UNIDAD 4

SISTEMAS MULTIVARIABLES (MIMO)

Concepto de estado - Espacio de estado.

Si registrásemos el comportamiento (respuesta) de un sistema en una película o en video, cada cuadro mostrará el estado instantáneo del sistema.

Utilizaremos un juego de variables, denominadas **variables de estado**, para identificar un sistema y describir su movimiento.

La cantidad necesaria y suficiente de variables de estado, para describir la respuesta de un sistema, es igual al número de elementos dinámicos. Del mismo modo, este número coincide con el orden del sistema.

El espacio dentro del cual se mueven las variables de estado se denomina **espacio de estado**. Definimos el espacio de estado como el espacio euclidiano n-dimensional, cuyas coordenadas son las variables de estado de un sistema de orden "n".

Ecuación de estado.

Podemos definir la salida (respuesta observada) de un sistema como la función lineal entre las variables de estado y las entradas del mismo.

Tomemos, por ejemplo, un sistema lineal de primer orden consistente en una capacitancia autorregulada. La expresión (2.37) muestra la ecuación diferencial del sistema, y puede expresarse del siguiente modo:

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = a * x(t) + b * u(t)}$$

Donde:

- x(t): es la variable de estado.
- u(t): es la variable de entrada.
- a y b: son coeficientes.

La salida del sistema será una función lineal de la entrada y de la variable de estado, expresándose de la siguiente manera

$$\boxed{y(t) = c * x(t) + d * u(t)}$$

Donde:

- y(t): es la salida del sistema.
- c y d: son coeficientes.

Vector de entrada : $u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}$

Vector de estado : $x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$

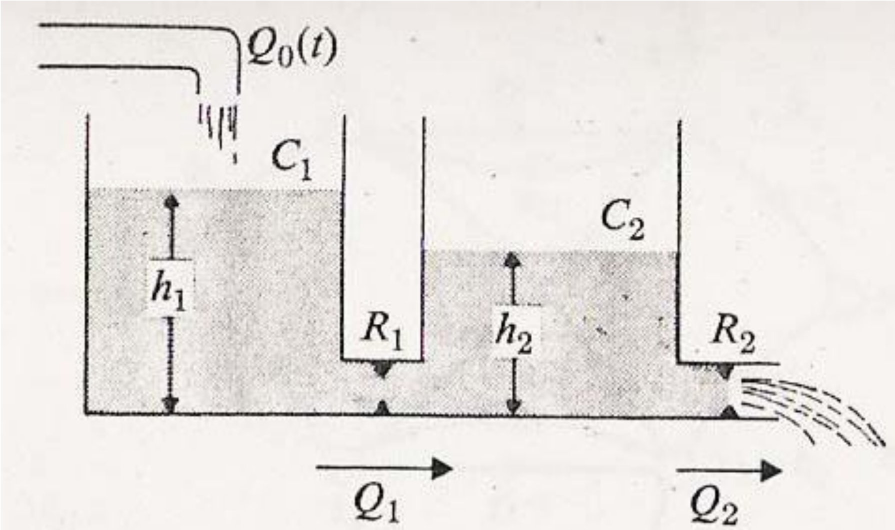
Vector de salida : $y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}$

Cuando el sistema tiene más de una variable de estado, es decir, que el mismo es de 2º orden o superior, se puede generalizar, obteniéndose ecuaciones donde x(t), u(t) y y(t) serán vectores. La ecuación se convierte entonces en una ecuación vectorial, con la siguiente forma:

- A: es una matriz de parámetros n*n.
- x(t): es un vector de parámetros n*1.
- B: es una matriz de parámetros n*r.
- u(t): es un vector de parámetros r*1.
- C: es una matriz de parámetros m*n.
- D: es una matriz de parámetros m*r.
- y(t): es un vector de parámetros m*1

$$\frac{dx(t)}{dt} = A * x(t) + B * u(t)$$

$$y(t) = C * x(t) + D * u(t)$$



$$A * \frac{dh(t)}{dt} = Q_e - Q_s$$

$$A_1 * \frac{dh_1(t)}{dt} = -\frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1} + Q(t)$$

$$A_2 * \frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1} - \frac{h_2(t)}{R_2}$$

$$\frac{d}{dt} h_1(t) = -\frac{1}{R_1 * A_1} * h_1(t) + \frac{1}{R_1 * A_1} * h_2(t) + \frac{1}{A_1} * Q(t)$$

$$\frac{d}{dt} h_2(t) = \frac{1}{R_1 * A_2} * h_1(t) - \left(\frac{1}{R_1 * A_2} + \frac{1}{R_2 * A_2} \right) * h_2(t)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1 * R_1} & \frac{1}{A_1 * R_1} \\ \frac{1}{A_2 * R_1} & -\frac{1}{A_2 * R_1} - \frac{1}{A_2 * R_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} * [Q(t)]}$$

$$\boxed{y(t) = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_1 & -1/R_1 \\ 0 & 1/R_2) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A * x(t) + B * u(t) \qquad \Rightarrow \qquad s * X(s) - X(0) = A * X(s) + B * U(s)$$

$$y(t) = C * x(t) + D * u(t) \qquad \Rightarrow \qquad Y(s) = C * X(s) + D * U(s)$$

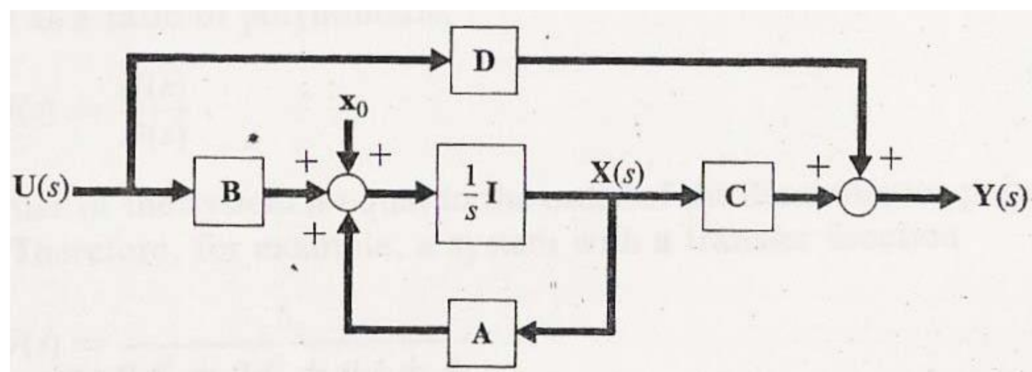
$$\left.\begin{aligned} s * X(s) - A * X(s) &= X(0) + B * U(s) \\ X(s) * (s * I - A) &= X(0) + B * U(s) \\ X(s) &= (s * I - A)^{-1} * [X(0) + B * U(s)] \end{aligned}\right\} \boxed{Y(s) = C * \{(s * I - A)^{-1} * [X(0) + B * U(s)]\} + D * U(s)}$$

$$Y(s) = C * (s * I - A)^{-1} * B * U(s) + D * U(s)$$

$$Y(s) = U(s) * \left[C * (s * I - A)^{-1} * B + D\right]$$

$$G(s) = C * (s * I - A)^{-1} * B + D$$

$$(s * I - a)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}[(s * I - A)]}{\det[(s * I - A)]}$$



$$\boxed{|s * I - A| = 0 \qquad \rightarrow \qquad \text{Ecuación Característica del Sistema}}$$

$$A_1 = \frac{1}{6} \quad , \quad A_2 = \frac{3}{2} \quad , \quad R_1 = 4 \quad , \quad R_2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 1/6 & -3/2 \end{bmatrix}}_{A} * \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} * [Q_0(t)]$$

$$|s * I - A| = s * \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 1/6 & -3/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 1/6 & -3/2 \end{vmatrix}$$

$$|s * I - A| = \begin{vmatrix} s+3/2 & -3/2 \\ -1/6 & s+3/2 \end{vmatrix} = (s+3/2) * (s+3/2) - (-3/2) * (-1/6$$

$$|s * I - A| = (s+3/2)^2 - 1/4$$

$$|s * I - A| = 0 \quad \Rightarrow \quad (s+3/2)^2 - 1/4 = 0$$

$$s^2 + 3 * s + 9/4 - 1/4 = 0$$

$$s^2 + 3 * s + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \end{Bmatrix}$$

$$(s*I-A)^{-1}=\frac{adj[(s*I-A)]}{det[(s*I-A)]}$$

$$adj[(s*I-A)]=cofactor[(s*I-A)]^{T}$$

$$C_{11}=(-1)^{1+1}*(s+3/2)=s+3/2$$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}*(-1/6)=1/6$$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}*(-3/2)=3/2$$

$$C_{22}=(-1)^{2+2}*(s+3/2)=s+3/2$$

$$cofactor(s*I-A)=\begin{bmatrix} s+3/2 & 1/6 \\ 3/2 & s+3/2 \end{bmatrix}$$

$$cofactor[(s*I-A)]^{T}=adj[(s*I-A)]=\begin{bmatrix} s+3/2 & 3/2 \\ 1/6 & s+3/2 \end{bmatrix}$$

$$(s*I-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{s+3/2}{(s+1)*(s+2)} & \frac{3/2}{(s+1)*(s+2)} \\ \frac{1/6}{(s+1)*(s+2)} & \frac{s+3/2}{(s+1)*(s+2)} \end{bmatrix}$$

Solución de la ecuación de estado.

La solución de la ecuación diferencial X(t), correspondiente a un sistema multivariable de cualquier orden lineal, es la suma de una solución homogénea y una solución particular.

- SOLUCIÓN HOMOGÉNEA:

Se obtiene a partir de la ecuación del sistema libre:

$$\frac{d}{dt}X(t) = A * X(t) + B * U(t) \longrightarrow \frac{d}{dt}X_h(t) = A * X_h(t)$$

$$\left.\begin{array}{c} s * X(s) - X(0) = A * X(s) \\ s * X(s) - A * X(s) = X(0) \\ X(s) * (s * I - A) = X(0) \\ X(s) = (s * I - A)^{-1} * X(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} X_h(t) = \underbrace{T.L.^{-1}\left[(s * I - A)^{-1}\right]}_{S(t)} * X(0) \\ S(t) = T.L.^{-1}\left[(s * I - A)^{-1}\right] = e^{A*t} \end{array} \Rightarrow X_h(t) = S(t) * X(0) = e^{A*t} * X(0)$$

Para el ejemplo de los dos tanques:

$$S(t) = T.L.^{-1} \begin{array}{cc} \dfrac{s + 3/2}{(s+1)*(s+2)} & \dfrac{3/2}{(s+1)*(s+2)} \\ \dfrac{1/6}{(s+1)*(s+2)} & \dfrac{s + 3/2}{(s+1)*(s+2)} \end{array} \Rightarrow X_h(t) = \begin{bmatrix} 1/2 * (e^{-t} + e^{-2t}) & 3/2 * (e^{-t} - e^{-2t}) \\ 1/6 * (e^{-t} - e^{-2t}) & 1/2 * (e^{-t} + e^{-2t}) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN PARTICULAR:

La solución particular satisface la ecuación diferencial no homogénea

Como la solución particular tiene que satisfacer la expresión anterior, probamos con la siguiente solución particular:

$$\frac{d}{dt}X_p(t) = A * X_p(t) + B * U(t)$$

$$X_p(t) = S(t) * p(t)$$

- $S(t)$: es la matriz solución.
- $p(t)$: es la función vectorial incógnita, cuya propiedad es:

$$p(t) = 0 \qquad \text{para } t = 0$$

$$\frac{d}{dt}X_p(t) = \frac{dS(t)}{dt} * p(t) + S(t) * \frac{dp(t)}{dt} \longrightarrow S(t) = e^{A*t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dS(t)}{dt} = A * e^{A*t} = A * S(t)$$

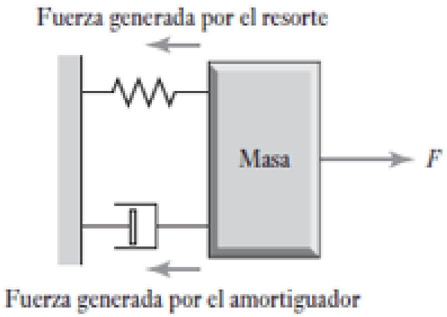
$$\frac{d}{dt}X_p(t) = A * \underbrace{S(t) * p(t)}_{X_p(t)} + S(t) * \frac{dp(t)}{dt} \longrightarrow \frac{d}{dt}X_p(t) = A * X_p(t) + S(t) * \frac{dp(t)}{dt}$$

$$S(t) * \frac{dp(t)}{dt} = B * U(t) \longrightarrow \frac{dp(t)}{dt} = S^{-1}(t) * B * U(t) \quad \Rightarrow \quad p(t) = \int_0^t S^{-1}(\tau\tau * B * U(\tau(* d\tau$$

$$X_p(t) = S(t) * p(t) \longrightarrow X_p(t) = S(t) * \int_0^t S^{-1}(\tau\tau * B * U(\tau(* d\tau \qquad \text{pero,} \quad S(t) * S(\tau(= S(t - \tau)$$

$$\boxed{X_p(t) = \int_0^t S(t-\tau) * B * U(\tau(* d\tau \qquad \text{SOLUCIÓN PARTICULAR}}$$

Encuentre la ecuación diferencial que modeliza el sistema masa resorte amortiguador de la figura. Exprese dicha función en modelo de estados



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F$$

$X_1(t)=x(t)$

$X_2(t)=\dot{x}_1(t)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}u$$

$$[y] = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

a) Hallar el modelo en el espacio de estados para la ecuación diferencial de 2° orden dada por:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 5y = u(t)$$

b) Encontrar la función de transferencia

-a partir de la ecuación diferencial

-a partir de modelo en el espacio de estados

c) Encontrar la respuesta a una entrada impulso

$X_1(t)=y(t)$

$X_2(t)=\dot{y}(t)$

$$\dot{x_2} = u(t) - 5x_1 + 6x_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$[y] = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)} = [C] * [sI - A]^{-1} * [B] = [1 \quad 0] * \begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s-6 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2-6s+5}$$

$$g(t)=\frac{1}{4}e^{5t} - \frac{1}{4}e^{t}$$

Dada la matriz A: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ encontrar la solución homogénea

s^2-3s-4=0 $\longrightarrow$ raíces -1 y 4 = inestable

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

para $\lambda = -1$ $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ autovector 1

para $\lambda = 4$ $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ autovector 2

x(t)= C1 X1+ C2 X2 $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [C1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-1t} + C2 \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}] \begin{bmatrix} x_{1(0)} \\ x_{2(0)} \end{bmatrix}$

Controlabilidad y observabilidad.

Una función de transferencia desarrollada en fracciones simples muestra al sistema de manera desacoplada, es decir, que las variables de estado son afectadas directamente por la función de entrada U(s) y cada una de ellas afecta individualmente la salida Y(s). El equivalente matricial de un sistema desacoplado es cuando se presenta la matriz de estado A, como una matriz diagonal. Si en un sistema cuya ecuación de estado homogénea es:

$$\frac{d}{dt}X(t) = A * X(t)$$

$$\frac{d}{dt}T * X^{o}(t) = A * T * X^{o}(t)$$

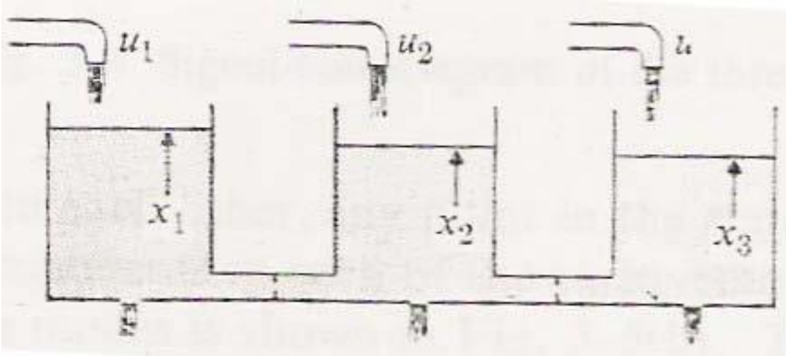
$$\frac{d}{dt}X^{o}(t) = T^{-1} * A * T * X^{o}(t)$$

$$T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix}$$

realizamos una transformación lineal del vector de estado X(t) a un nuevo vector Xº(t), mediante una matriz cuadrada T (recordar que hay muchas matrices de transformación, pero sólo una hará que A se convierta en una matriz diagonal) Puede verse que esta ecuación es igual a la ecuación (4.11), a diferencia de que al haber llevado a cabo una transformación lineal, la nueva matriz A diagonalizada está representada en la ecuación (4.13) como el producto de 3 matrices: T−1 * A * T .

$$s * I - T^{-1} * A * T = T^{-1} * (s * I - A) * T$$

$$\left|T^{-1} * (s * I - A) * T\right| = \left|(s * I - A)\right| = 0$$



$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$|s * I - A| = \begin{vmatrix} s+3 & -1 & 0 \\ -2 & s+3 & -2 \\ 0 & 1 & s+3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 9 * s^2 + 23 * s + 15 = 0$$

$$p_1 = -1 \qquad p_2 = -3 \qquad p_3 = -5$$

$$(A - p_1 * I) * v^1 = \left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} - (-1) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} v_1^1 &= 1 \\ v_2^1 &= 2 \\ v_3^1 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

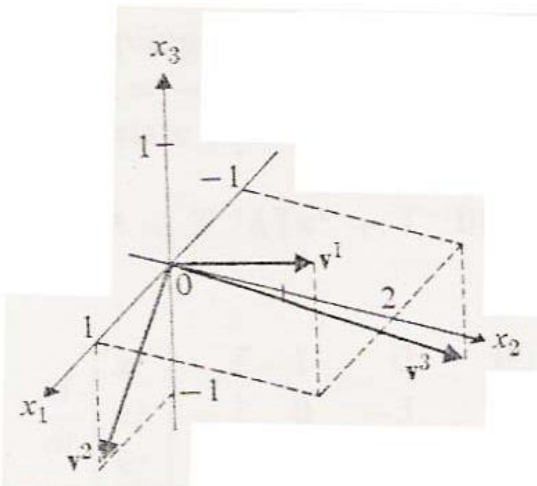
$$(A - p_1 * I) * v^1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} * \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{bmatrix} = 0$$

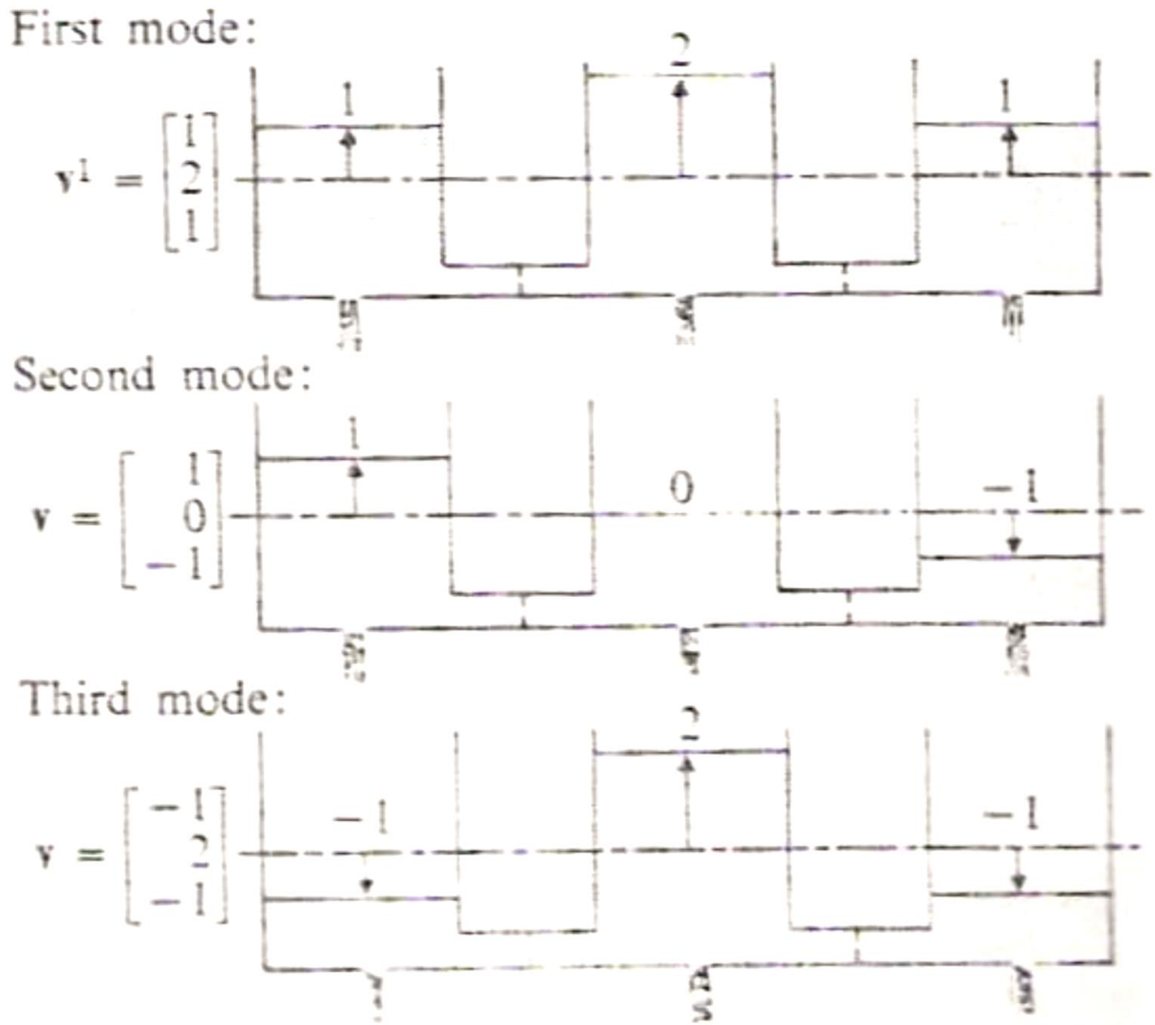
$$v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad v^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$-2 * v_1^1 + 1 * v_2^1 + 0 * v_3^1 = 0$$
$$2 * v_1^1 - 2 * v_2^1 + 2 * v_3^1 = 0$$
$$0 * v_1^1 + 1 * v_2^1 - 2 * v_3^1 = 0$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



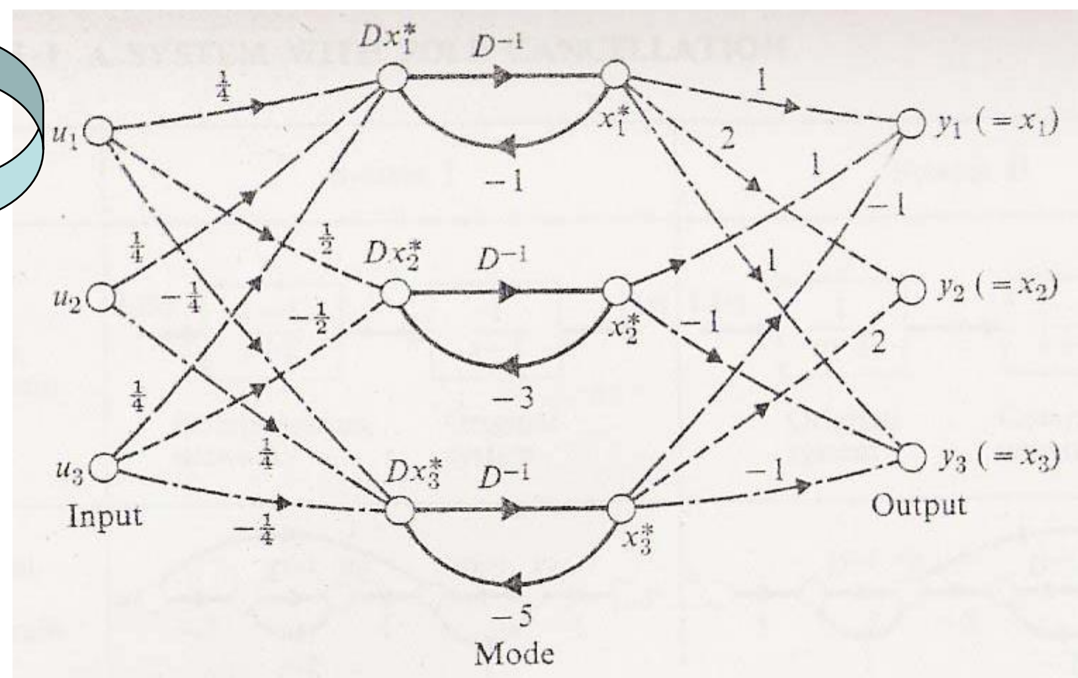


$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1{}^{\circ} \\ x_2{}^{\circ} \\ x_3{}^{\circ} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{T^{-1} * A * T} * \begin{bmatrix} x_1{}^{\circ} \\ x_2{}^{\circ} \\ x_3{}^{\circ} \end{bmatrix} + \frac{1}{4} * \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{T^{-1} * B} * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$y = C * X + D * U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + D * U$$

$$y = C * T * X^{\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1{}^{\circ} \\ x_2{}^{\circ} \\ x_3{}^{\circ} \end{bmatrix}$$



Analizar si el sistema es estable.
Analizar observabilidad y controlabilidad

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$[y] = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

raíces= $3 \pm j\frac{\sqrt{8}}{2}$ = inestable

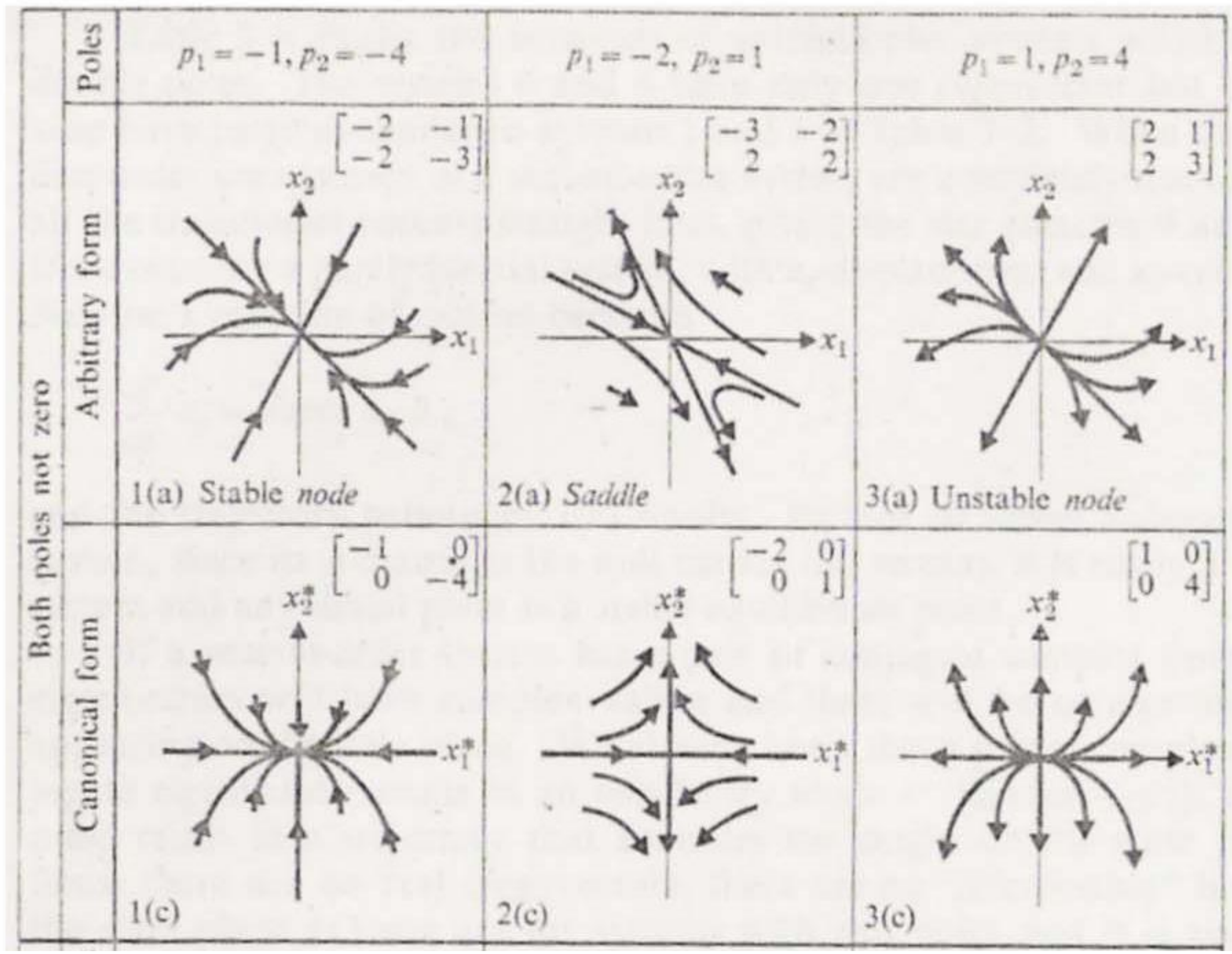
Observabilidad: $\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ det= 3 , es observable

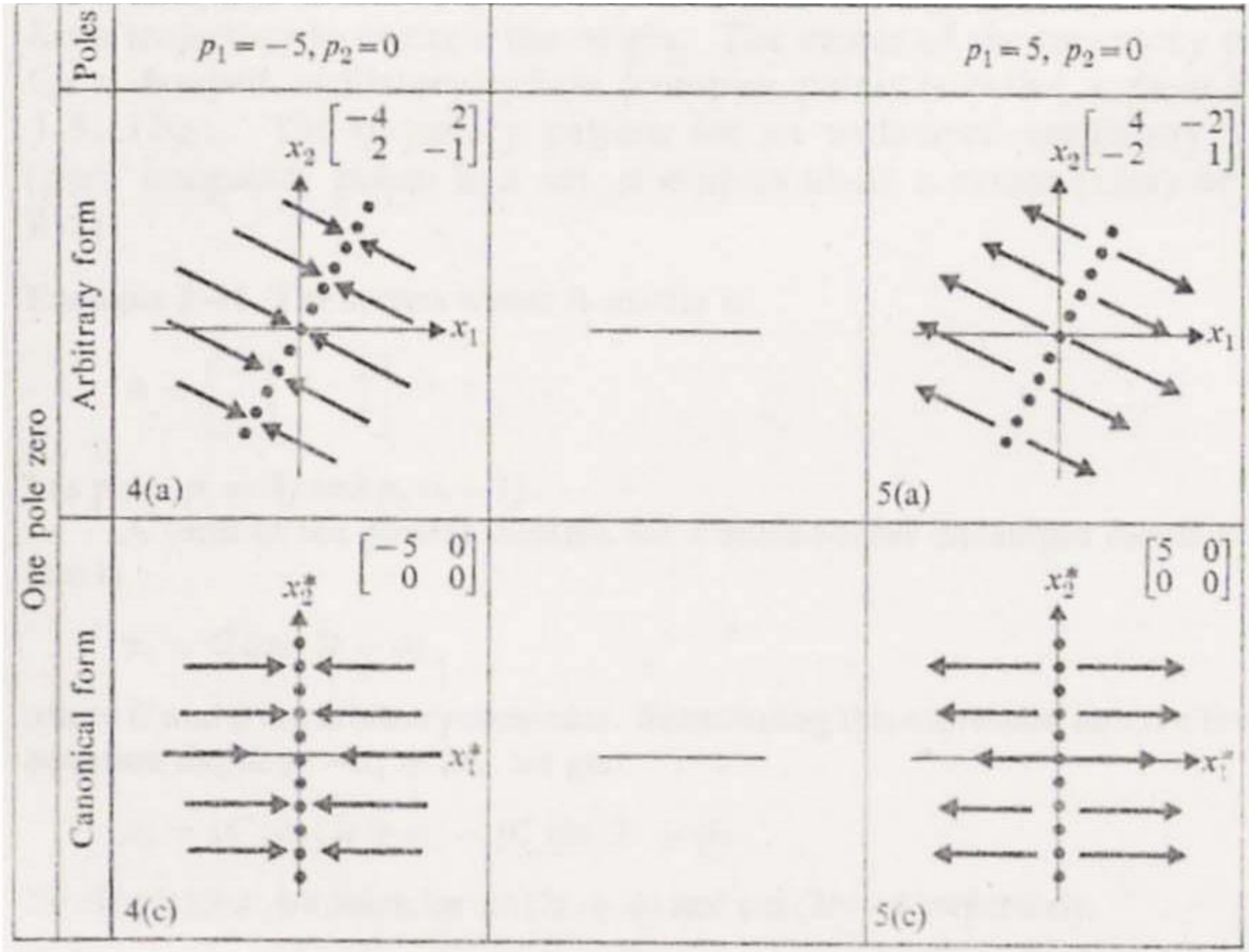
Controlabilidad: $[B \quad AB]= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ det= -3 es controlable

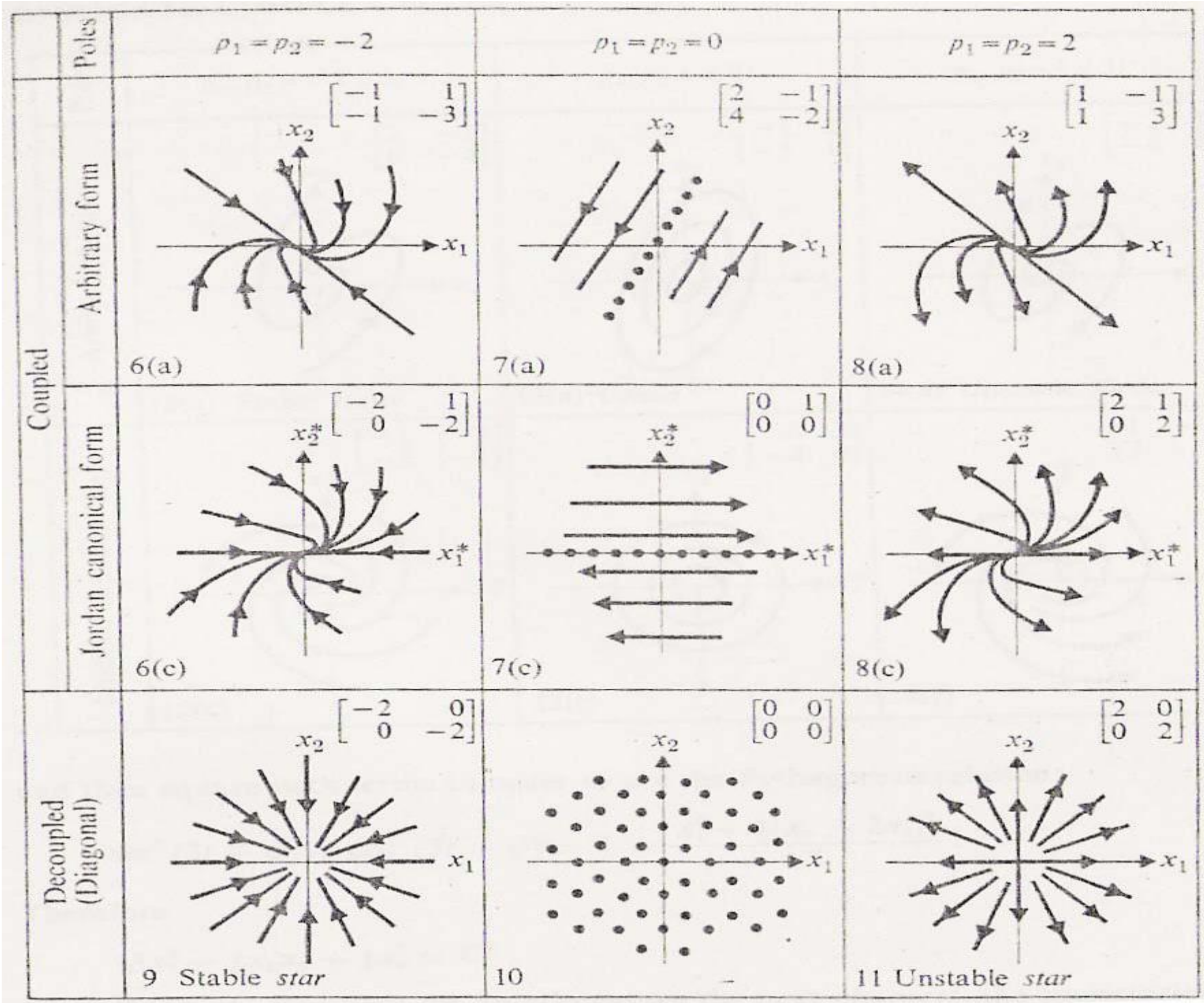
El rango de una matriz es el orden de la mayor submatriz cuadrada cuyo determinante es distinto de 0.

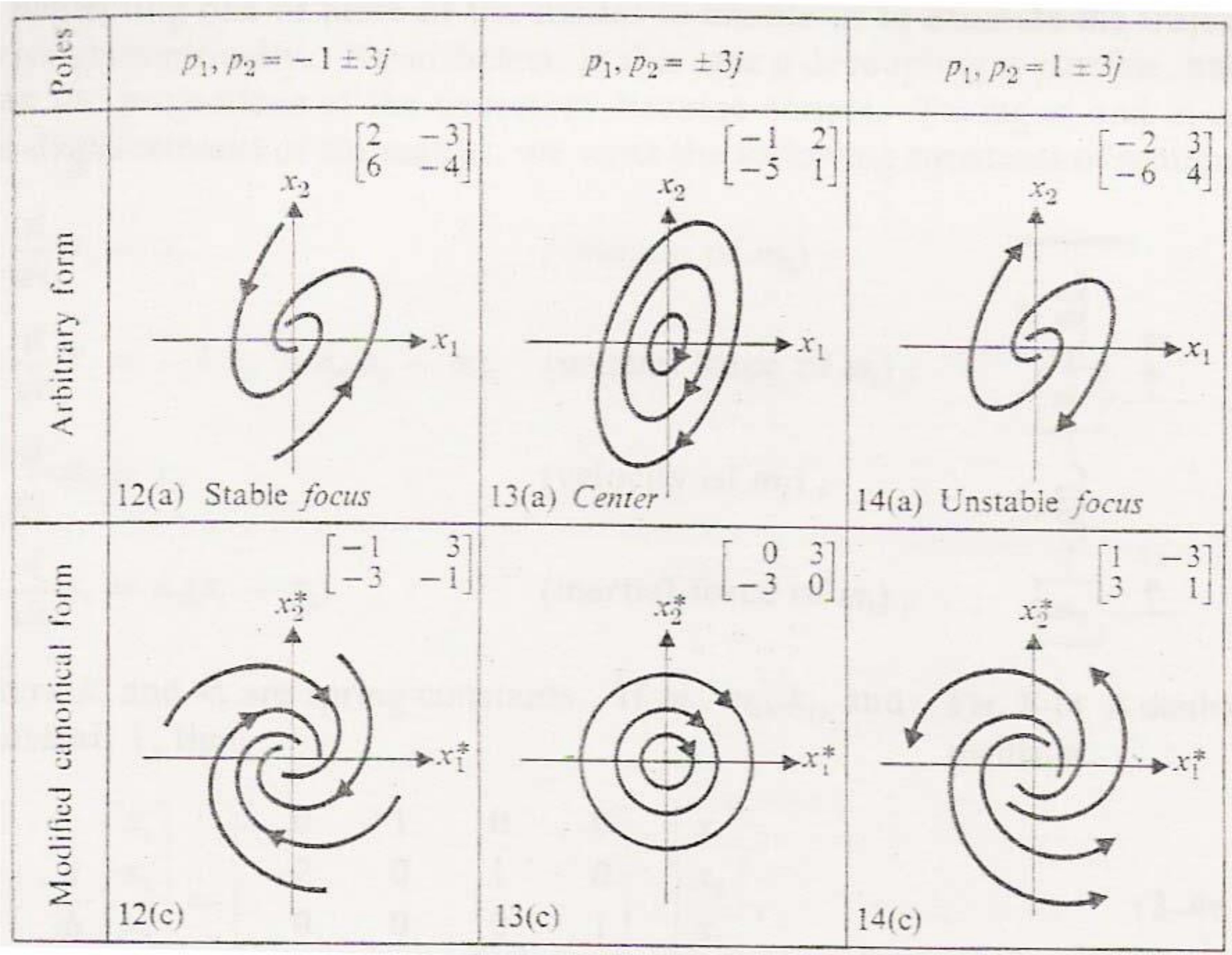
El rango de A se escribe como Rag A o rg(A).

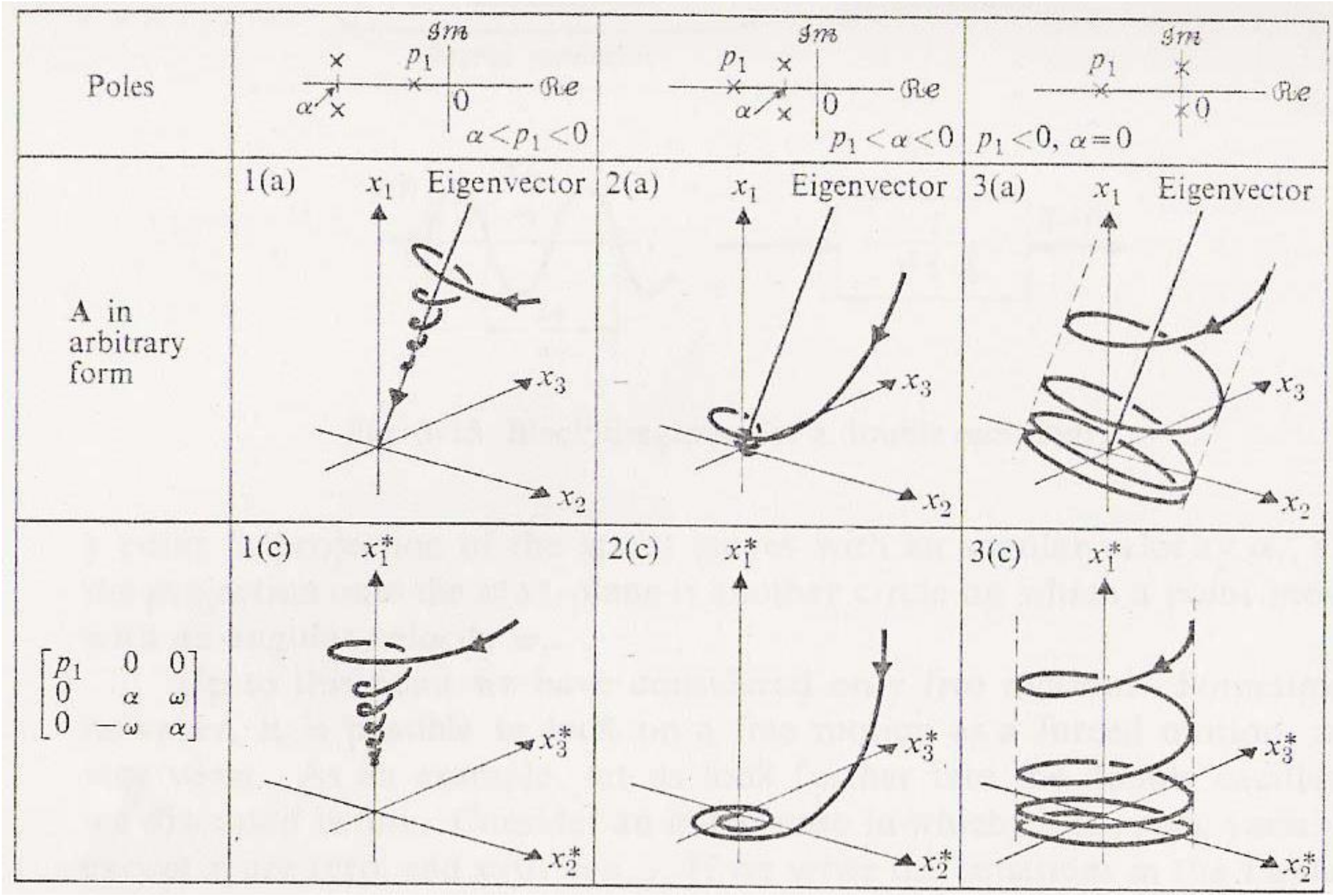
Movimiento en el espacio de estado.

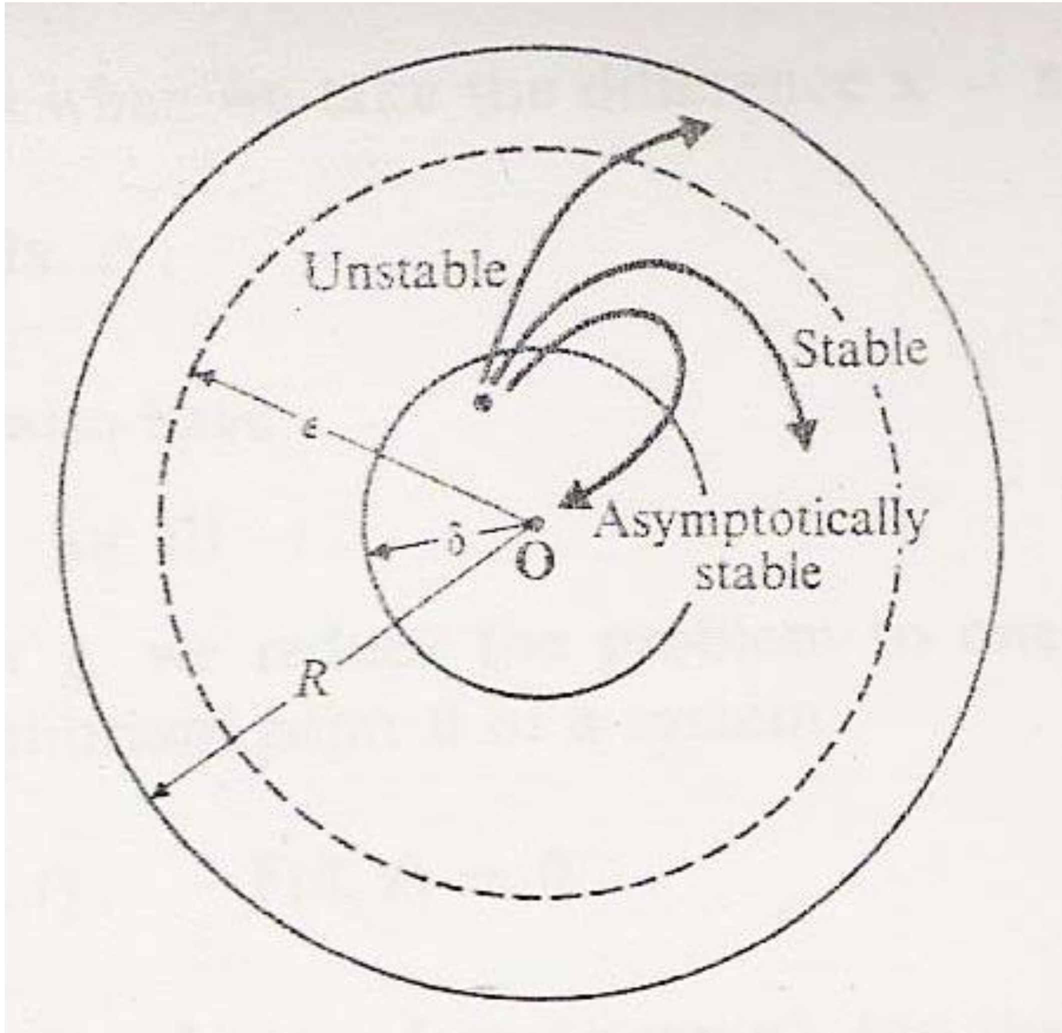



One pole zero
Poles
Arbitrary form
Canonical form
p1 = −5, p2 = 0
p1 = 5, p2 = 0
−4 2
2 −1
4 −2
−2 1
−5 0
0 0
5 0
0 0
4(a)
5(a)
4(c)
5(c)


Poles
$p_1 = p_2 = -2$
$p_1 = p_2 = 0$
$p_1 = p_2 = 2$
Coupled
Arbitrary form
Jordan canonical form
Decoupled (Diagonal)
$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
x_1
x_2
x_1^*
x_2^*
6(a)
7(a)
8(a)
6(c)
7(c)
8(c)
9 Stable *star*
10
11 Unstable *star*


Poles
$p_1, p_2 = -1 \pm 3j$
$p_1, p_2 = \pm 3j$
$p_1, p_2 = 1 \pm 3j$
Arbitrary form
$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$
x_2
x_1
12(a) Stable *focus*
$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$
x_2
x_1
13(a) *Center*
$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$
x_2
x_1
14(a) Unstable *focus*
Modified canonical form
$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$
x_2^*
x_1^*
12(c)
$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$
x_2^*
x_1^*
13(c)
$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
x_2^*
x_1^*
14(c)


Poles
Im
p1
Re
0
α < p1 < 0
p1 < α < 0
p1 < 0, α = 0
A in arbitrary form
1(a)
2(a)
3(a)
x1
Eigenvector
x2
x3
1(c)
2(c)
3(c)
x1*
x2*
x3*
p1 0 0
0 α ω
0 −ω α


Unstable
Stable
ε
δ
O
Asymptotically
stable
R