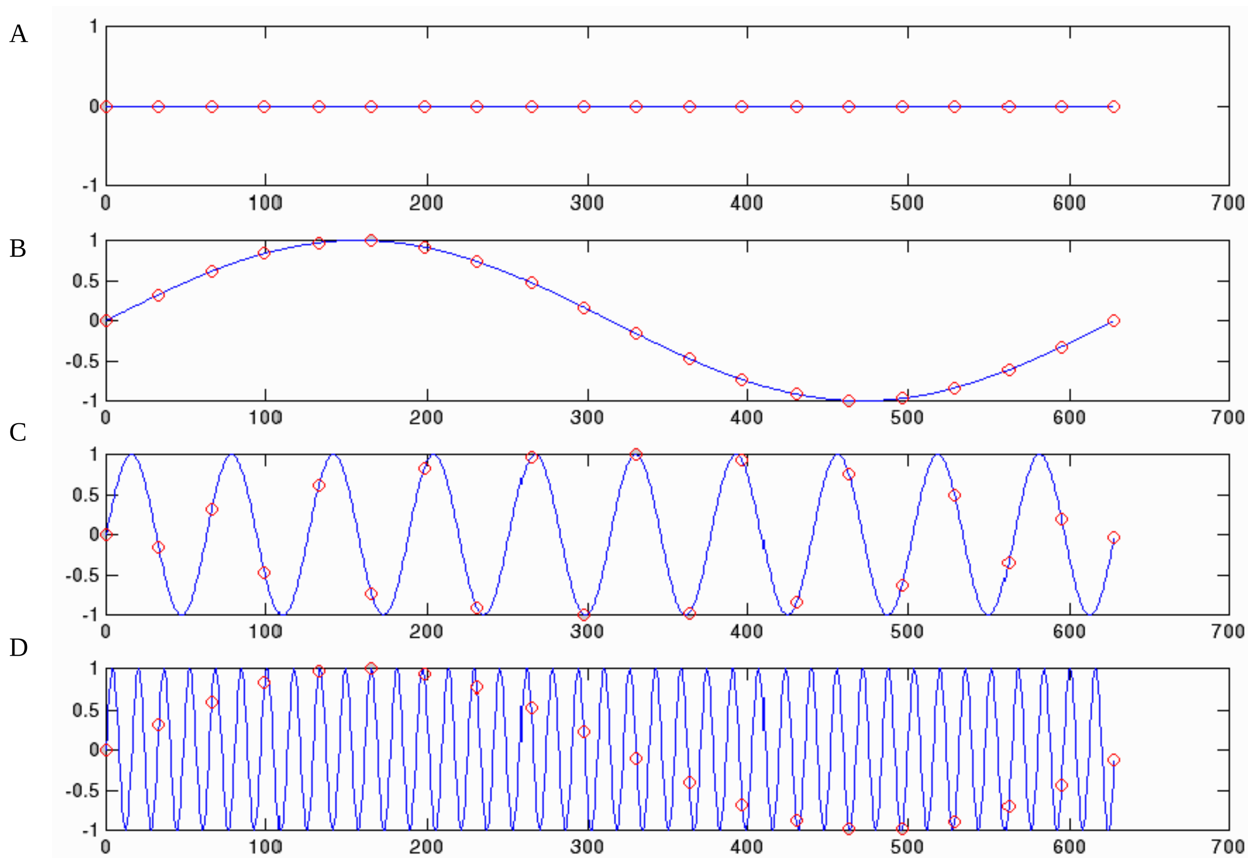
Teorema del muestreo (Teorema de Nyquist-Shannon)

Hablamos de muestreo periódico de una señal analógica cuando tomamos mediciones de la misma a intervalos iguales. Por ejemplo cuando se graba una señal de audio a la PC mediante una placa de sonido, el conversor A/D de la PC estará digitalizando la señal a una cierta frecuencia tal como 11, 22, ó 44 kHz, denominada *frecuencia de muestreo*.

Es evidente que si la frecuencia de muestreo es muy baja, es decir mediciones demasiado espaciadas, se perderán “detalles” de la señal original. Mediante una simple demostración gráfica se puede ver. En las figuras A-B-C-D hemos representado cuatros señales distintas (en línea azul) muestreadas periódicamente a igual frecuencia (los círculos rojos denotan las “muestras”). En A y B las señales aparecen correctamente representadas por las muestras, en C la velocidad de muestreo parece insuficiente, y en D las muestras **representan una señal como la de B,** es decir la señal de D es un “alias” de la señal de B. Este efecto se denomina en inglés “aliasing”.



El Teorema del Muestreo, o Teorema de Nyquist-Shannon, establece que la frecuencia mínima de muestreo necesaria para evitar el “aliasing” debe ser.

$$\mathbf{f_m > 2.BW}$$

con f_m: frecuencia de muestreo, **BW**: ancho de banda de la señal a muestrear ($BW = f_{max} - f_{min}$)
Para señales con $f_{min} = 0$, se puede expresar como

$$\mathbf{f_m > 2.f_{max}}$$

Para demostrar este teorema debemos aplicar conceptos básicos de series de Fourier y trigonometría.

Conceptos básicos de series de fourier:

Una función **s**(t) periódica en el tiempo, con período T, puede ser representada por una sumatoria de funciones senoidales del tipo

$$\mathbf{s}(t)=\mathbf{c_0}+\mathbf{c_1}.\cos(2.\pi.\mathbf{f}.t+\phi_1)+\mathbf{c_2}.\cos(2.\pi.\mathbf{2.f}.t+\phi_2)+\mathbf{c_3}.\cos(2.\pi.\mathbf{3.f}.t+\phi_3)+...+\mathbf{c_n}.\cos(2.\pi.\mathbf{n.f}.t+\phi_n)$$

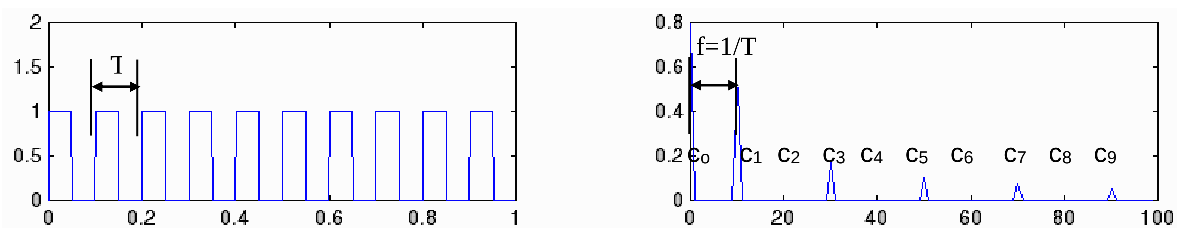
$$=\sum \mathbf{c_k}.\cos(2.\pi.\mathbf{k.f}.t+\phi_k) \quad (k=0...n) \qquad \textbf{[Ec. 1]}$$

es decir una **serie** de componentes cosenoidales de amplitud ck, fase ϕk y frecuencia fk=k.f múltiplo de la frecuencia fundamental f=1/T (la de la función representada). Es la conocida *serie de Fourier*.

La representación de estas amplitudes $\mathbf{c_k}$ sobre un diagrama Amplitud vs frecuencia es lo que denominamos **diagrama espectral** o espectro de frecuencia de la señal. La componente c_0 es la componente de frecuencia 0 (componente de continua).
Podemos hablar así de una función S(**f**), con dominio 0, f, 2f, 3f...nf e imagen c_0, c_1, c_2, c_3... c_n.

La **señal analógica** (que queremos muestrear) en caso de ser periódica tendrá un espectro que será una suma de componentes senoidales de frecuencias espaciadas a intervalos f=1/T o una integral de componentes senoidales de frecuencias infinitamente próximas entre sí

Por ejemplo el espectro de amplitud de una señal s(**t**) cuadrada sigue una ley S(**f**)=1/f (pero con las componentes pares c_2, c_4, c_6... nulas)



Este espectro es teóricamente infinito (ancho de banda infinito). Las señales reales ocupan un ancho de banda finito. Por ejemplo una señal de audio ocupa un rango de frecuencias entre unos 20Hz y 15 kHz.

Nota: Si una señal no es periódica, en vez de una sumatoria de componentes espaciadas a intervalos 1/T, se tiene una integral (no periódica es períodoT infinito, espaciamiento 1/T nulo). La forma de calcular la S(f) de una función no periódica en el tiempo es mediante la Transformada de Fourier.
Aún así, si una señal es no periódica, sus componentes ocuparán una cierta banda de frecuencias.

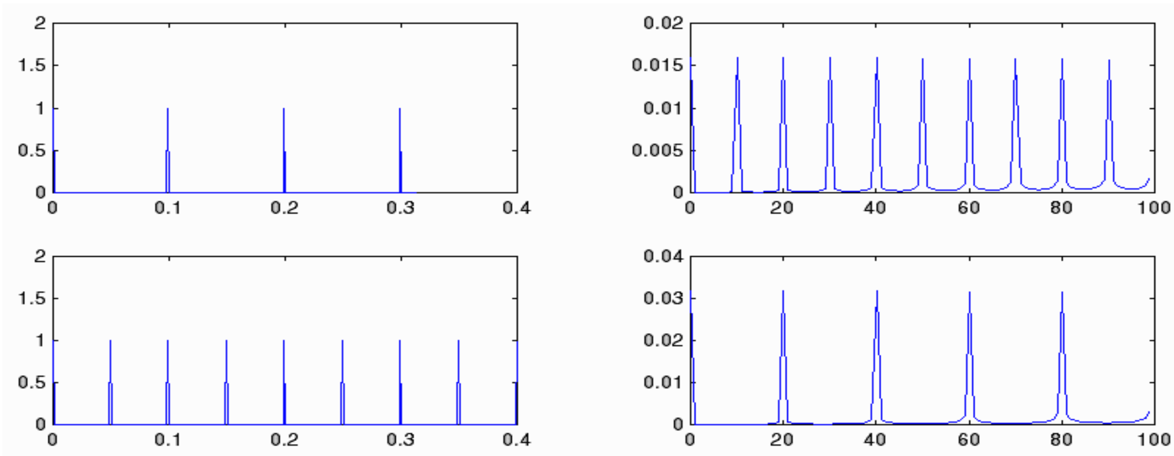
Nos interesa en particular el espectro de la función impulso repetitivo, ya que la señal obtenida como muestreo periódico de una señal analógica equivale al producto de dicha señal analógica por la función impulso repetitivo.

La función **impulso** (no repetitivo) d(t1) es aquella que vale 1 en $t = t_1$ y 0 en $t \neq t_1$

La función **impulso repetitivo** es dr(t)=d(0)+d(T)+d(2.T)+ d(3.T) .... es decir impulsos espaciados T segundos en el tiempo, o lo que es lo mismo con frecuencia de repetición f=1/T.

Esta señal tiene un espectro
Dr(f)=k.[d(0)+d(f)+d(2.f)+d(3.f)+.....], con k cte.
Es decir (sin considerar la fase) $dr(t)=k.(1+\cos(2.\pi.\mathbf{f}.t)+\cos(2.\pi.\mathbf{2.f}.t)+\cos(2.\pi.\mathbf{3.f}.t)+....$ **[Ec. 2]**

En las gráficas siguientes se representan en el dominio del tiempo (izquierda) funciones impulso repetitivo de 10 y 20 Hz y sus espectros correspondientes (derecha).

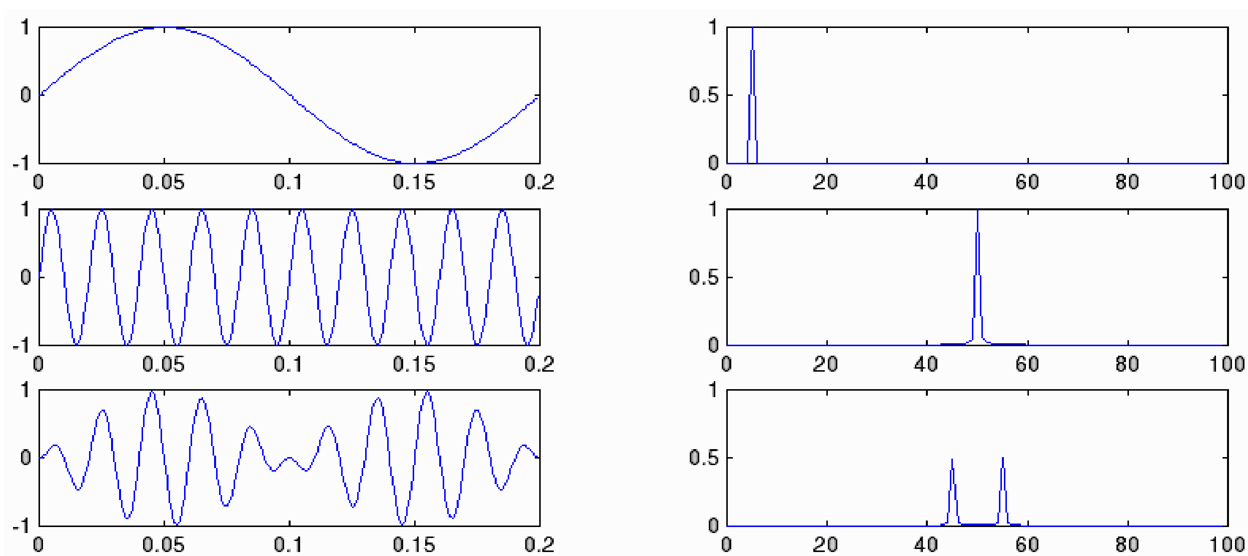


Tiempo (seg) Frecuencia (Hz)

Ya tenemos los elementos para la demostración:

Por trigonometría sabemos que
$\cos(a).\cos(b)=1/2[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$ [**Ec. 3**]

Por ejemplo al multiplicar una señal cosenoidal de amplitud 1 y 5 kHz por una señal cosenoidal de amplitud 1 y 50kHz resultan dos componentes cosenoidales de amplitud 0,5 y 45kHz y 0,5 y 55kHz



Tiempo (ms) Frecuencia (kHz)

Al muestrear la señal analógica s(t) obtenemos una señal s*(t) que equivale al producto de la señal original por la función impulso repetitivo dr(t)
$s^*(t)=s(t).dr(t)$ [**Ec. 4**].

Reemplazando en la **Ec. 4** s(t) por **Ec. 1** y dr(t) por **Ec. 2** (sin considerar la fase ni el factor k en la Ec 2) se obtiene

$$s^*(t)=s(t).dr(t)=\left[\mathbf{c_0}+\mathbf{c_1}.\cos(2.\pi.\mathbf{f_a}.t)+\mathbf{c_2}.\cos(2.\pi.\mathbf{2.f_a}.t)+\ldots+\mathbf{c_n}.\cos(2.\pi.\mathbf{n.f_a}.t)\right].\left[k.(1+\cos(2.\pi.\mathbf{f_m}.t)+\cos(2.\pi.\mathbf{2.f_m}.t)+\cos(2.\pi.\mathbf{3.f_m}.t)+\ldots\right]$$

con $\mathbf{f_a}$ frecuencia de la señal analógica y $\mathbf{f_m}$ frecuencia de muestreo.

aplicando distributiva y la identidad trigonométrica de la Ec. 3 se obtiene una serie de componentes cosenoidales cuyas frecuencias serán

$f_m \pm f_a$, $f_m \pm 2.f_a$, $f_m \pm 3.f_a$.....$2.f_m \pm f_a$, $2.f_m \pm 2.f_a$, $2.f_m \pm 3.f_a$, ... $3.f_m \pm f_a$, $3.f_m \pm 2.f_a$, $3.f_m \pm 3.f_a$...

Agrupadas de la siguiente manera
($f_m \pm f_a$, $f_m \pm 2.f_a$, $f_m \pm 3.f_a$...)($2.f_m \pm f_a$, $2.f_m \pm 2.f_a$, $2.f_m \pm 3.f_a$, ...)($3.f_m \pm f_a$, $3.f_m \pm 2.f_a$, $3.f_m \pm 3.f_a$...)...

Cada grupo reproduce el espectro de la señal s(t) y su “reflejo” sobre las componentes f_m, $2f_m$, $3f_m$.
El mismo análisis es válido para una señal no periódica.

En las gráficas siguientes se ilustra la señal a muestrear y su espectro, la señal muestreada a una frecuencia f_m>fmax, y finalmente la señal muestreada a f_m<fmax, resultando el efecto de “aliasing”.

Nota: en las gráficas se denomina f_s por *sampling* (muestreo) a lo que nosotros hemos denominado f_m