Trabajo Práctico N° 1: TRANSFORMADA DE LAPLACE

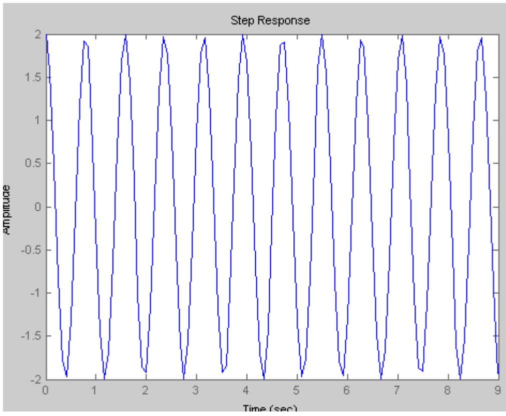
La transformada de Laplace es una herramienta matemática que permite, resolver ecuaciones diferenciales lineales.
Al aplicar este método, se transforma una ecuación diferencial en el dominio el tiempo, en una ecuación algebraica en el dominio de la variable compleja **s.**
Una vez en el dominio de s, se resuelve la ecuación algebraica, para después aplicar la transformación inversa, llamada antitransformada, con lo que se retorna al dominio del tiempo, obteniendo así la solución de la ecuación diferencial.
La transformada de Laplace se define:

$$\boxed{L[\,f(t)\,] \underset{def}{=} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)}$$

Ejercitación:

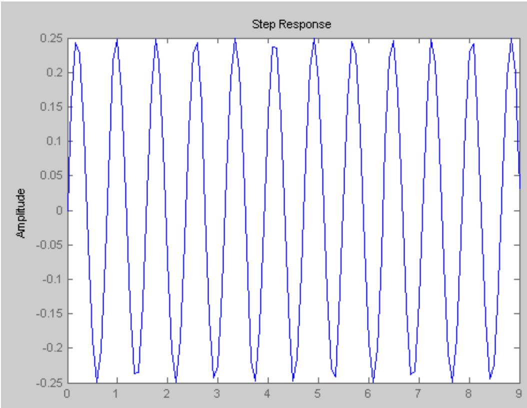
Ej 1) Resolver aplicando Transformada de Laplace. Aplicar el teorema del valor inicial.

a) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + 64.x = 0$ con: $\begin{cases} \dfrac{dx(0)}{dt} = 0 \\ x(0) = 2 \end{cases}$



Rta: $x(t) = 2.\cos.8t$

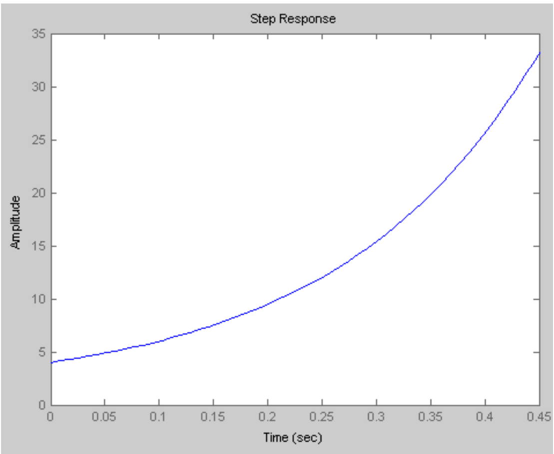
b) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + 64.x = 0$ con: $\begin{cases} \dfrac{dx(0)}{dt} = 2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$



Rta: $x(t)=\frac{1}{4}.sen.8t$

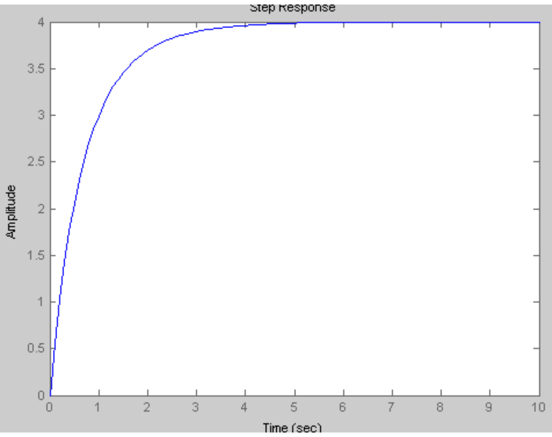
Ej 2) Determinar mediante las fracciones parciales, la variación con el tiempo de las siguientes señales dadas por sus transformadas de Laplace. Aplicar teorema del valor inicial y final

a) $X(s)=\dfrac{4s-5}{s^2-s-2}$



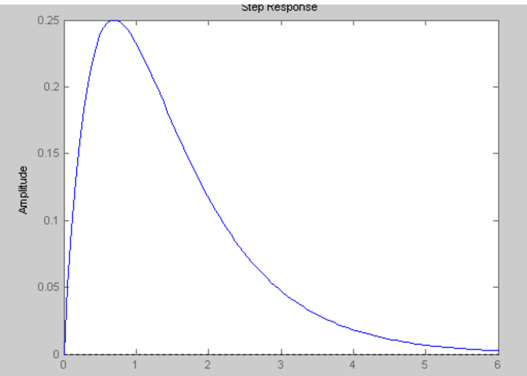
Rta: $x(t)=e^{2t}+3e^{-t}$

b) $X(s)=\dfrac{6s+8}{s(s+1)(s+2)}$



Rta: $x(t) = 4 - 2e^{-t} - 2e^{-2t}$

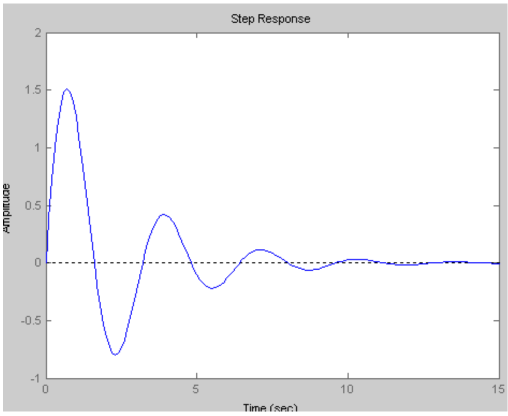
c) $X(s) = \dfrac{1}{s^2 + 3s + 2}$



Rta: $x(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

d)

$$X(s) = \frac{4}{s^2 + 0{,}8s + 4}$$



Rta: $x(t) = 2{,}04.e^{-0{,}4t}.sen(1{,}96t)$

Transformadas de Laplace

Transformada de Laplace	*Función del tiempo*	*Descripción de la función del tiempo*
1		Impulso unitario
$\frac{1}{s}$		Función escalón unitario
$\frac{e^{-st}}{s}$		Función escalón unitario retrasada
$\frac{1-e^{-st}}{s}$		Pulso rectangular de duración T
$\frac{1}{s^2}$	t	Función rampa de pendiente unitaria
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	Decaimiento exponencial
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t\,e^{-at}$	
$\frac{2}{(s+a)^3}$	$t^2\,e^{-at}$	
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	Crecimiento exponencial
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t-\frac{(1-e^{-at})}{a}$	
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-at}-at\,e^{-at}$	
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	
$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1-\frac{b}{b-a}e^{-at}+\frac{a}{b-a}e^{-bt}$	
$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(c-a)(a-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{sen}\,\omega t$	Onda senoidal
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	Onda cosenoidal
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\,\mathrm{sen}\,\omega t$	Onda senoidal amortiguada
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	Onda cosenoidal amortiguada
$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$	$1-\cos\omega t$	
$\frac{\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}$	$\frac{\omega}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}e^{-\zeta\omega t}\,\mathrm{sen}\,[\omega\sqrt{(1-\zeta^2)}t]$	
$\frac{\omega^2}{s(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)}$	$1-\frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}e^{-\zeta\omega t}\,\mathrm{sen}\,[\omega\sqrt{(1-\zeta^2)}t+\phi]$	
con $\zeta<1$	con $\zeta=\cos\phi$	

Ejercicios Optativos

1) Resolver aplicando Transformada de Laplace. Aplicar el teorema del valor inicial y final si fuera posible:

a)

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Rta: $2e^{-t} - e^{-2t}$

b)

$$\boldsymbol{F(s)} = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}$$

Rta: $5e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t + 2e^{-t}\cos 2t$

c)

$$F(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Rta: f(t) = 10-10*exp(-t) for t >= 0

d)

$$F_1(s) = \frac{6s+3}{s^2}$$

.

Rta: f1(t) = (3t +6) for t >= 0

e) ¿Cuál es la solución de la siguiente ecuación diferencial?

Condiciones iniciales x(0)=3 y $\frac{dx(0)}{dt} = 0$

$$2\ddot{x} + 7\dot{x} + 3x = 0$$

Rta: 3,6*exp(-0,5t) – 0,6*exp(-3t) for t >= 0

f) ¿Cuál es la solución de la siguiente ecuación diferencial?

Condiciones iniciales x(0-)=0, δ(t)= impulso unitario

$$\dot{x} + 2x = \delta(t)$$

Rta: exp(-2t) for t >= 0

g) ¿Cuál es la solución de la siguiente ecuación diferencial?

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0, \qquad x(0) = a, \qquad \dot{x}(0) = b$$

Rta: $(2a + b)e^{-t} - (a + b)e^{-2t}, \quad \text{para } t \geq 0$