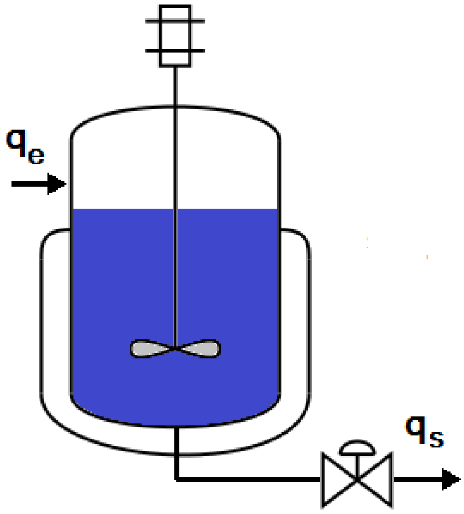
TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

SISTEMAS DINÁMICOS

En la figura se observa un recipiente que tiene una entrada de materia (q_e) y una salida (q_s). La salida está restringida mediante una válvula.



Si se está trabajando en estado estacionario, lo que entra es igual a lo que sale; es decir, que un balance de materia sería:

$$q_e = q_s \rightarrow q_e - q_s = 0$$

El valor cero del segundo miembro significa que no hay acumulación de materia dentro del tanque; en otras palabras, el nivel de líquido permanece constante.

Si en un momento se abre la válvula de salida, el caudal q_s va a aumentar; sin embargo, q_e se mantendrá constante. Dada esta situación el sistema deja de estar en estado estacionario, y se comporta en forma dinámica, donde los parámetros cambian a medida que transcurre el tiempo.

En un sistema dinámico, el balance de materia se plantea de la siguiente manera:

$$\frac{dm(t)}{dt} = q_e(t) - q_s(t)$$

En este caso, la expresión matemática nos dice que la cantidad de materia dentro del recipiente está cambiando en el tiempo. Esto se debe al desbalance generado entre la materia que entra y la que sale del sistema.

Para resolver la ecuación diferencial se expresa la masa en función del nivel del líquido, según la expresión siguiente:

$$m(t) = \rho . V(t) = A . \rho . h(t)$$

Donde se considera que tanto el área como la densidad se mantienen constantes, por lo que la única variable es la altura del líquido.

Por otro lado, el caudal de salida del tanque, depende de la presión hidrostática del líquido dentro del mismo, y ésta depende de la altura del nivel del fluido, según la siguiente ley hidrodinámica:

$$q_s(t) = C_v \sqrt{h(t)}$$

Donde C_v es una constante característica de la válvula, denominada constante de descarga. Al reemplazar estas expresiones en la ecuación diferencial y despejar, se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A.\rho} q_e(t) - \frac{1}{A.\rho} C_v \sqrt{h(t)}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{A.\rho} C_v \sqrt{h(t)} = \frac{1}{A.\rho} q_e(t)$$

Las partes constitutivas de esta ecuación diferencial son las siguientes:

- La función *h(t)* representa un cambio en una variable operativa del sistema estudiado, constituye la respuesta del sistema a cambios producidos en el funcionamiento del mismo. En este caso es la altura del nivel de líquido, pero podría ser una presión, una temperatura, una humedad, un pH, etc.
- La función $q_e(t)$ representa la causa por la cual cambia el nivel de líquido, es lo que se denomina perturbación.
- La ecuación diferencial incluye además valores como área, densidad y constante de descarga, que permiten describir el sistema matemáticamente.

Para resolver esta ecuación diferencial, se hará uso de la Transformada de Laplace, la cual transformará la ecuación diferencial en el campo real, en una ecuación algebraica expresada en el campo complejo. La solución mencionada es del tipo:

$$Y(s) = G(s).X(s)$$

donde s representa la variable independiente, y pertenece al campo complejo. Por otro lado:

X(s) representa a la función de perturbación.
G(s) representa el comportamiento dinámico del sistema y recibe el nombre de función de transferencia.
Y(s) representa la respuesta del sistema a la perturbación dada.

Los sistemas dinámicos en el campo complejo están representados generalmente por una expresión racional compleja (cociente de polinomios), y el mismo corresponde a la función *G(s)* dada anteriormente.

La resolución del cálculo del nivel de líquido en un tanque da como resultado una expresión matemática del siguiente tipo:

$$H(s) = \frac{K}{\tau.s + 1}\, Q_e(s)$$

Donde K y τ son valores constantes reales, denominados ganancia y constante de tiempo respectivamente. Si se compara con lo dicho anteriormente, se tienen las siguientes equivalencias:

$$Y(s) = H(s)$$

$$G(s) = \frac{K}{\tau.s + 1}$$

$$X(s) = Q_e(s)$$

Ejercicio 1

Se considerará el caso particular en que K=1 y $\tau = 5$.
Obtener la representación gráfica de la respuesta del sistema al escalón, rampa e impulso:

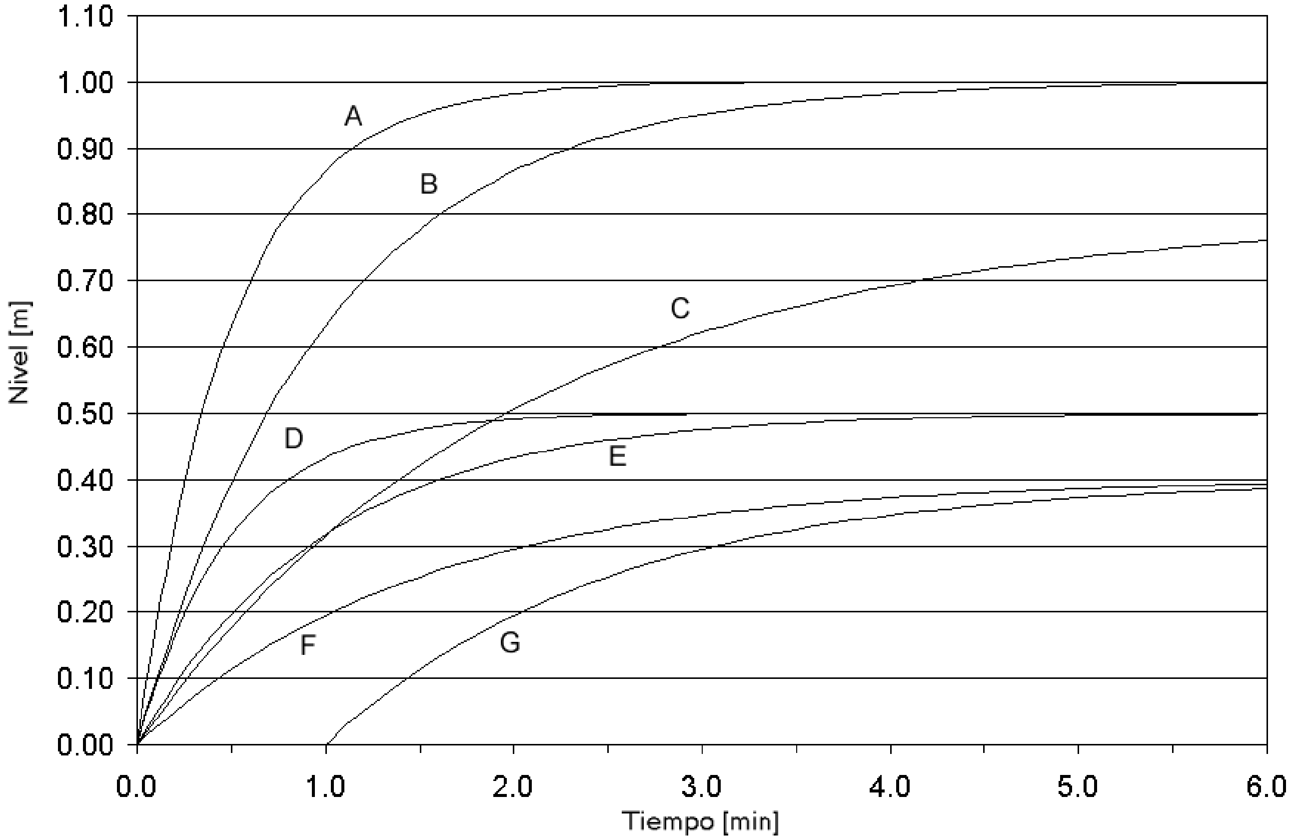
Ejercicio 2

A distintos tanques se los ha perturbado, para lo cual se ha aumentado el caudal de entrada en 1 l/s. En el gráfico se pueden observar las respuestas obtenidas en el nivel de cada uno de los tanques. Se debe realizar lo siguiente:

a- Indicar a qué función de respuesta temporal corresponde cada una de las curvas.
b- Escribir las funciones de transferencia que correspondan en cada caso.

$a)\ y = 1 - e^{-t}$ $\quad b)\ y = 0.9\left(1 - e^{-t/2}\right)$ $\quad c)\ y = 0.5\left(1 - e^{-t}\right)$ $\quad d)\ y = 1 - e^{-2t}$ $\quad e)\ y = 0.5\left(1 - e^{-t/0.75}\right)$

$f)\ y = 0.5\left(1 - e^{-2t}\right)$ $\quad g)\ y = 0.8\left(1 - e^{-t/2}\right)$ $\quad h)\ y = 0.4\left(1 - e^{-t/1.5}\right)$ $\quad j)\ y = 0.38\left[1 - e^{\frac{-2(t-1)}{3}}\right]$ $\quad g)\ y = 0.4\left[1 - e^{\frac{-2(t-1)}{3}}\right]$



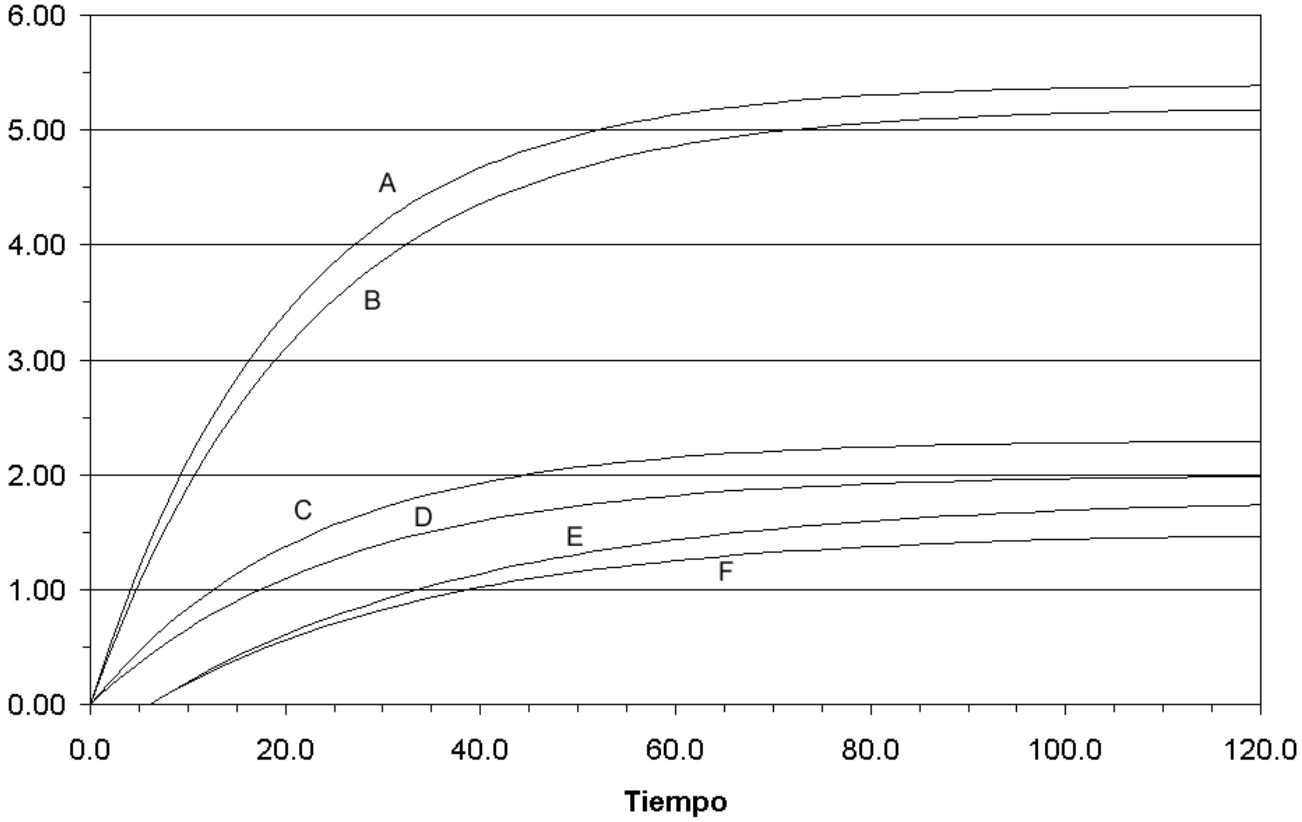
Ejercicio 3

Dadas las siguientes funciones de respuesta temporal, frente a una perturbación de tipo escalón unitario:

Indicar a qué curvas corresponden en el gráfico.

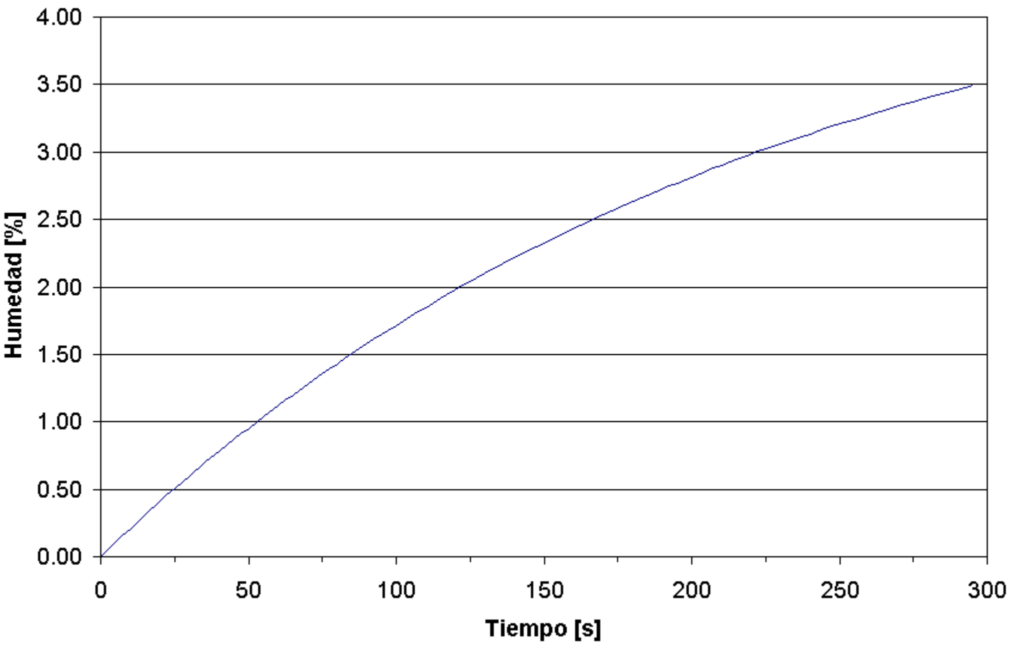
$$a)\ y = 2.3\left(1-e^{-\frac{t}{22}}\right) \qquad b)\ y = 2.0\left(1-e^{-t/25}\right)$$

$$c)\ y = 1.8\left[1-e^{-\frac{t-6}{34}}\right] \qquad d)\ y = 5.2\left(1-e^{-\frac{t}{22}}\right)$$



Ejercicio 4

Existe un equipo deshumidificador, se disminuyó el caudal de aire caliente de 3 m^3/s a 2.5 m^3/s, tras lo cual la humedad comenzó a aumentar de acuerdo a lo indicado en la gráfica siguiente. Sin embargo, la prueba debió ser suspendida porque el aumento de humedad fue superior a lo esperado. Con la respuesta parcial obtenida, estime los valores de ganancia y de la constante de tiempo del proceso.



Ejercicio 5

Graficar la respuesta temporal aproximada del sistema definido por los siguientes parámetros: ganancia igual a 1, constante de tiempo igual a 2 min Graficar las respuestas teniendo en cuenta que el sistema es forzado mediante:

a- Una función escalón de 2 unidades de altura.
b- Una función rampa con una pendiente de 0.5.

Ejercicio 6

Si un sistema está definido por una ganancia igual a -2, constante de tiempo igual a 3 min y tiempo muerto igual a 10 s. Graficar la respuesta temporal aproximada si las funciones de forzamiento son las del ejercicio 5.

a- Una función escalón de 2 unidades de altura.
b- Una función rampa con una pendiente de 0.5.

Ejercicio 7

Calcular la antitransformada de Laplace de los ejercicios 5 y 6 si se perturba los sistemas mediante una función impulso.

Ejercicio 8

Dadas las siguientes funciones de transferencia:

$$a)\, Y(s) = \frac{1}{0.36 s^2 + 2.40 s + 1} X(s)$$

$$b)\, Y(s) = \frac{2}{0.36 s^2 + 1} X(s)$$

$$c)\, Y(s) = \frac{1}{0.36 s^2 + 6 s + 1} X(s)$$

$$d)\, Y(s) = \frac{1}{0.60 s + 1} X(s)$$

$$e)\, Y(s) = \frac{1}{0.36 s^2 + 1.20 s + 1} X(s)$$

$$f)\, Y(s) = \frac{1}{0.36 s^2 + 0.24 s + 1} X(s)$$

$$g)\, Y(s) = \frac{1}{0.36 s^2 + 1} X(s)$$

$$h)\, Y(s) = \frac{1}{0.6 s + 1} e^{-s} X(s)$$

$$i)\, Y(s) = \frac{1}{0.36 s^2 + 0.12 s + 1} X(s)$$

Si se aplica una función de forzamiento del tipo escalón unitario, indicar cuál es la respuesta temporal, según las dadas en la figura 1.

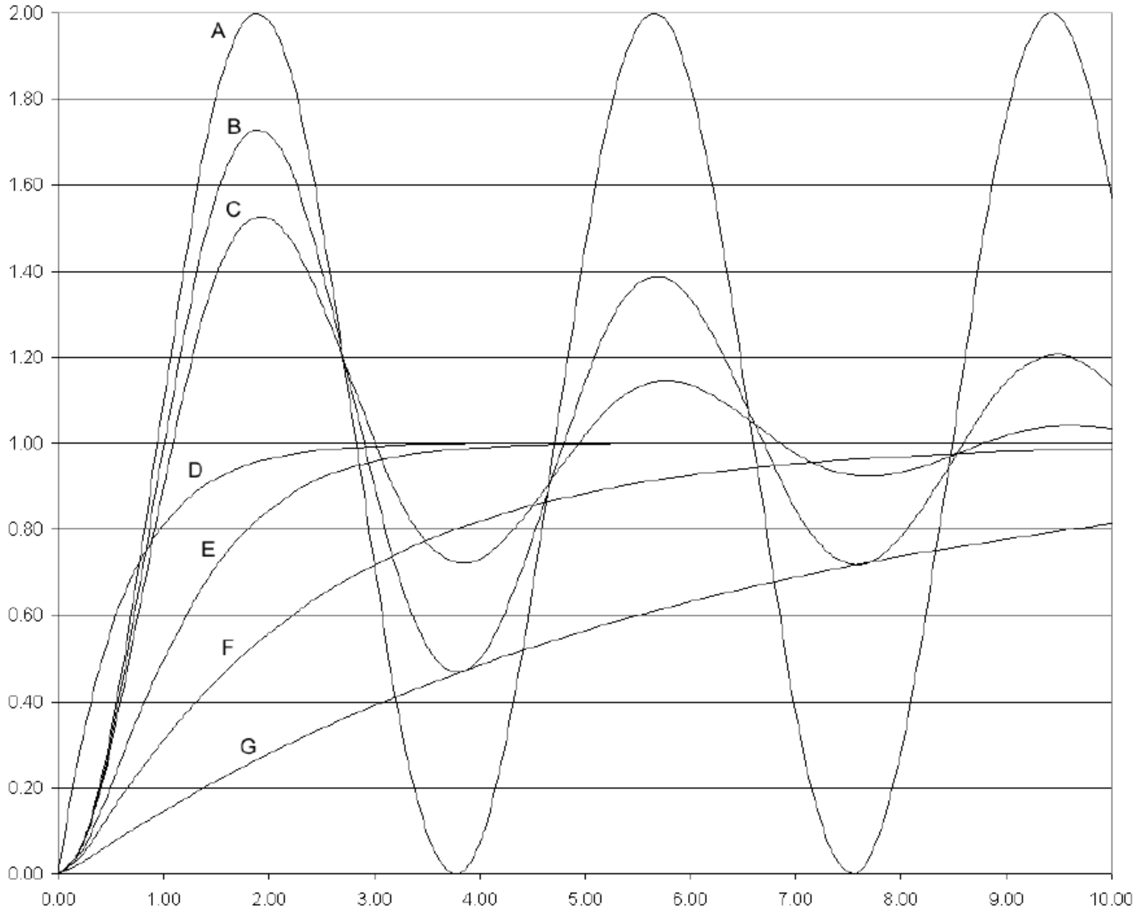


Figura 1

Ejercicio 9

Dadas las siguientes funciones de transferencia:

$$a)\,Y(s)=\frac{1}{0.25\,s^2+2\,s+1}X(s)$$

$$b)\,Y(s)=\frac{1}{0.50\,s^2+1}X(s)$$

$$c)\,Y(s)=\frac{1}{0.0576\,s^2+0.48\,s+1}X(s)$$

$$d)\,Y(s)=\frac{1}{1.6538\,s^2+5.1440\,s+1}X(s)$$

$$e)\,Y(s)=\frac{1.05}{0.25\,s^2+0.20\,s+1}X(s)$$

$$f)\,Y(s)=\frac{1}{1.00\,s^2+0.40\,s+1}X(s)$$

$$h)\,Y(s)=\frac{1.10}{0.25\,s^2+0.20\,s+1}X(s)$$

$$i)\,Y(s)=\frac{1}{0.80\,s+1}X(s)$$

$$i)\,Y(s)=\frac{1}{0.25\,s^2+0.20\,s+1}X(s)$$

Realizar el mismo trabajo dado en el ejercicio 1, según las respuestas temporales dadas en la figura 2.

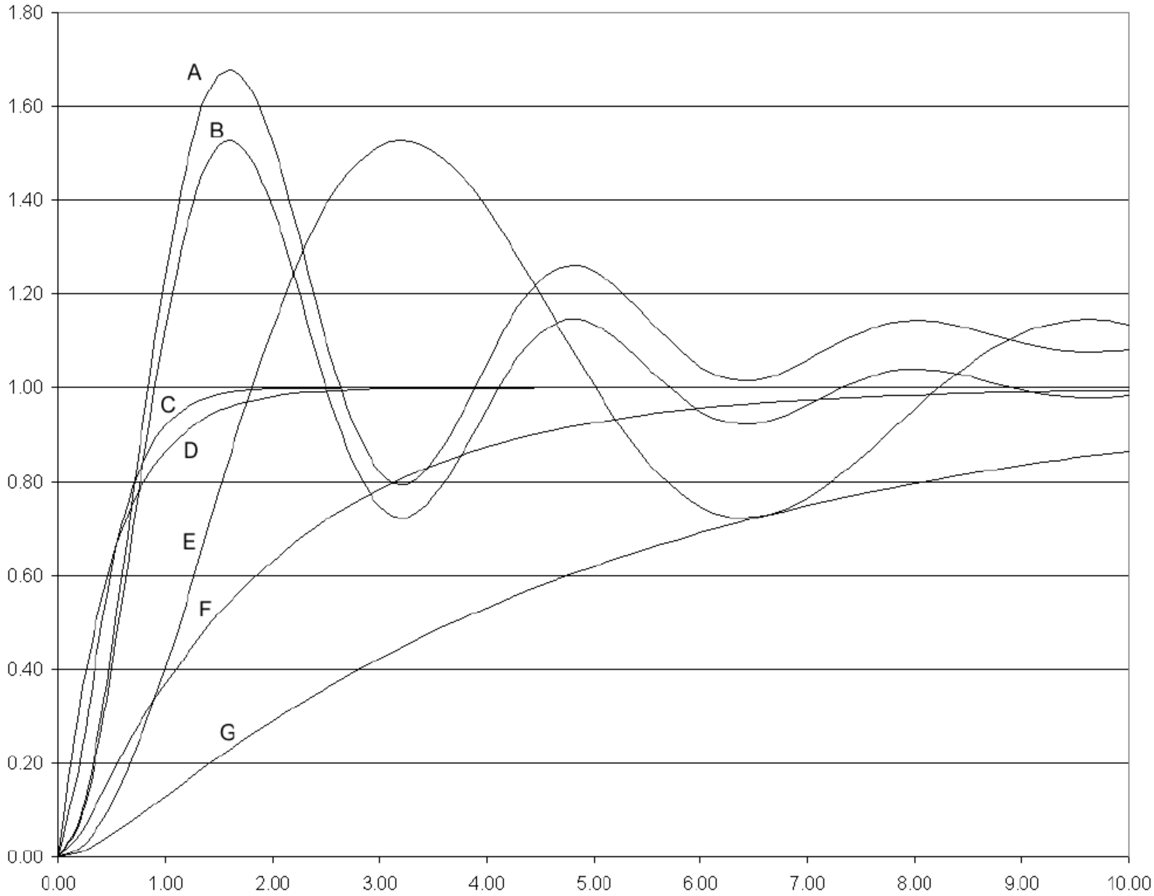


Figura 2