador k_c para satisfacer los márgenes de ganancia y fase.

En la figura 3.10 puede observarse que el margen de ganancia del proceso es 10 dB y el margen de fase 120°. Para cumplir con una de las condiciones de la regla de Oldemburger hacemos

$$k_c = 1.25 = +2 \text{ dB}$$

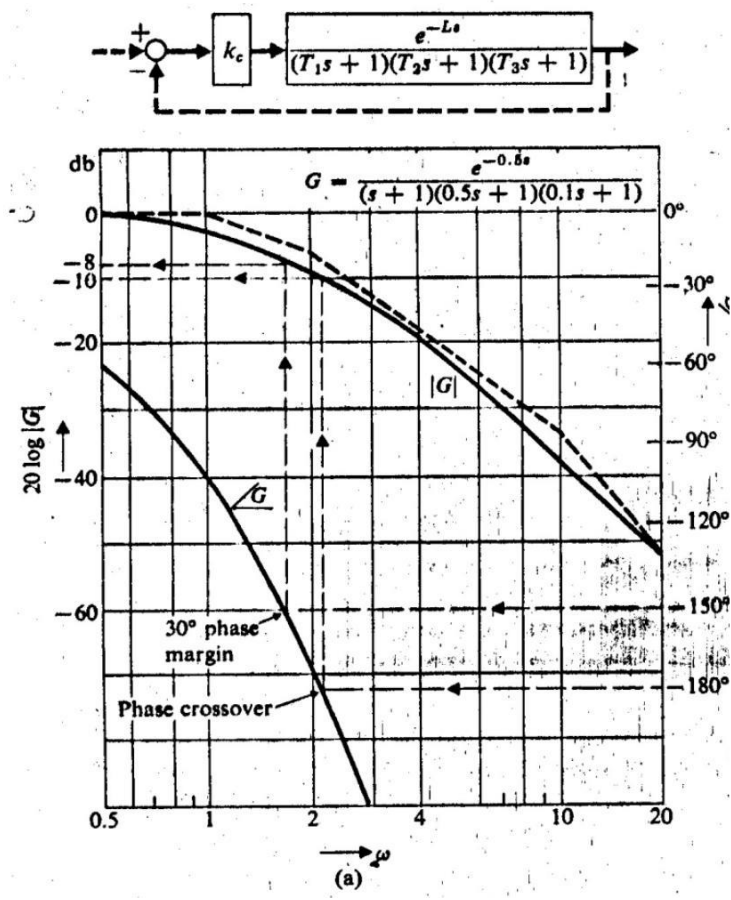


Figura 3 -10

De este modo logramos que el margen de ganancia sea 8dB y el margen de fase 30°, lo cual resulta aceptable.

Si aplicamos al proceso un controlador PID cuya función de transferencia es

$$G_c(s) = k_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) (1 + \tau_d s) \quad (7)$$

Y seleccionamos los valores de tal modo que se cancelen las dos capacitancias principales, es decir con

$$\tau_i = 1 \quad \tau_d = 0.5$$

$$G_c(s) = k_c \left(\frac{1+s}{s} \right) (1+0.5s)$$

Que aplicado sobre el proceso os presenta una función de transferencia de lazo abierto

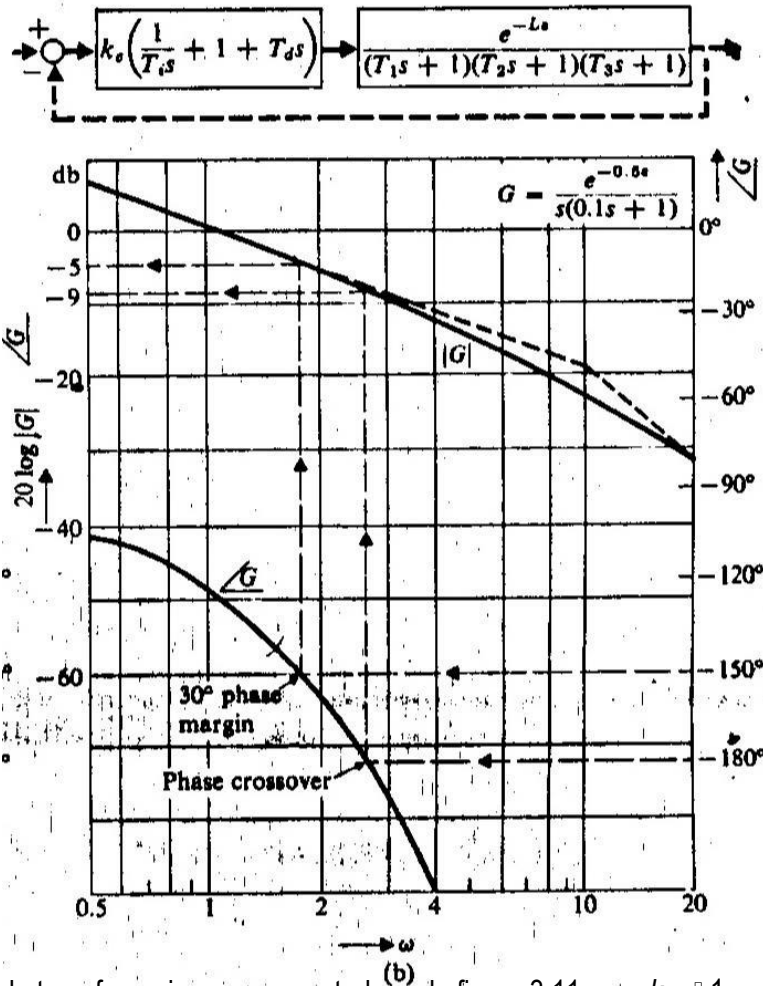
$$G_c(s) \cdot G_p(s) = k_c \left(\frac{1+s}{s} \right) (1+0.5s) \frac{e^{-0.5s}}{(1+s)(1+0.5s)(1+0.1s)}$$



Instrumentación y Control Automático

UNIDAD 3

$$G(s) = k_c \frac{e^{-0.5s}}{s(1 + 0.1s)}$$



Esta función de transferencia es representada en la figura 3.11 para $k_c = 1$

Figura 3 -11

Observemos que el margen de ganancia en este caso es 9 dB con lo que si queremos alcanzar un margen de ganancia de 8 dB tendremos que ajustar

$$k_c = 1.12 = +1dB$$

Para obtener los factores de ajuste de los modo integral y derivativo de acuerdo a las expresiones vistas el primer tema para un controlador PID, debemos convertir la función de transferencia (7) en su forma canónica.

$$G_c(s) = k_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

en la que



Instrumentación y Control Automático

UNIDAD 3

$$k_c = K_c r \quad T_i = \tau_i r \quad T_d = \frac{\tau_d}{r}$$

donde

$$r = 1 + \frac{\tau_d}{\tau_i}$$

luego

$$r = 1.5 \quad k_c = 1.68 \quad T_i = 1.5 \quad T_d = 0.33$$

Observemos que la ganancia en este caso es un 30% mayor que con un controlador proporcional y también el margen de ganancia es mayor, lo cual es debido al efecto de la acción derivativa que acelera la respuesta. Por otra parte, la acción integral, aumenta la ganancia en baja frecuencia eliminando el error de offset.

El análisis en frecuencia realizado, se ha referido en todos los casos a sistemas en oscilación permanente. Sin embargo resulta muy sencillo extender dicho análisis a sistemas amortiguados, con amortiguamiento de $\frac{1}{4}$ de la amplitud.

Tomemos por ejemplo la función de transferencia

$$G(s) = \frac{k}{s(1+s)}$$

en este caso sustituimos

$$s = -\sigma + j\omega$$

donde, para un amortiguamiento de $\frac{1}{4}$ de la amplitud, la relación entre la parte imaginaria y la parte real debe ser $\sigma = 0.22$

el diagrama de Nyquist, modificado para la frecuencia compleja $-0.22 + j\omega$ es mostrado en figura 3.12 y podemos observar que este diagrama modificado cruza el eje real en el punto P en el que la frecuencia es $\omega = 2.28$ y la ganancia $|G(-0.22 + j\omega)| = 0.184$

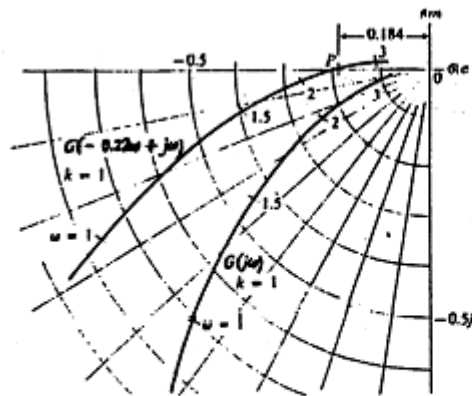


Figura 3-12

la curva cruzará el eje real en el punto -1 si la ganancia k es ajustada a un valor $1/0.184 = 5.44$ y es el valor de la ganancia para una amortiguamiento de $1/4$ de la amplitud.

Profesor Titular: Ing. Alfredo Ernesto Puglesi
 Profesor Adjunto: Ing. María Susana Bernasconi
 JTP: Ing. Esther Bibiana Castiglione
 Colaboró: Agustina Galiana
 Pablo Barbazza