4.1. Concepto de estado - Espacio de estado.

Si registrásemos el comportamiento (respuesta) de un sistema en una película o en videotape, cada cuadro mostrará el estado instantáneo del sistema.

Utilizaremos un juego de variables, denominadas **variables de estado**, para identificar un sistema y describir su movimiento.

La cantidad necesaria y suficiente de variables de estado, para describir la respuesta de un sistema, es igual al número de elementos dinámicos. Del mismo modo, este número coincide con el orden del sistema.

El espacio dentro del cual se mueven las variables de estado se denomina **espacio de estado**. Definimos el espacio de estado como el espacio euclidiano n-dimensional, cuyas coordenadas son las variables de estado de un sistema de orden "n".

4.2. Ecuación de estado.

Podemos definir la salida (respuesta observada) de un sistema como la función lineal entre las variables de estado y las entradas del mismo.

Tomemos, por ejemplo, un sistema lineal de primer orden consistente en una capacitancia autorregulada. La expresión (2.37) muestra la ecuación diferencial del sistema, y puede expresarse del siguiente modo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a * x(t) + b * u(t) \qquad (4.1)$$

Donde:
- x(t): es la variable de estado.
- u(t): es la variable de entrada.
- a y b: son coeficientes.

La salida del sistema será una función lineal de la entrada y de la variable de estado, expresándose de la siguiente manera:

$$y(t) = c * x(t) + d * u(t) \qquad (4.2)$$

Donde:

- y(t): es la salida del sistema.
- c y d: son coeficientes.

Cuando el sistema tiene más de una variable de estado, es decir, que el mismo es de 2° orden o superior, las expresiones (4.1) y (4.2) pueden generalizarse, obteniéndose ecuaciones donde x(t), u(t) y y(t) serán vectores:

$$\text{Vector de entrada: } \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix} \qquad \text{Vector de estado: } \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Vector de salida: } \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}$$

La ecuación (4.1) se convierte entonces en una ecuación vectorial, con la siguiente forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A * x(t) + B * u(t) \qquad (4.3)$$

Donde:

- A: es una matriz de parámetros n*n.
- x(t): es un vector de parámetros n*1.
- B: es una matriz de parámetros n*r.
- u(t): es un vector de parámetros r*1.

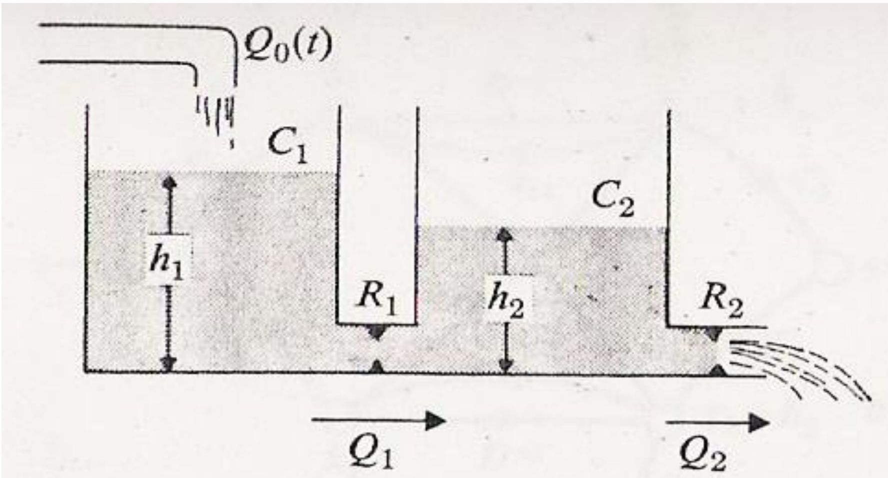
Del mismo modo, la expresión (4.2) se convierte en una ecuación vectorial:

$$y(t) = C * x(t) + D * u(t) \qquad (4.4)$$

Donde:

- C: es una matriz de parámetros m*n.
- D: es una matriz de parámetros m*r.

A continuación, se presenta un ejemplo de un sistema de 2 capacidades autorreguladas:



La representación de este sistema obedece a la expresión general:

$$A * \frac{dh(t)}{dt} = Q_e - Q_s$$

En la figura, el área de los tanques está representada por la letra C. El análisis que se realiza a continuación reemplaza la letra C por la A.
Luego:

$$A_1 * \frac{dh_1(t)}{dt} = -\frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1} + Q(t)$$

$$A_2 * \frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1} - \frac{h_2(t)}{R_2}$$

Donde:

- A_1: es el área del tanque 1.
- A_2: es el área del tanque 2.

Reordenando términos:

$$\frac{d}{dt}h_1(t) = -\frac{1}{R_1 * A_1} * h_1(t) + \frac{1}{R_1 * A_1} * h_2(t) + \frac{1}{A_1} * Q(t)$$

$$\frac{d}{dt}h_2(t) = \frac{1}{R_1 * A_2} * h_1(t) - \left(\frac{1}{R_1 * A_2} + \frac{1}{R_2 * A_2}\right) * h_2(t)$$

Por lo tanto, esto es equivalente a:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1 * R_1} & \frac{1}{A_1 * R_1} \\ \frac{1}{A_2 * R_1} & -\frac{1}{A_2 * R_1} - \frac{1}{A_2 * R_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} * [Q(t)]$$

La salida es:

$$y(t) = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_1 & -1/R_1 \\ 0 & 1/R_2) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto quedan definidas las matrices:

$$x(t) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1/R_1A_1 & 1/R_1A_1 \\ 1/R_1A_2 & -(1/R_1A_2 + 1/R_2A_2) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/A_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad U(t) = [Q_0(t)]$$

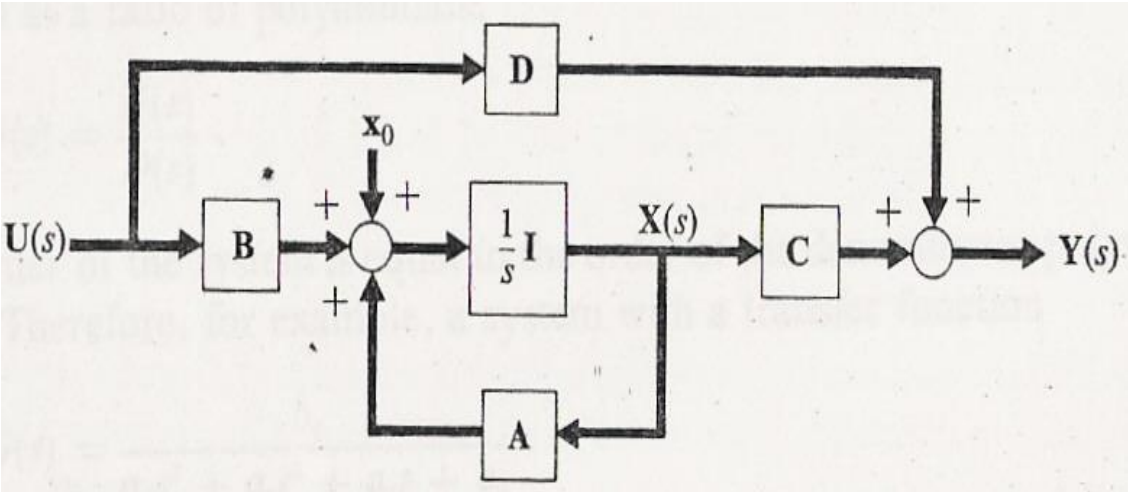
$$C = \begin{bmatrix} 1/R_1 & -1/R_1 \\ 0 & 1/R_2 \end{bmatrix} \qquad D=0$$

Debido a que la transformada de Laplace es un operador escalar, puede ser aplicado a las ecuaciones matriciales (4.3) y (4.4), obteniéndose:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A * x(t) + B * u(t) \quad \Rightarrow \quad s * X(s) - X(0) = A * X(s) + B * U(s) \qquad (4.5)$$

$$y(t) = C * x(t) + D * u(t) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = C * X(s) + D * U(s) \qquad (4.6)$$

Estas expresiones pueden expresarse gráficamente mediante un diagrama en bloque vectorial como el mostrado a continuación:



Despejando de (4.5) la variable X(s):

$$s * X(s) - A * X(s) = X(0) + B * U(s)$$

$$X(s) * (s * I - A) = X(0) + B * U(s)$$

$$X(s) = (s * I - A)^{-1} * [X(0) + B * U(s)] \qquad (4.7)$$

Y, finalmente, reemplazando (4.7) en (4.6):

$$Y(s) = C * \{(s * I - A)^{-1} * [X(0) + B * U(s)]\} + D * U(s) \qquad (4.8)$$

Esta es la ecuación que relaciona las entradas con las salidas, y se obtiene eliminando las variables de estado de la ecuación (4.6).

La ecuación de transferencia en el espacio de estado está dada por:

$$G(s) = \frac{T.L.[salida(t)]}{T.L.[entrada(t)]} = \frac{Y(s)}{U(s)}, \text{ (para condiciones iniciales nulas)} \Rightarrow X(0) = 0$$

Entonces:

$$Y(s) = C * (s * I - A)^{-1} * B * U(s) + D * U(s)$$

$$Y(s) = U(s) * \left[C * (s * I - A)^{-1} * B + D\right]$$

Por lo tanto, la ecuación de transferencia en el espacio del estado está dada por:

$$G(s) = C * (s * I - A)^{-1} * B + D$$

La matriz $(s * I - A)^{-1}$ juega un importante rol en la función de transferencia. Recordemos que la matriz inversa de esta matriz cuadrada es:

$$(s * I - a)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\left[(s * I - A)\right]}{\det\left[(s * I - A)\right]}$$

Debido a que el $\det\left[(s * I - A)\right]$ está en el denominador de la función de transferencia, entonces de éste se extraerán los polos de la función de transferencia, por lo que:

$$|s * I - A| = 0 \qquad \rightarrow \qquad \text{Ecuación Característica del Sistema}$$

A partir de esta ecuación pueden calcularse los polos de ecuación de transferencia.

Si al ejemplo de 2º orden de 2 capacidades autorreguladas le definiéramos los valores de las áreas y las resistencias, podríamos determinar los polos de la función de transferencia, y también la matriz $(s * I - A)^{-1}$, para posteriormente poder calcular la función de transferencia conociendo las matrices C, B y D:

$$A_1 = \frac{1}{6} \quad , \quad A_2 = \frac{3}{2} \quad , \quad R_1 = 4 \quad , \quad R_2 = \frac{1}{2}$$

Por consiguiente, se tendrá que:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 1/6 & -3/2 \end{bmatrix}}_{A} * \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} * \left[Q_0(t)\right]$$

Luego:

$$\left|s*I-A\right| = s*\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-3/2 & 3/2\\1/6 & -3/2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}s & 0\\0 & s\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-3/2 & 3/2\\1/6 & -3/2\end{vmatrix}$$

$$\left|s*I-A\right| = \begin{vmatrix}s+3/2 & -3/2\\-1/6 & s+3/2\end{vmatrix} = (s+3/2)*(s+3/2)-(-3/2)*(-1/6)$$

$$\left|s*I-A\right| = (s+3/2)^2 - 1/4$$

Los polos de la función de transferencia pueden ser determinados respetando la Ecuación Característica del Sistema:

$$\left|s*I-A\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad (s+3/2)^2 - 1/4 = 0$$

$$s^2 + 3*s + 9/4 - 1/4 = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 3*s + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix}s_1 = -1\\ s_2 = -2\end{Bmatrix}$$

A continuación se muestra como se calcula $(s*I-A)^{-1}$:

$$(s*I-A)^{-1} = \frac{adj[(s*I-A)]}{det[(s*I-A)]}$$

$$adj[(s*I-A)] = [cofactor(s*I-A)]^T$$

La matriz cofactor se obtiene de la siguiente forma:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}*(s+3/2) = s+3/2$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}*(-1/6) = 1/6$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}*(-3/2) = 3/2$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}*(s+3/2) = s+3/2$$

Luego:

$$\mathrm{cofactor}(s*I-A)=\begin{bmatrix} s+3/2 & 1/6 \\ 3/2 & s+3/2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{cofactor}(s*I-A)]^T=adj[(s*I-A)]=\begin{bmatrix} s+3/2 & 3/2 \\ 1/6 & s+3/2 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

$$(s*I-A)^{-1}=\frac{1}{\det[(s*I-A)]}*\mathrm{adj}[(s*I-A)]=\frac{1}{(s+1)*(s+2)}*\begin{bmatrix} s+3/2 & 3/2 \\ 1/6 & s+3/2 \end{bmatrix}$$

$$(s*I-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{s+3/2}{(s+1)*(s+2)} & \dfrac{3/2}{(s+1)*(s+2)} \\ \dfrac{1/6}{(s+1)*(s+2)} & \dfrac{s+3/2}{(s+1)*(s+2)} \end{bmatrix}$$

4.3 Solución de la ecuación de estado.

La solución de la ecuación diferencial $\frac{d}{dt}X(t)=A*X(t)+B*U(t)$, correspondiente a un sistema multivariable de cualquier orden lineal, es la suma de una solución homogénea y una solución particular.

- SOLUCIÓN HOMOGÉNEA:

Se obtiene a partir de la ecuación del sistema libre:

$$\frac{d}{dt}X_h(t)=A*X_h(t) \qquad ,\text{donde } U(t)=0$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$s*X(s)-X(0)=A*X(s)$$

$$s*X(s)-A*X(s)=X(0)$$

$$X(s)*(s*I-A)=X(0)$$

$$X(s) = (s * I - A)^{-1} * X(0)$$

Luego, antitransformando:

$$X_h(t) = \underbrace{T.L.^{-1}\left[(s * I - A)^{-1}\right]}_{S(t)} * X(0) \qquad ;donde: \quad S(t) = T.L.^{-1}\left[(s * I - A)^{-1}\right] = e^{A*t}$$

S(t) es denominada Matriz Solución.

Entonces:

$$X_h(t) = S(t) * X(0) = e^{A*t} * X(0) \qquad \text{SOLUCIÓN HOMOGÉNEA}$$

Para el ejemplo que hemos estado analizando, se tiene que:

$$S(t) = T.L.^{-1} \begin{matrix} \dfrac{s + 3/2}{(s+1)*(s+2)} & \dfrac{3/2}{(s+1)*(s+2)} \\ \dfrac{1/6}{(s+1)*(s+2)} & \dfrac{s + 3/2}{(s+1)*(s+2)} \end{matrix}$$

NOTA: la antitransformada de una matriz es la antitransformada de cada uno de sus elementos. Luego:

$$S(t) = \begin{bmatrix} 1/2 * (e^{-t} + e^{-2t}) & 3/2 * (e^{-t} - e^{-2t}) \\ 1/6 * (e^{-t} - e^{-2t}) & 1/2 * (e^{-t} + e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$X_h(t) = \begin{bmatrix} 1/2 * (e^{-t} + e^{-2t}) & 3/2 * (e^{-t} - e^{-2t}) \\ 1/6 * (e^{-t} - e^{-2t}) & 1/2 * (e^{-t} + e^{-2t}) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{bmatrix}$$

Debemos notar que las raíces de la Ecuación Característica (-1 y -2) aparecen como coeficientes en los términos exponenciales que describen la respuesta del sistema.

Estas raíces, que también corresponden a los polos de la función de transferencia (denominados valores propios de la matriz A) juegan un papel preponderante en la descripción matemática de los sistemas dinámicos.

- SOLUCIÓN PARTICULAR:

La solución particular satisface la ecuación diferencial no homogénea $\frac{d}{dt}X_p(t) = A * X_p(t) + B * U(t)$ (4.9)

Como la solución particular tiene que satisfacer la expresión anterior, probamos con la siguiente solución particular:

$$X_p(t) = S(t) * p(t)$$

Donde:
- $S(t)$: es la matriz solución.
- $p(t)$: es la función vectorial incógnita, cuya propiedad es:

$$p(t) = 0 \qquad \text{para } t = 0$$

Derivando la probable solución particular:

$$\frac{d}{dt}X_p(t) = \frac{dS(t)}{dt} * p(t) + S(t) * \frac{dp(t)}{dt}$$

Pero:

$$S(t) = e^{A*t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dS(t)}{dt} = A * e^{A*t} = A * S(t)$$

Luego:

$$\frac{d}{dt}X_p(t) = A * \underbrace{S(t) * p(t)}_{X_p(t)} + S(t) * \frac{dp(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}X_p(t) = A * X_p(t) + S(t) * \frac{dp(t)}{dt} \qquad (4.10)$$

Igualando las expresiones (4.9) y (4.10), resulta:

$$S(t)*\frac{dp(t)}{dt} = B*U(t)$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = S^{-1}(t)*B*U(t) \quad \Rightarrow \quad p(t) = \int_0^t S^{-1}(\tau)*B*U(\tau)d\tau$$

Siendo τ una variable auxiliar de integración.

Por consiguiente:

$$X_p(t) = S(t)*p(t)$$

$$X_p(t) = S(t)*\int_0^t S^{-1}(\tau)*B*U(\tau)*d\tau \qquad \text{pero,} \quad S(t)*S(\tau) = S(t-\tau)$$

Por lo tanto:

$$X_p(t) = \int_0^t S(t-\tau)*B*U(\tau(*d\tau \qquad \text{SOLUCIÓN PARTICULAR}$$

Entonces, la solución total de la ecuación diferencial es la suma de la solución homogénea y la solución particular.

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

$$X(t) = S(t)*X(0) + \int_0^t S(t-\tau)*B*U(\tau)*d\tau \qquad \text{SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ESTADO}$$

La solución homogénea es la que determina el estado oscilatorio y la solución particular el estado estacionario.

4.4 Controlabilidad y observabilidad.

Una función de transferencia desarrollada en fracciones simples muestra al sistema de manera desacoplada, es decir, que las variables de estado son afectadas directamente por la función de entrada U(s) y cada una de ellas afecta individualmente la salida Y(s). El equivalente matricial de un sistema desacoplado es cuando se presenta la matriz de estado A, como una matriz diagonal.

Si en un sistema cuya ecuación de estado homogénea es:

$$\frac{d}{dt}X(t) = A * X(t) \qquad (4.11)$$

realizamos una transformación lineal del vector de estado X(t) a un nuevo vector X°(t), mediante una matriz cuadrada T (recordar que hay muchas matrices de transformación, pero sólo una hará que A se convierta en una matriz diagonal)

$$X(t) = T * X^{o}(t) \qquad (4.12)$$

luego, reemplazando (4.12) en (4.11), la ecuación de estado resulta:

$$\frac{d}{dt}T * X^{o}(t) = A * T * X^{o}(t)$$

de donde:

$$\frac{d}{dt}X^{o}(t) = T^{-1} * A * T * X^{o}(t) \qquad (4.13)$$

Puede verse que esta ecuación es igual a la ecuación (4.11), a diferencia de que al haber llevado a cabo una transformación lineal, la nuava matriz A diagonalizada está representada en la ecuación (4.13) como el producto de 3 matrices: $T^{-1} * A * T$.

Suponiendo que la matriz $T^{-1} * A * T$ es una matriz diagonal

$$T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix}$$

Los valores propios de una matriz diagonal coinciden con los elementos de la diagonal principal

Demostración:

$$s * I - T^{-1} * A * T = T^{-1} * (s * I - A) * T$$

La ecuación característica:

$$\left| T^{-1} * (s * I - A) * T \right| = \left| (s * I - A) \right| = 0$$

Es decir que los valores propios de la matriz $T^{-1} * A * T$, son todos los valores propios de la matriz A.

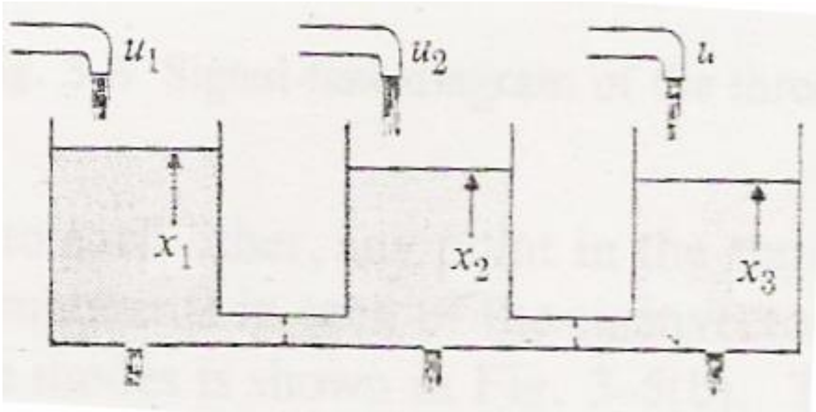
La matriz T es denominada matriz modal y sus columnas constituyen los vectores propios de la matriz A. La diagonalización a través de la matriz modal es posible si los vectores propios de la matriz A son todos linealmente independientes. Esto sucede cuando se tiene un sistema cuyos valores propios son distintos.

La diagonalización de la matriz A, nos permite analizar la controlabilidad y observabilidad de los sistemas.

La **controlabilidad** nos permitirá determinar si todas las variables de estado del sistema pueden ser controladas por una determinada entrada U_i.

La **observabilidad** nos permite conocer las posibilidades que existen de observar las variables de estado del sistema a través de una salida Y_i.

Tomemos como ejemplo, el caso de un sistema de tres capacitancias interactuantes.



Es nuestro interés, determinar cual de las entradas u_1, u_2 y u_3 y mediciones x_1, x_2 y x_3 pueden ser utilizadas para diseñar el sistema de control adecuado.

La ecuación diferencial de estado es:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo la ecuación característica $|s*I-A|=0$, que es:

$$|s*I-A| = \begin{vmatrix} s+3 & -1 & 0 \\ -2 & s+3 & -2 \\ 0 & 1 & s+3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad s^3+9*s^2+23*s+15=0$$

Los valores propios son los que satisfacen esta última ecuación (los polos de la función de transferencia):

$$p_1=-1 \qquad p_2=-3 \qquad p_3=-5$$

El primer vector propio se obtiene haciendo:

$$(A-p_1*I)*v^1 = \left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} - (-1)*\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) * \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{bmatrix} = 0$$

$$(A - p_1 * I) * v^1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} * \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{bmatrix} = 0$$

$$-2 * v_1^1 + 1 * v_2^1 + 0 * v_3^1 = 0$$
$$2 * v_1^1 - 2 * v_2^1 + 2 * v_3^1 = 0$$
$$0 * v_1^1 + 1 * v_2^1 - 2 * v_3^1 = 0$$

Si elegimos:

$$v_1^1 = 1 \qquad v_2^1 = 2 \qquad v_3^1 = 1$$

Luego:

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Del mismo modo, podemos obtener los demás vectores propios:

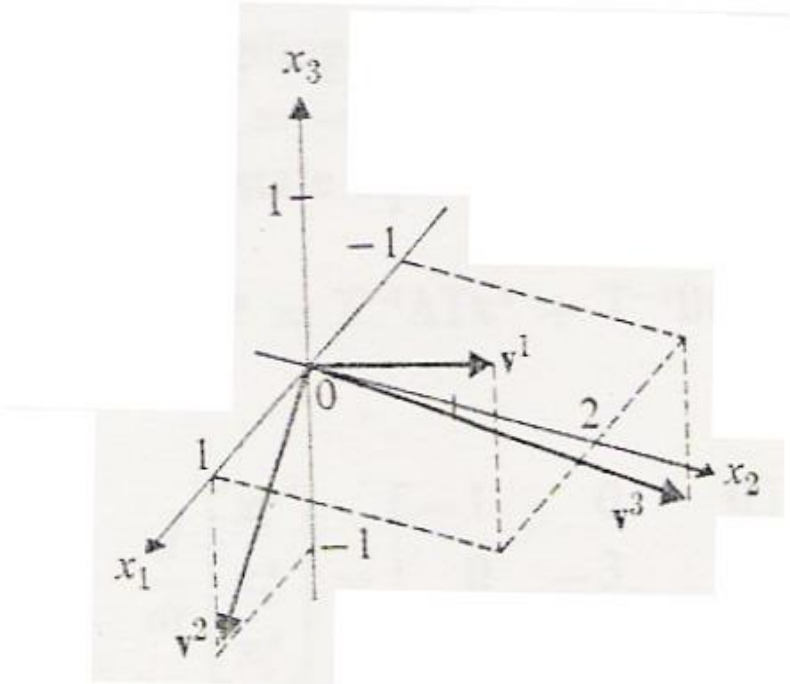
$$v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad v^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matriz modal es entonces:

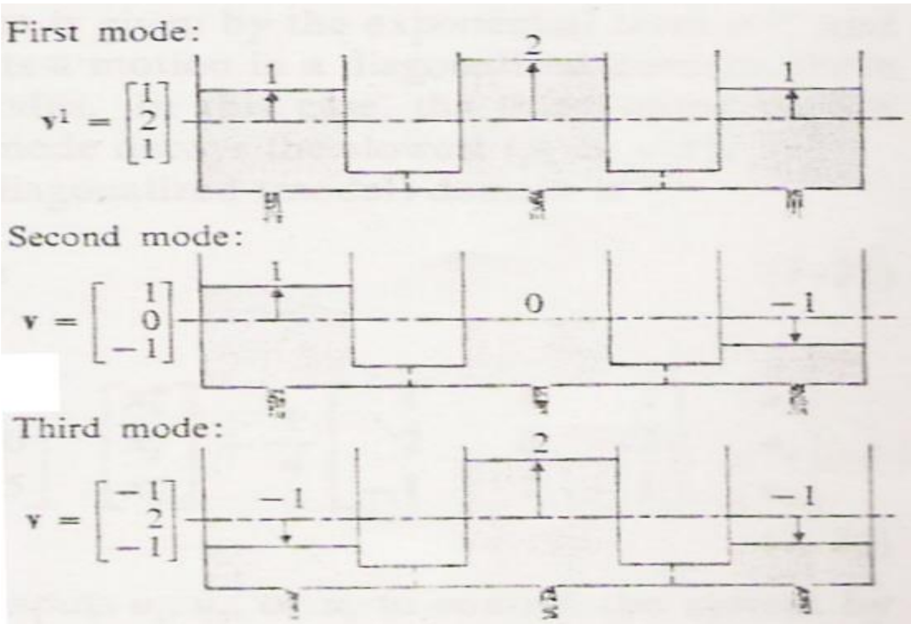
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Los vectores propios presentan las características de la respuesta de los distintos modos del sistema. Por otra parte los vectores propio relacionan los cambios en las variables de estado con la respuesta del sistema.

Los vectores propios son vectores con direcciones no paralelas en el espacio de estado, como se muestra en la siguiente figura.



Significado físico de los modos.



El primer modo describe un movimiento de estado en el cual los tres niveles crecen (o decrecen) simultáneamente en los tres tanques.

En el segundo modo el nivel del primer tanque se mueve en dirección opuesta al del tercero que el del segundo tanque permanece quieto.

El tercer modo describe un estado en el que el nivel del primer tanque y el del tercero se mueven en dirección opuesta al del segundo.

La curva de crecimiento y decrecimiento de cada uno de los modos del sistema viene dada por el término exponencial $e^{P_i * t}$, siendo p_i los valores propios calculados con anterioridad.

Es decir, que el tercer modo es el más rápido $(p_3 = -5)$ y el primero es el más lento $(p_1 = -1)$.

Desarrollando la ecuación diferencial diagonalizada (modal), con los valores obtenidos en el ejemplo que estamos llevando a cabo, tenemos:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1° \\ x_2° \\ x_3° \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{T^{-1}*A*T} * \begin{bmatrix} x_1° \\ x_2° \\ x_3° \end{bmatrix} + \frac{1}{4} * \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}*B} * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Para determinar la **controlabilidad** del sistema, debemos determinar de que manera las entradas u_1, u_2 y u_3 afectan a todos los modos del sistema.

De la observación directa de la matriz $T^{-1} * B$, podemos inferir que el sistema del ejemplo es totalmente controlable por la primera y la tercera entrada, puesto que la primera y la tercera columna de dicha matriz no contienen ningún cero. No sucede lo mismo con la segunda entrada, dado que ésta no tiene efecto sobre el segundo modo.

Si la ecuación de salida fuese:

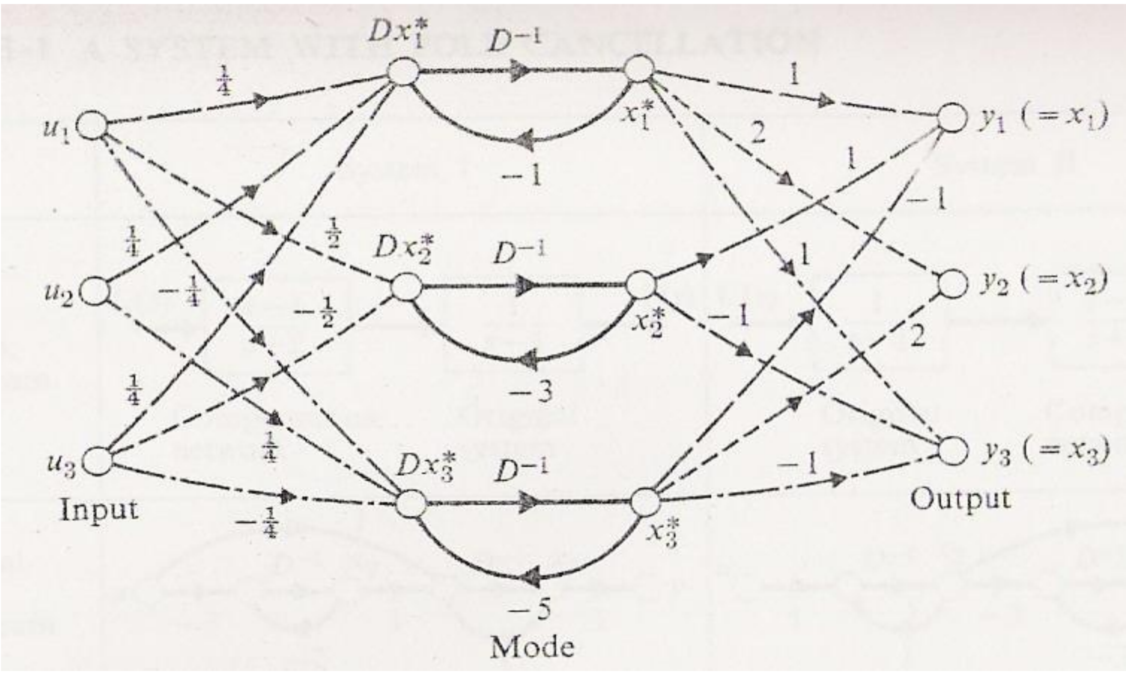
$$y = C * X + D * U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + D * U$$

En formato modal, sería:

$$y = C * T * X^o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1{}^o \\ x_2{}^o \\ x_3{}^o \end{bmatrix}$$

El cero que aparece en la segunda columna y en la segunda fila de la matriz C*T, muestra que el segundo modo no es observable por la salida y_2.

Desde el punto de vista práctico, lo expuesto nos dice que, si se produce alguna alteración en el ingreso de caudal en el segundo tanque, la misma no podrá ser observada a través de la segunda salida. Además, la manipulación de la entrada u_2 no tendrá ningún efecto sobre el segundo modo.



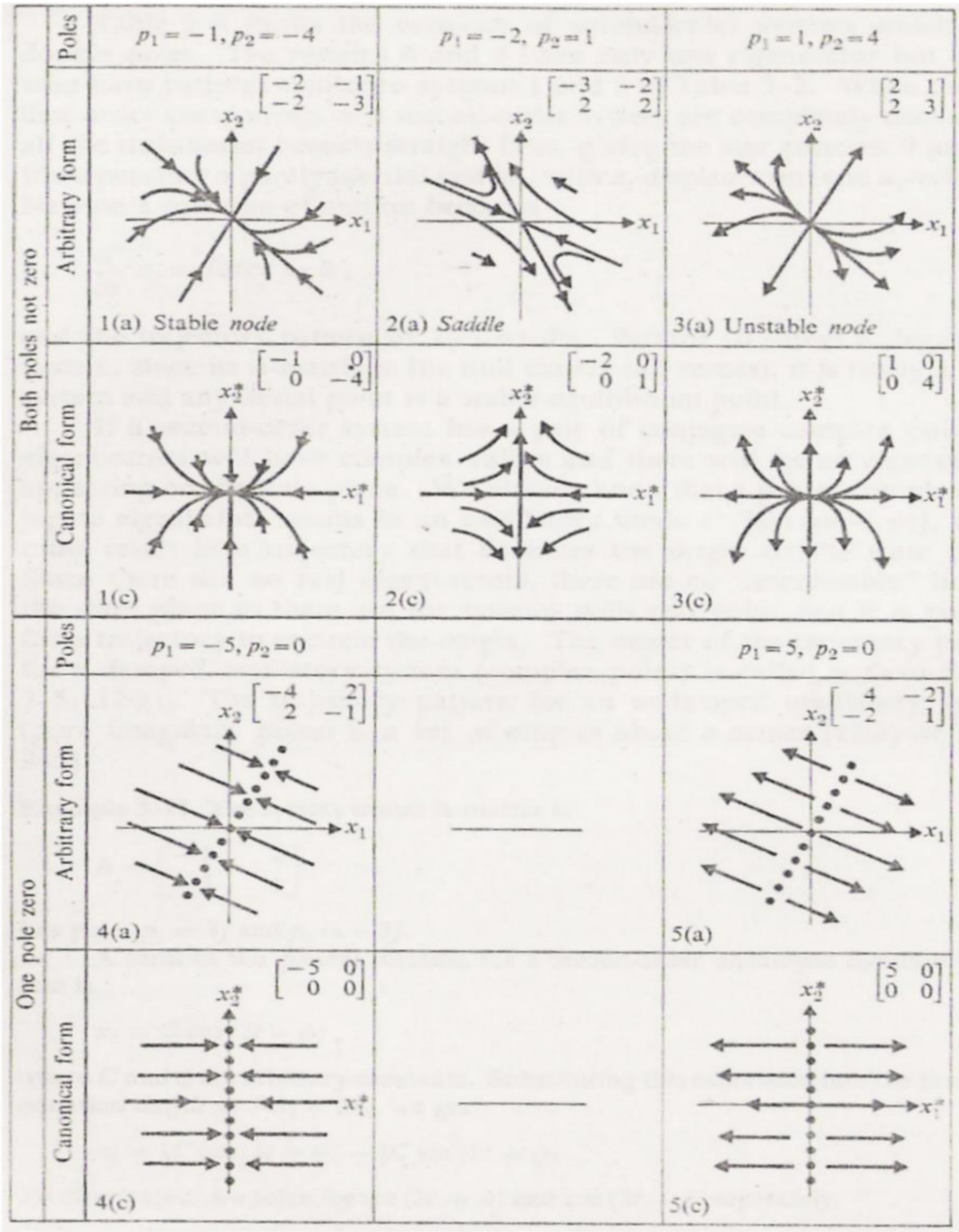
4.5 Movimiento en el espacio de estado.

La respuesta de un sistema a una determinada entrada u(t) a partir de sus valores iniciales $X_0 = X(t_0)$, describen curvas en cada uno de los planos formados por las **variables de estado** y el **tiempo** como ejes coordenados.

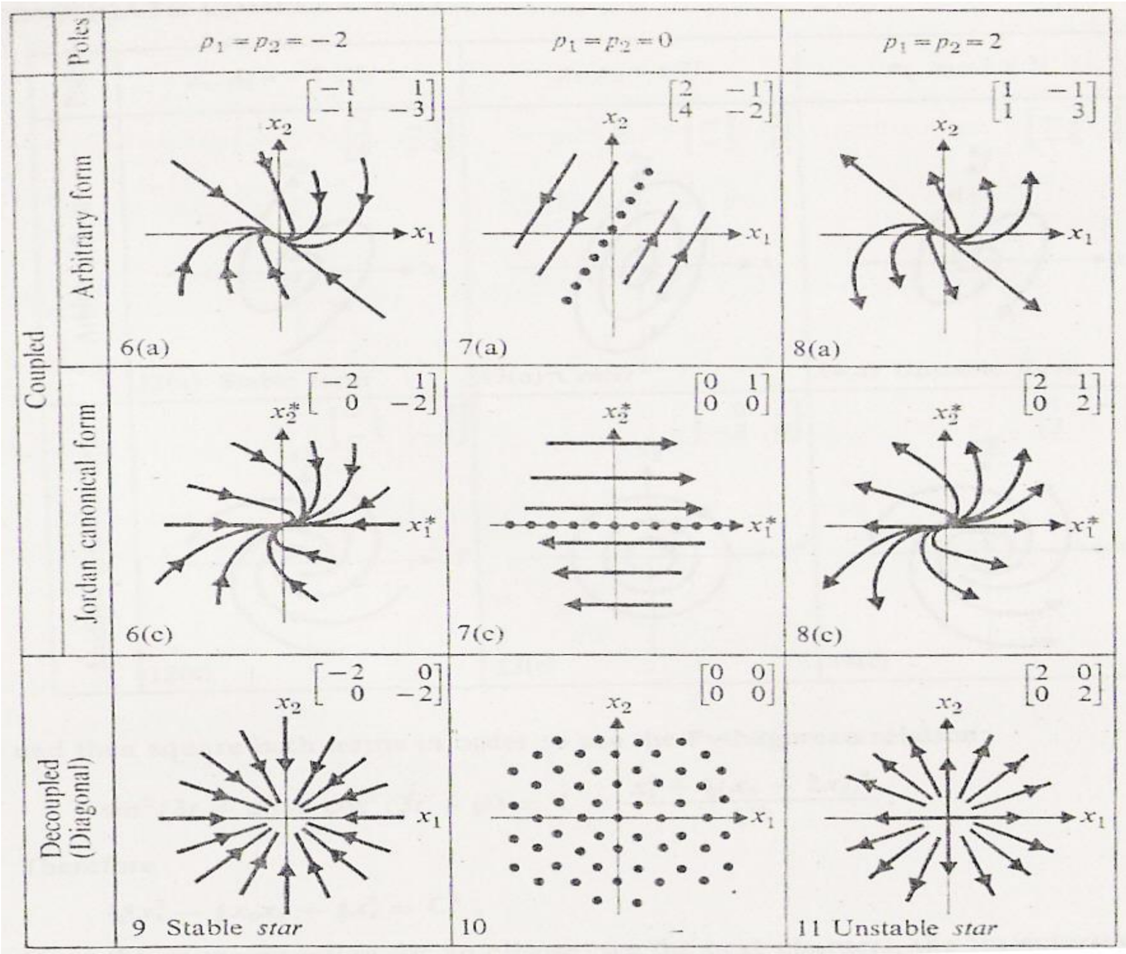
La proyección de dichas curvas en el espacio de estado, constituye lo que llamamos trayectorias. Las trayectorias pueden tener una interpretación gráfica hasta sistemas de tercer orden. Los sistemas de mayor orden no son fácilmente interpretados gráficamente.

Las trayectorias en el espacio de estado, nos permiten analizar el comportamiento del sistema en el tiempo. Normalmente presentan un juego de trayectorias para diferentes valores iniciales; de allí que, cuando se hable de una trayectoria particular, es necesario especificar cual es el valor inicial especial considerado. Las siguientes figuras muestran las trayectorias de distintos tipos de sistemas de segundo y tercer orden.

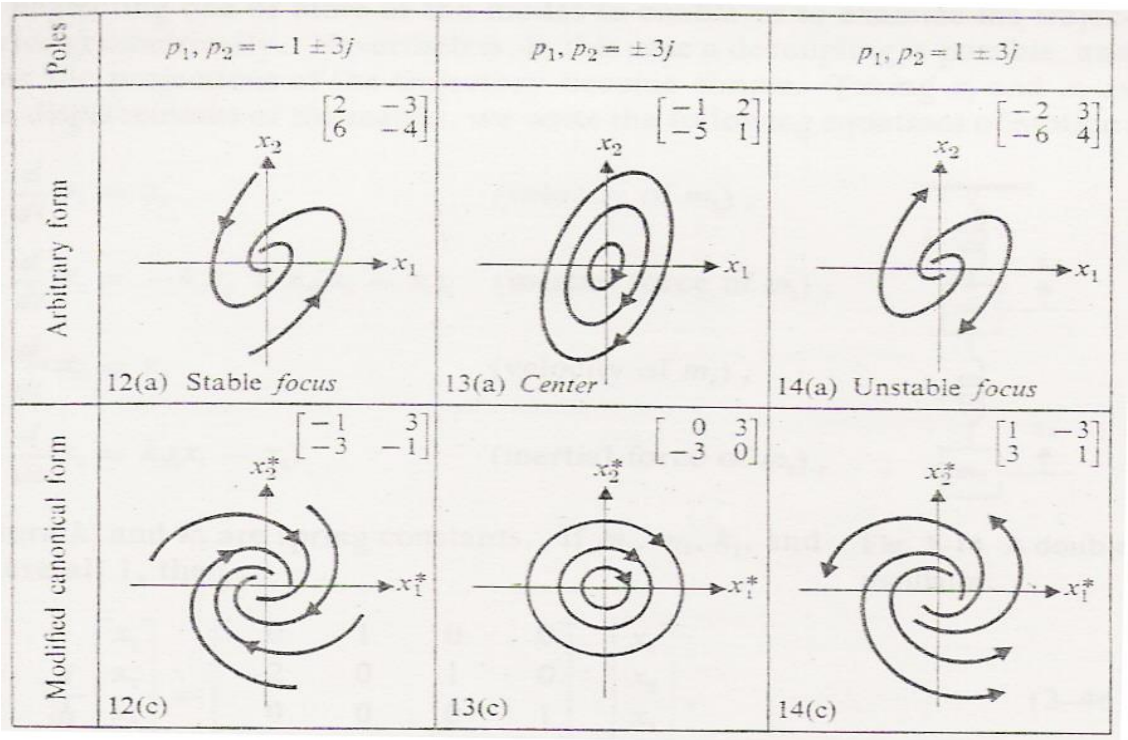
- **Sistema de segundo orden con polos distintos de cero y sistemas de segundo orden con un polo igual a cero.**


Both poles not zero
One pole zero
Poles
Arbitrary form
Canonical form
$p_1 = -1, p_2 = -4$
$p_1 = -2, p_2 = 1$
$p_1 = 1, p_2 = 4$
$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
1(a) Stable node
2(a) Saddle
3(a) Unstable node
$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
1(c)
2(c)
3(c)
$p_1 = -5, p_2 = 0$
$p_1 = 5, p_2 = 0$
$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
4(a)
5(a)
$\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
4(c)
5(c)

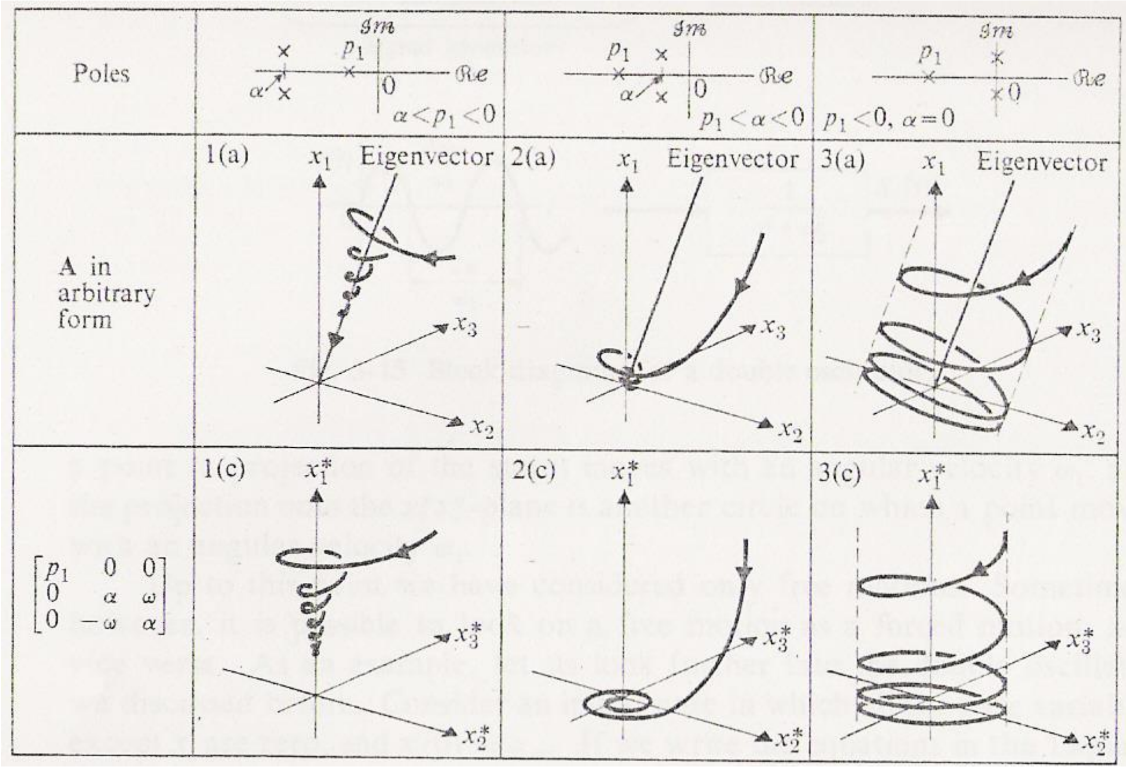
Sistemas de segundo orden con polos dobles o iguales.



- **Sistemas de segundo orden con polos complejos conjugados.**



- **Sistemas oscilatorios de tercer orden.**



4.6 Trayectoria y estabilidad.

A continuación veremos el uso de las trayectorias para establecer las condiciones de estabilidad de un sistema.

Consideremos un sistema dinámico cuyo vector de estado es X_a, el cual satisface la ecuación:

$$\frac{d}{dt} x_a(t) = F[x_a(t)]$$

El sistema planteado es libre, puesto que no está afectado por ninguna entrada y además es estacionario, es decir que sus parámetros son estacionarios en el tiempo.

Supongamos que nuestro sistema tiene un estado de equilibrio $x_a = c$ en el que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} x_a(t) = F(c) = 0$$

Analizaremos a continuación si el sistema es estable respecto a este punto de equilibrio. Para investigar la estabilidad, realizaremos la siguiente transformación de coordenadas:

$$x = x_a - c$$

y el sistema queda definido por:

$$\frac{d}{dt}x = F(x) \qquad\qquad F(0) = 0$$

Si el sistema es autónomo (libre), su ecuación diferencial es:

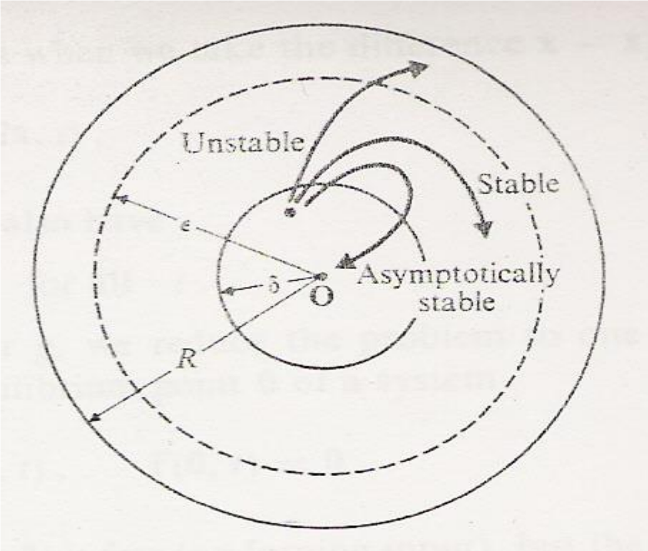
$$\frac{d}{dt}x = A * x$$

Estudiaremos la estabilidad del sistema según el concepto de Lyapunov, para lo que debemos definir dos regiones esféricas en el espacio de estado, de radios δ y ε, comprendidas dentro de la región esférica de radio R tal que:

$$\delta \le \varepsilon < R$$

La estabilidad en el sentido de Lyapunov, para el sistema en el origen (para x=0), puede definirse como sigue:

“El sistema es estable si para todo radio ε existe un radio δ tal que si una trayectoria se inicia en el punto x dentro o sobre la esfera de radio δ, se mantiene dentro de la esfera de radio ε”.



Existe una condición de estabilidad aun más severa, es aquella en que las trayectorias del sistema, luego de una perturbación, retornan al origen. Este tipo de sistemas se denominan asintóticamente estables y responden a la siguiente definición:

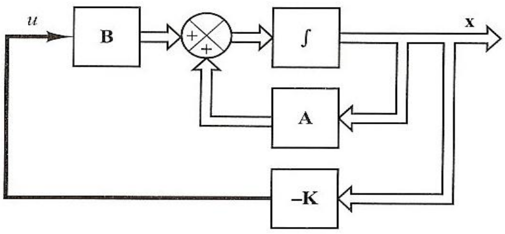
"Un sistema es asintóticamente estable si es estable, y además cada trayectoria que comienza dentro de la esfera de radio δ converge al origen para $t \to \infty$. Debemos notar que la estabilidad asintótica implica que la trayectoria se mantenga dentro de la esfera de radio ε".

"Diremos que un sistema es inestable, cuando para cualquier esfera de radio ε arbitrariamente grande y cualquier esfera de radio δ arbitrariamente pequeño, toda trayectoria que comienza dentro de la esfera de radio δ, excede al espacio de la esfera de radio ε".

Los criterios y teoremas de Lyapunov, que se desarrollan a partir de elementos básicos que acabamos de ver, nos permiten analizar la estabilidad de los sistemas en el espacio de estado.

Ejemplo:

Sea el siguiente sistema regulador:



Las ecuaciones que modelizan la planta son:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El sistema usa el control mediante realimentación del estado **u=-Kx**. Se escogen los polos en lazo cerrado: s=-2+4j, s=-2-4j, s=-10 (la experiencia indica que con este conjunto de valores se obtiene una respuesta aceptable).

Si definimos a **K** = $[k1 \quad k2 \quad k3]$
Obtenemos la ecuación característica:

$$|sI - A + BK| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1+k1 & 5+k2 & s+6+k3 \end{vmatrix} =$$

$$= s^3 + (6+k3)s^2 + (5+k2)s + (1+k1) = 0 \quad \textbf{(a)}$$

La ecuación característica deseada es:

(s+2-4j) (s+2+4j) (s+10)= $s^3 + 14s^2 + 60s + 200 = 0$ **(b)**

Igualando **(a) y (b):**

k1=199, k2=55 y k3=8

Utilizando Matlab, podemos obtener la respuesta para una condición inicial : $x(0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

Reemplazando en la ecuación de la planta :

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x = (A - BK)x + Iu$$
$$y = Ix + Iu$$

MATLAB Programa 12.3

```
% Respuesta a condición inicial:

A = [0  1  0;0  0  1;-1  -5  -6];
B = [0;0;1];
K = [199  55  8];
sys = ss(A-B*K, eye(3), eye(3), eye(3));
t = 0:0.01:4;
x = initial(sys,[1;0;0],t);
x1 = [1  0  0]*x';
x2 = [0  1  0]*x';
x3 = [0  0  1]*x';

subplot(3,1,1); plot(t,x1), grid
title('Respuesta a condición inicial')
ylabel('variable de estado x1')

subplot(3,1,2); plot(t,x2),grid
ylabel('variable de estado x2')

subplot(3,1,3); plot(t,x3),grid
xlabel('t (sec)')
ylabel('variable de estado x3')
```

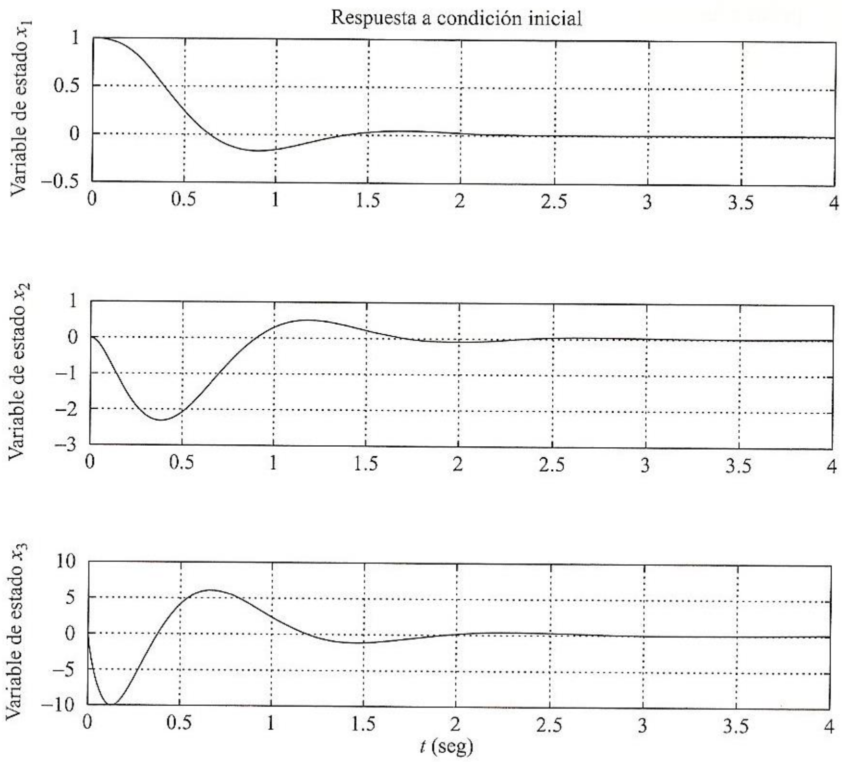


Figura 12.3. Respuesta a condición inicial.