



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD  
DE INGENIERÍA**

# Elementos comprimidos – Columnas Criterios de diseño según CIRSOC 301-2018

## Guía de estudio

**Dr. Francisco J. Crisafulli**

Profesor Titular

2017. Modificado 2020-2021-2023-2024





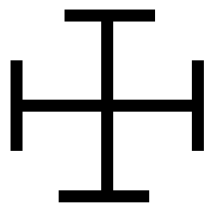








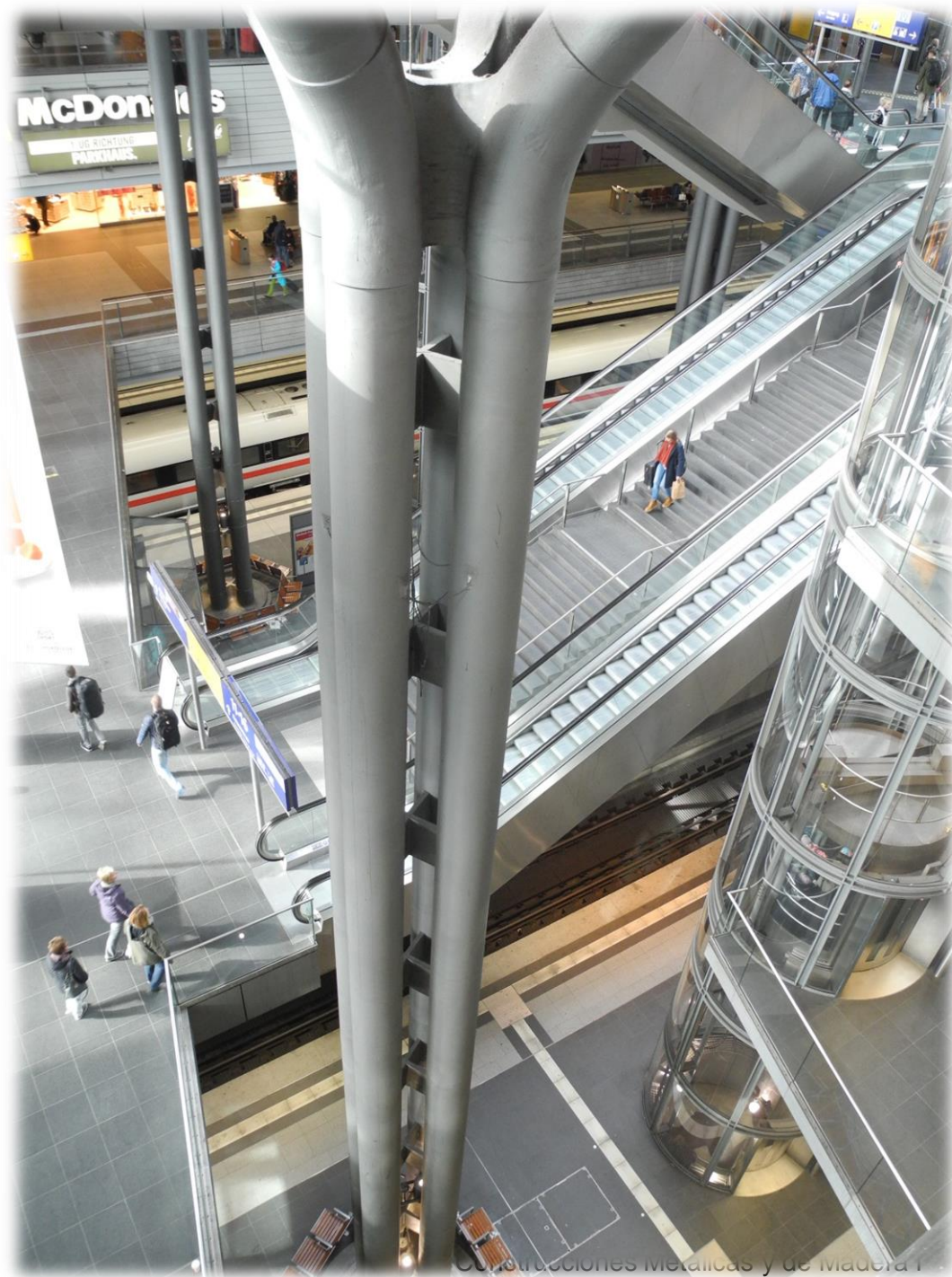




















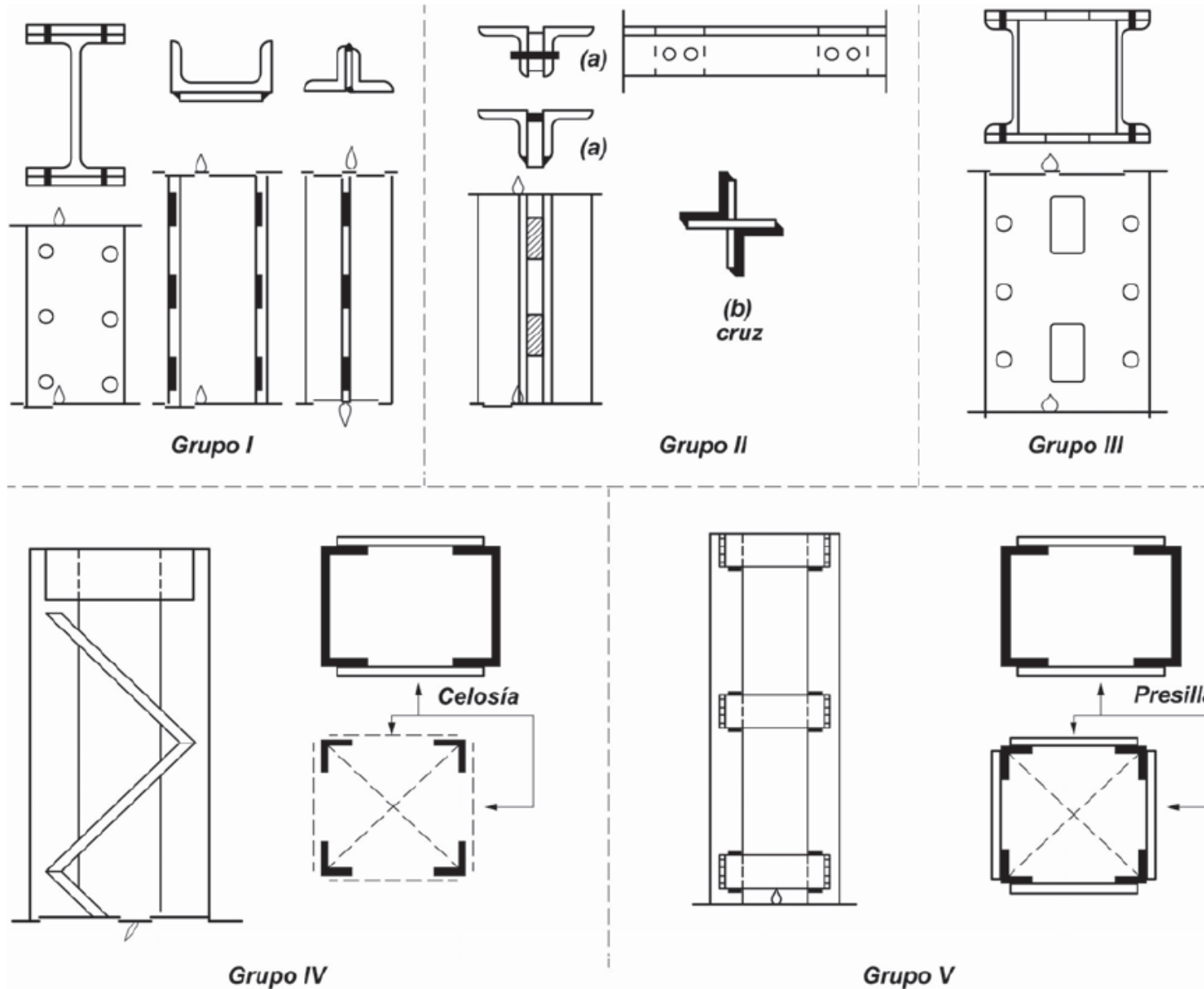


# Elementos comprimidos - Columnas

Columnas simples: Barras prismáticas formadas por perfiles laminados o secciones armadas donde todos los elementos están conectados en forma continua.

Columnas armadas: barras prismáticas formadas por dos o más barras (o conjunto de barras) longitudinales, llamadas cordones, unidas entre ellas a intervalos mediante conectores, cordones de soldadura, celosías o presillas. Se consideran 5 tipos de columnas diferentes (Grupo I a V).

# Columnas armadas





# Elementos comprimidos - Columnas

## Métodos para determinar la resistencia. CIRSOC 301

- Método de análisis directo (MAD). Secciones C.2 y C3.
- Método de la longitud efectiva (*MLE*). Apéndice 7.2
- Método de análisis de primer orden (MAPO). Apéndice 7.3 (no se estudia este procedimiento en el curso)

En este curso se desarrollará en detalle el método de la longitud efectiva, que es el más tradicional y de fácil aplicación para el caso de estructuras simples, como naves industriales, soportes para tanques y equipos, etc.

El método de análisis directo, recientemente incorporado en el reglamento CIRSOC 301, se explicará en forma conceptual; su aplicación resulta más conveniente para el caso de estructuras complejas, como pórticos y pórticos arriostrados de edificios de varios niveles.

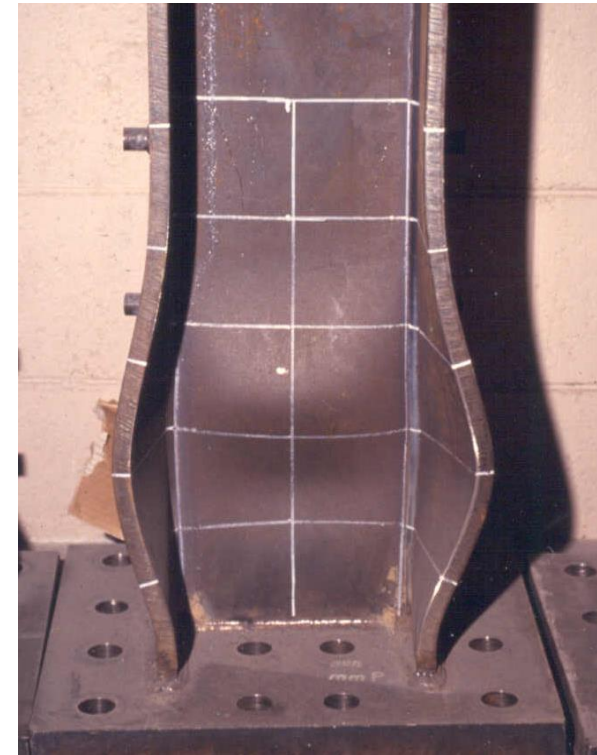
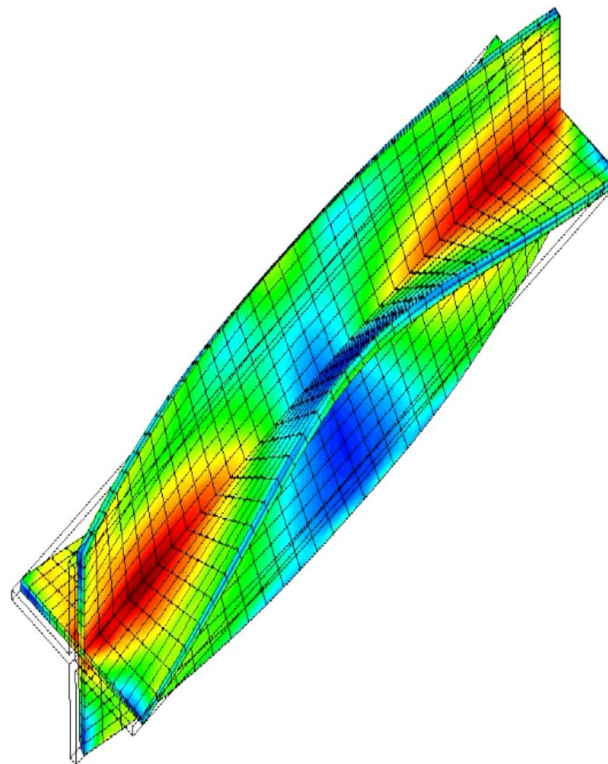


# Problemas de inestabilidad en columnas

## Pandeo global

1. Pandeo flexional
2. Pandeo torsional o flexo-torsional

## 3. Pandeo local o abollamiento





# Columnas simples

## Método de la longitud efectiva



## Estados límites últimos, ELU, en compresión:

- Pandeo flexional.
- Pandeo torsional o flexo-torsional.
- Pandeo local o abollamiento.

$$P_n = F_{cr} A_g (10^{-1})$$

$$\phi = 0.85$$

La ecuación para determinar la resistencia nominal es la misma para todos los casos, sin embargo, el cálculo de la tensión crítica  $F_{cr}$  es diferente.

$A_g$  es el área bruta de la sección.



## Tipos de secciones para consideración del pandeo local

### Miembros flexionados

Sección compacta

Sección No compacta

Sección con elementos esbeltos

Relación Ancho/espesor

0

$\lambda_p$

$\lambda_r$

b/t o h/t

Sección no esbelta

Sección con elementos esbeltos

No se considera pandeo global

Si se considera pandeo global

### Miembros comprimidos

## Reglamento CIRSOC 301-18. Capítulo E. PROYECTO DE MIEMBROS COMPRIMIDOS

- E.2 FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA Y LIMITACIÓN DE ESBELTECES
- E.3 RESISTENCIA NOMINAL A COMPRESIÓN POR PANDEO FLEXIONAL DE MIEMBROS SIN ELEMENTOS ESBELTOS
- E.4 RESISTENCIA NOMINAL A COMPRESIÓN POR PANDEO TORSIONAL Y FLEXO-TORSIONAL
- E.5 RESISTENCIA NOMINAL A COMPRESIÓN DE ÁNGULOS SIMPLES
- E.6 BARRAS ARMADAS
- E.7 RESISTENCIA NOMINAL A COMPRESIÓN DE MIEMBROS CON ELEMENTOS ESBELTOS



## Verificación de pandeo flexional en barras simples sin elementos esbeltos:

Además de la verificación de los estados límites últimos, el reglamento indica que se debe cumplir la siguiente condición:

Esbeltez límite de barras comprimidas:

$$kL/r \leq \lambda_{lim} = 200 \quad (150 \text{ para acciones dinámicas excepto viento}).$$

Barras comprimidas con esbelteces mayores que **200** tienen resistencias de diseño muy bajas que hacen antieconómica su utilización y pueden resultar con deformaciones iniciales, generadas por su transporte y montaje, mayores que las especificadas, lo que vuelve inseguras a las expresiones de resistencia (C E.2)

# Columnas simples. Pandeo flexional

**Ecuación de Euler:** se deduce a partir de las siguientes hipótesis:

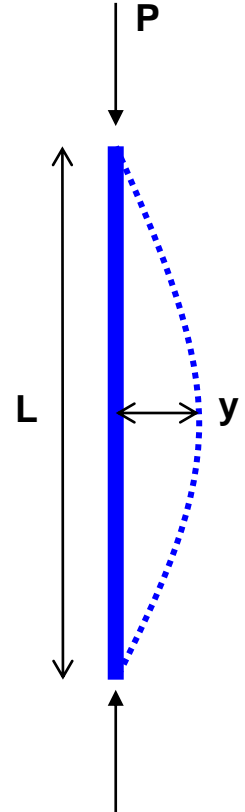
- Barra perfectamente rectilínea y de sección constante.
- Carga axial aplicada en los extremos, en forma centrada.
- Extremos articulados.
- Comportamiento lineal y elástico.

Ecuación diferencial a resolver: 
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0$$

Carga crítica de Euler: 
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Tensión crítica de Euler: 
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

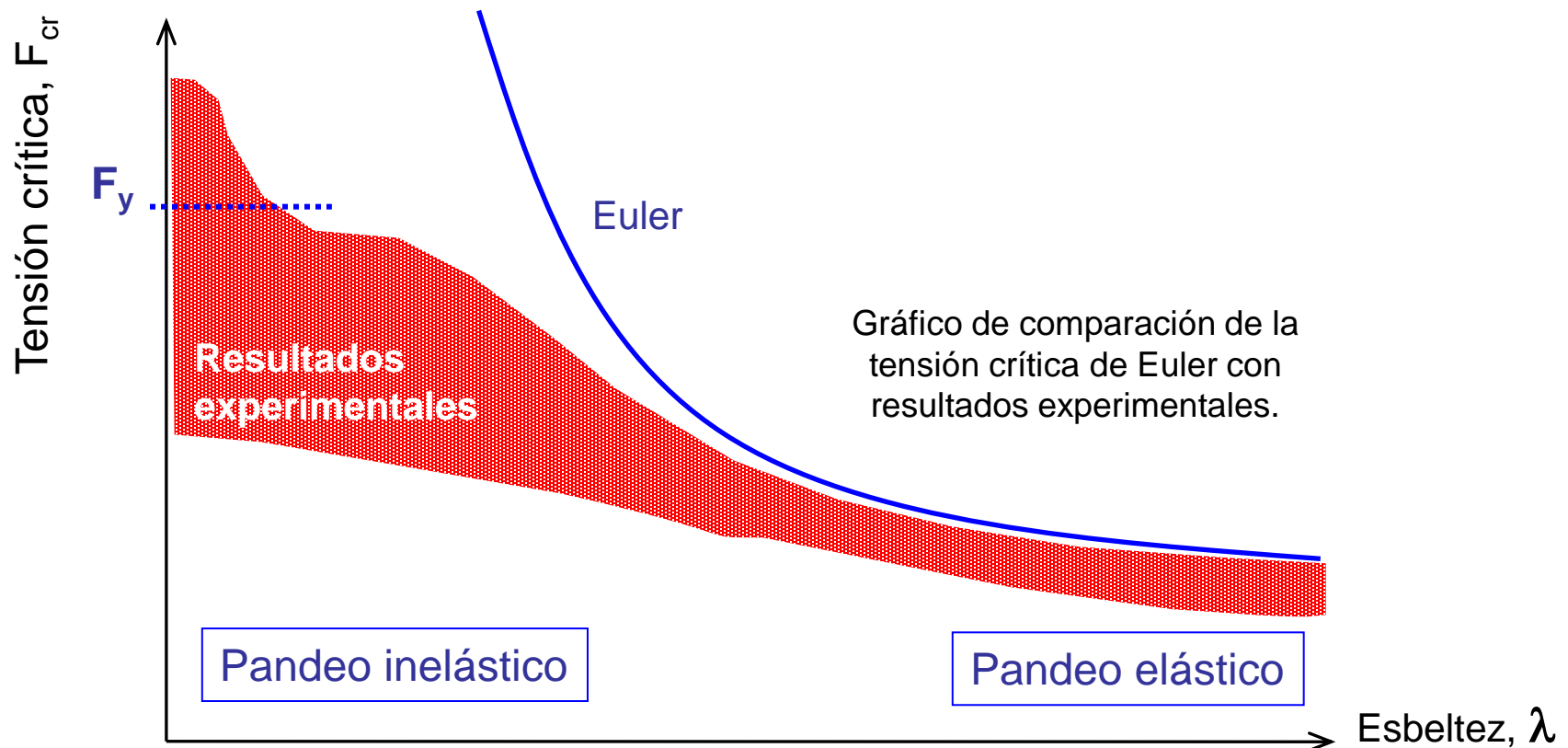
donde  $\lambda = \frac{L}{r}$  es la esbeltez de la barra y  
r el radio de giro en la dirección considerada.





# Columnas simples. Pandeo flexional

La ecuación de Euler, por las hipótesis consideradas en su deducción, es válida sólo para barras esbeltas y predice valores de resistencia mayores que los obtenidos experimentalmente (como se indica en la figura).



# Columnas simples. Pandeo flexional

La ecuación de Euler es válida para el caso de barras articuladas en ambos extremos. En este caso la deformada de pandeo es una semi-onda de una función seno.

Sin embargo, en la práctica es usual que las condiciones de vínculos sean diferentes a las consideradas por Euler para deducir la ecuación.

Para resolver este inconveniente y considerar cualquier tipo de condiciones de vínculo, se introduce un factor de longitud efectiva  $k$  (que puede ser menor o mayor que 1), de modo que la esbeltez de la barra se define como:

$$\lambda = \frac{kL}{r}$$

La longitud efectiva,  $kL$ , permite asimilar el comportamiento frente a pandeo flexional de una barra comprimida con cualquier condición de vínculo en sus extremos al de una barra biarticulada equivalente. También permite considerar diferentes condiciones de carga o variaciones de la sección.

Luego veremos cómo se determina el factor  $k$  para distintos casos.

# Columnas simples. Pandeo flexional

A lo largo del tiempo se han propuestos distintas teorías y ecuaciones para determinar la resistencia de barras comprimidas:

- Teoría del módulo tangente (Engesser, 1889).
- Teoría del doble módulo o módulo reducido (Engesser – Jasinki, 1895).
- Teoría de Shanley (1946).

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} f(E, E_t, I_1, I_2)$$

Ecuaciones de diseño (columnas reales): consideran el efecto de las tensiones residuales, defectos por curvatura inicial, tipo de perfil y acero.

- Curvas “SSRC”: 3 curvas.
- Eurocode 3: 4 curvas.
- AISC – LRFD: 1 curva ( $e=L/1500$ ).

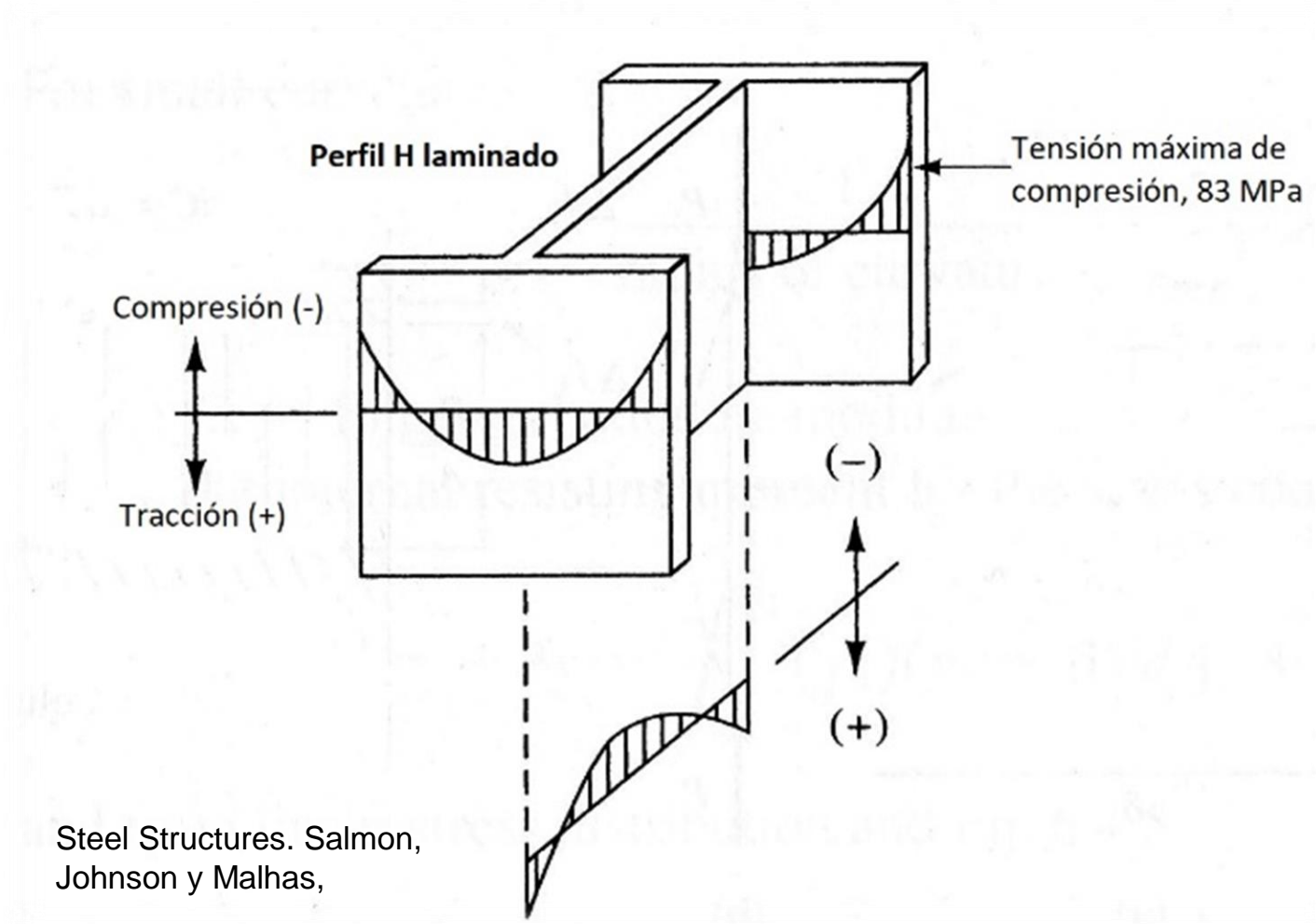


Las tensiones residuales son tensiones inducidas en las secciones de acero debido al proceso de fabricación, ya sean perfiles laminados o secciones armadas en las que varias placas de acero se conectan entre si mediante soldadura.

Las tensiones residuales se distribuyen en la sección con variaciones complejas, y son autoequilibradas (esto es su resultante es nula).

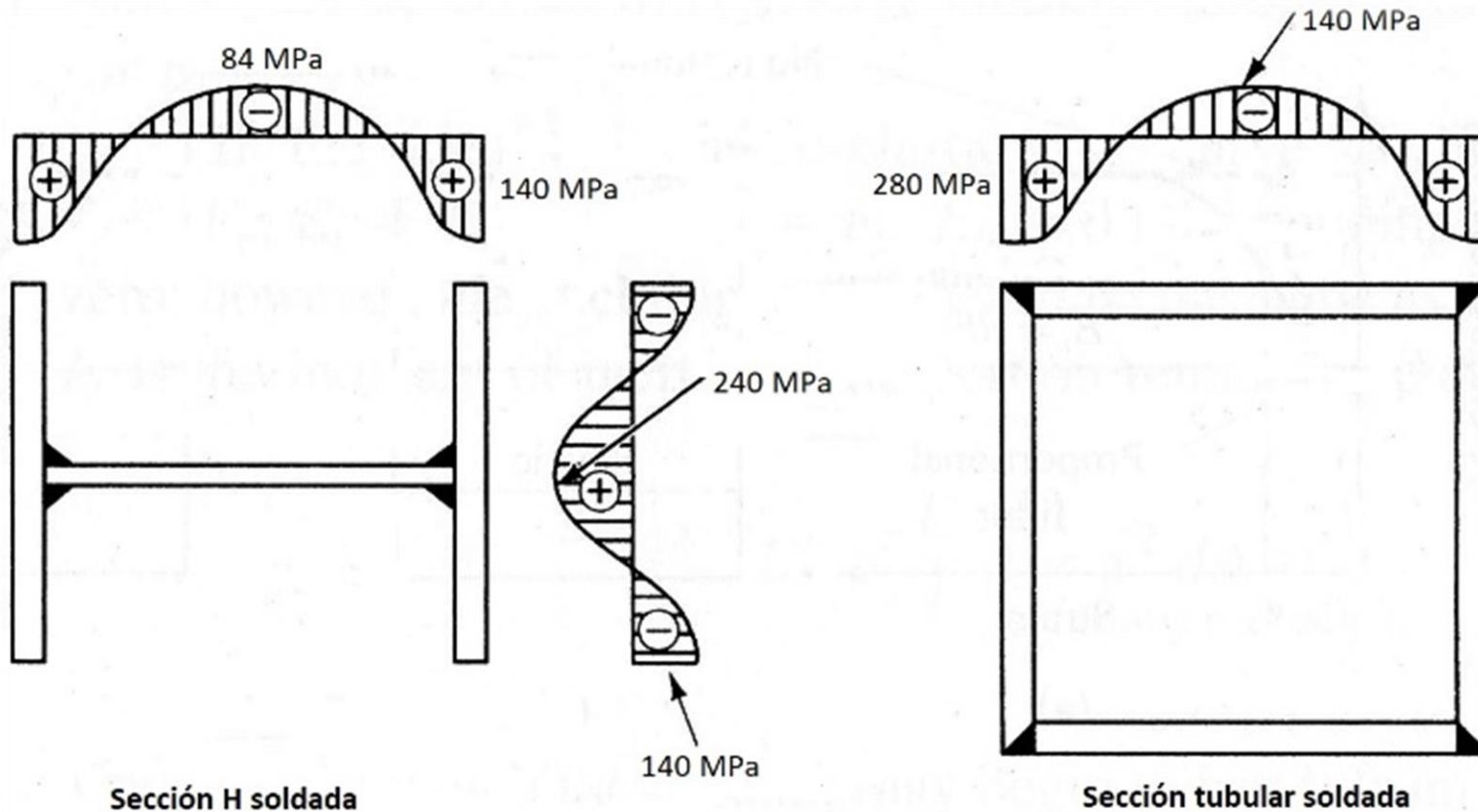
Las ecuaciones de tensión crítica consideran, en forma aproximada, el efecto de las tensiones residuales, que disminuyen la capacidad resistente de la columna.

Distribución típica de tensiones residuales en un perfil laminado.



# Tensiones residuales

Distribución típica de tensiones residuales en dos secciones soldadas. El proceso de soldadura induce tensiones residuales mayores que en los perfiles laminados.



Steel Structures. Salmon, Johnson y Malhas,



# Columnas simples. Pandeo flexional

El reglamento CIRSOC 301 adopta la curva de tensión crítica del AISC (*American Institute of Steel Construction, USA*), la que se define mediante dos ecuaciones, que son función de la esbeltez, y depende del tipo de pandeo flexional:

- **Pandeo elástico:** se produce para barras de esbeltez elevada, donde el pandeo se inicia cuando las tensiones de compresión están en rango elástico. La ecuación se basa en la ecuación de Euler.
- **Pandeo inelástico:** se produce en barras con esbeltez media y baja. En este caso la barra patea cuando las tensiones de compresión han superado la tensión de fluencia en algunas zonas de la sección. La ecuación es empírica.

Ambas ecuaciones consideran el efecto de las tensiones residuales y una excentricidad de la barra de  $e=L/1500$

# Columnas simples. Pandeo flexional

## Tensión crítica:

- Pandeo inelástico, si  $\lambda_c \leq 1,5$  o equivalentemente  $\left(\frac{kL}{r}\right) \leq 4,71 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$   
$$F_{cr} = (0,658^{\lambda_c^2}) F_y$$
$$F_{cr} = \left(0,658^{\frac{F_y}{F_e}}\right) F_y$$

- Pandeo elástico, si  $\lambda_c > 1,5$  o equivalentemente  $\left(\frac{kL}{r}\right) > 4,71 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$   
$$F_{cr} = \left[\frac{0,877}{\lambda_c^2}\right] \cdot F_y$$
$$F_{cr} = 0,877 F_e$$

Esbeltez adimensional:  $\lambda_c = \frac{1}{\pi} \frac{kL}{r} \sqrt{\frac{F_y}{E}}$

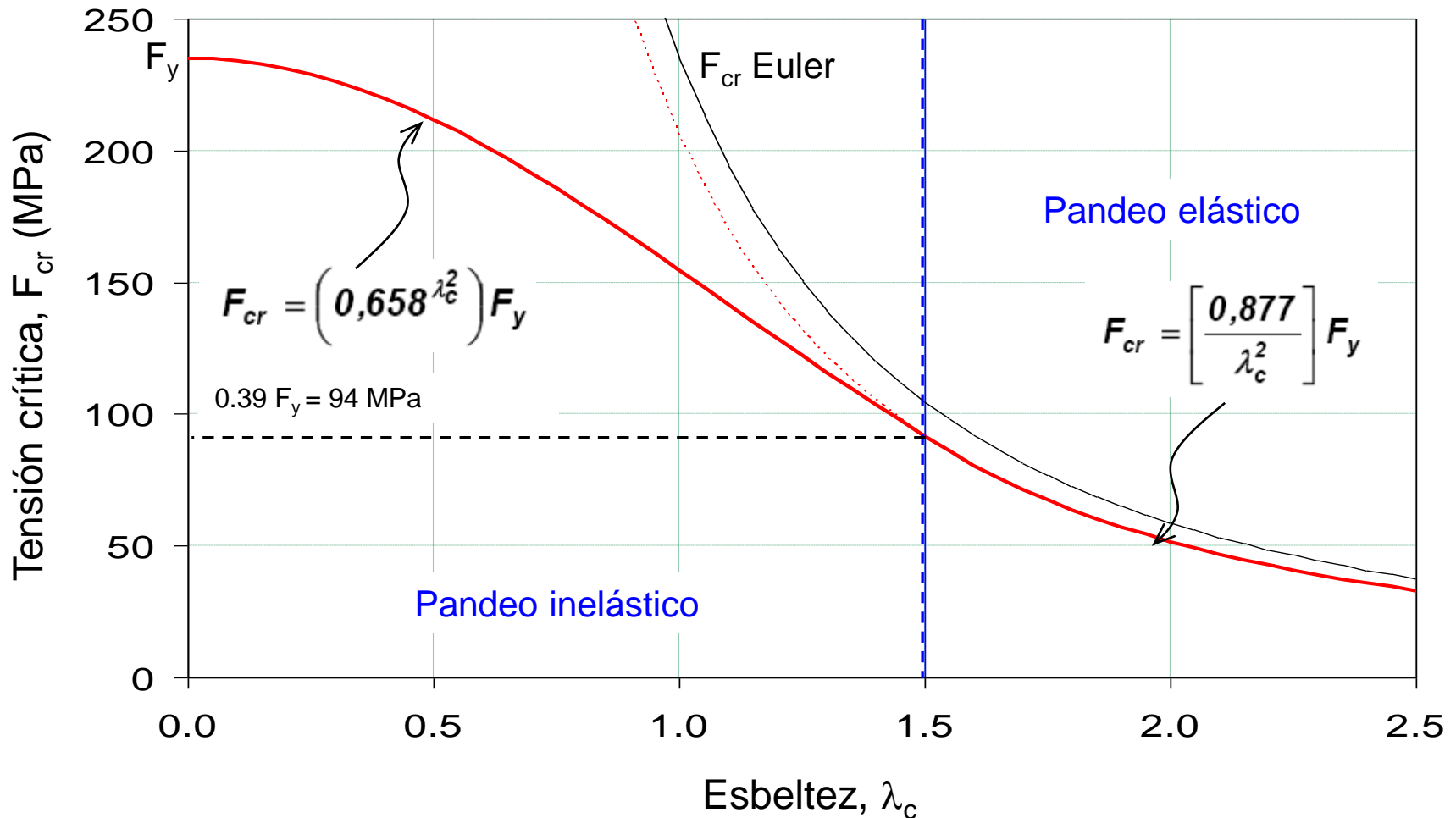
Tensión de pandeo elástico:

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{kL}{r}\right)^2}$$



# Columnas simples. Pandeo flexional

Tensión crítica,  $F_{cr}$ , en función de la esbeltez adimensional,  $\lambda_c$ :



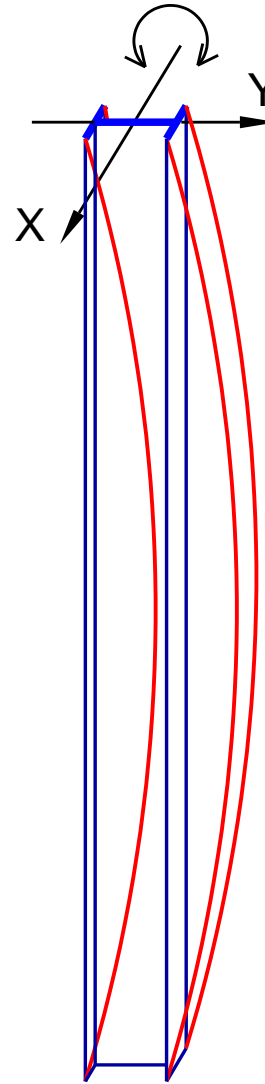
# Columnas simples. Pandeo flexional

El estado límite de pandeo flexional debe verificarse con respecto a los **dos ejes principales de la sección:**

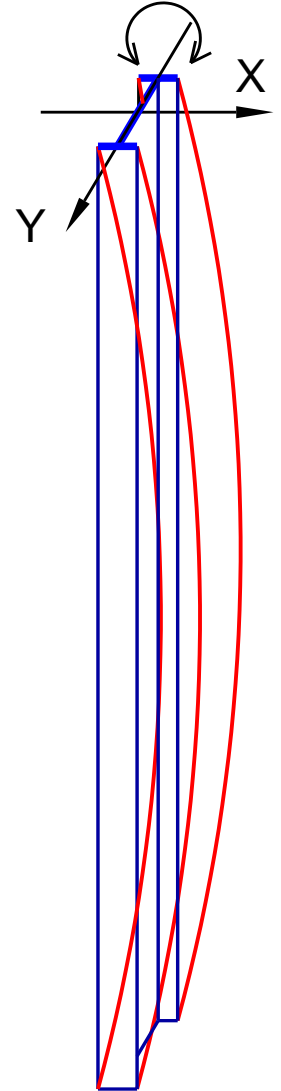
$$P_n = F_{cr} A_g (10^{-1}) \quad P_d = \phi P_n \quad \phi = 0.85$$

La tensión crítica  $F_{cr} = f(\lambda)$  se calcula considerando la esbeltez mayor:

$$\lambda_x = \frac{kL_x}{r_x} \quad y \quad \lambda_y = \frac{kL_y}{r_y}$$



Pandeo según eje X  
(eje de mayor inercia)



Pandeo según eje Y  
(eje de menor inercia)

# Columnas simples. Pandeo flexional

La dirección de **menor resistencia**, según la cual se produce el pandeo flexional, es la dirección de **mayor esbeltez** (y por ende menor  $F_{cr}$ ).

En el caso particular de que las longitudes de pandeo sean iguales en ambas direcciones, el pandeo se produce según el eje de menor inercia (menor radio de giro).

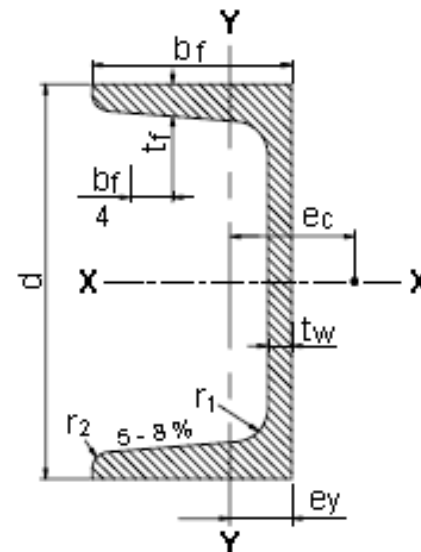
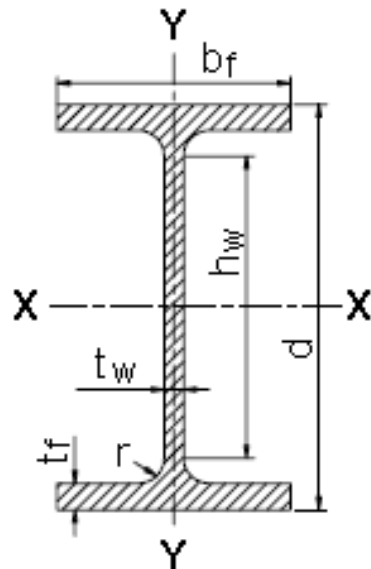
Al diseñar una barra comprimida es importante adoptar una sección transversal con la cual se logre que **las esbelteces en ambas direcciones sean aproximadamente iguales**. De esa forma se obtiene el diseño óptimo de las barras comprimidas.



# Columnas simples. Pandeo flexional

Es importante aclarar que el sistema de ejes de referencia adoptado para toda la estructura (sistema global) puede no coincidir con los ejes de la sección que se emplean en las tablas de perfiles. En ese caso, deben adoptarse las propiedades del perfil considerando cuidadosamente la ubicación del mismo con respecto a los ejes globales.

Las figuras en la parte inferior muestran los ejes  $x$  e  $y$ , según la notación que se usa en las tablas de perfiles de CIRSOC.



# Columnas simples. Pandeo flexional. Perfiles L

La verificación a pandeo flexional de barras comprimidas formadas por **un perfil L** debe realizarse considerando que el pandeo puede producirse según el eje de menor inercia (y por lo tanto menor radio de giro) de la sección. Ver Sección E.5

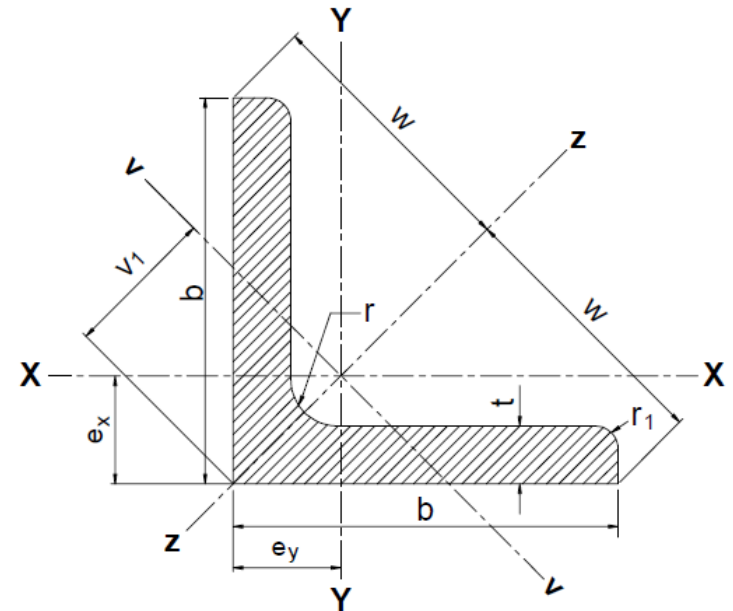
Las barras con un solo perfil L, en general, no se emplean para columnas, por ser poco eficientes. Sin embargo, suelen usarse para diagonales y montantes en estructuras reticuladas por que permiten construir los nudos en forma más simple.

Las tablas de perfiles de CIRSOC presentan el momento de inercia,  $I$ , el módulo resistente elástico,  $S$ , y el radio de giro respecto de los ejes  $x$  e  $y$  (paralelos a las caras del perfil) y respecto de los ejes principales  $v$  y  $z$ , siendo  $v$  el eje de menor inercia.

Ejemplo:

perfil L 89 x 89 x 6,4mm (L 3 1/2 x 3 1/2 x 1/4")

$r_x = r_y = 2.72$  cm,  $r_v = 1.69$  cm,  $r_z = 3.46$  cm



# Pandeo flexional . Longitud de pandeo

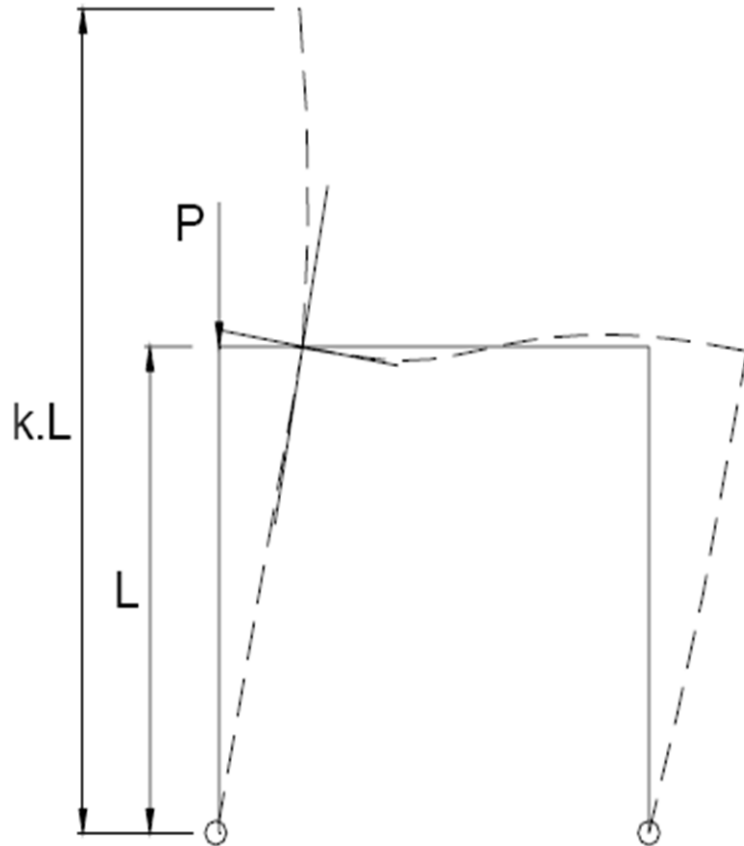
Cuando las barras comprimidas no son biarticuladas es necesario definir una longitud efectiva de pandeo, la cual representa la longitud de una barra biarticulada equivalente: **longitud de pandeo = k L.**

Para determinar el factor k se deben definir las condiciones cinemáticas (esto es las posibilidades de desplazamiento y rotación) en los extremos de las barras. En este contexto, los nudos de extremo de las barras se dividen en dos grandes grupos:

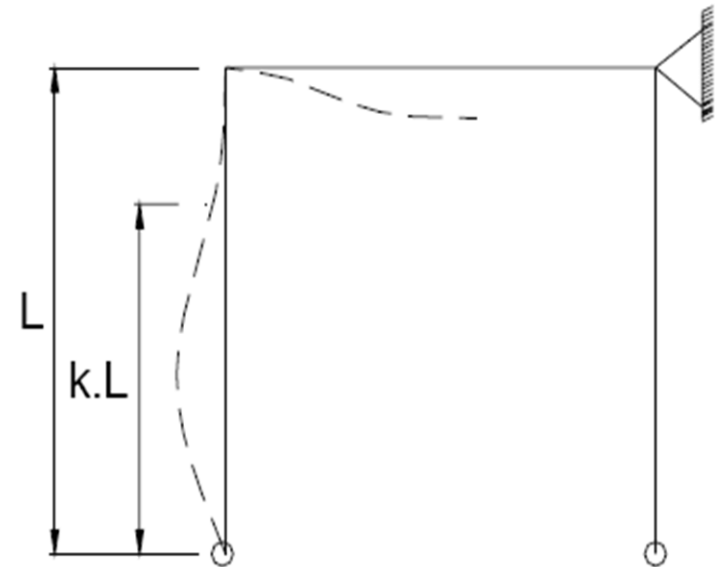
- **Nudos desplazables lateralmente:** son aquellos cuyo desplazamiento lateral no está impedido o está parcialmente restringido debido a la rigidez a flexión de la estructura.
- **Nudos indesplazables lateralmente:** son aquellos cuyo movimiento está impedido (por ejemplo por un vínculo) o restringido por estructuras arriostradas (triangulaciones con comportamiento controlado por esfuerzos axiales).



# Pandeo flexional . Longitud de pandeo



Nudos desplazables lateralmente.  $k \geq 1.0$



Nudos indesplazables lateralmente.  $k \leq 1.0$

# Pandeo flexional . Longitud de pandeo

La correcta identificación de la condición de los nudos, en cuanto a si son desplazables lateralmente o no, es importante para determinar correctamente la longitud de pandeo. Al respecto, es necesario aclarar dos aspectos:

- Definimos los nudos como “indesplazables” en un sentido aproximado, ya que no existen vínculos o estructuras infinitamente rígidas como para que el desplazamiento sea nulo. En términos relativos, estos nudos presentan desplazamientos despreciables frente a los que se producen en los extremos con nudos desplazables.
- Para que los nudos sean efectivamente no desplazables, se debe verificar que el sistema de arriostramiento dispone de una rigidez y resistencia adecuada. Por esta razón, el reglamento CIRSOC 301, en la Sección C.3. define los valores mínimos de rigidez y resistencia del sistema de arriostramiento.

# Pandeo flexional . Longitud de pandeo

Los requisitos para determinar la longitud de pandeo se indican en la Sección C.2. Estabilidad de la estructura, del CIRSOC 301. Los procedimientos allí considerados para determinar  $L_p = k L$  pueden agruparse en:








- A. Determinación de k para casos simples con extremos articulados o empotrados** (con nudos desplazables o indesplazables).
- B. Determinación de k mediante nomogramas** (con nudos desplazables o indesplazables).
- C. Determinación de k mediante análisis estructural** (método general).

El Reglamento CIRSOC 301-2018 incluye el método de análisis directo para la determinar la resistencia de miembros comprimidos. En este procedimiento las barras se verifican con  $k=1$ , pero en el análisis estructural se consideran efectos de no linealidad geométrica y otros requerimientos adicionales.



# Pandeo flexional. Longitud de pandeo

## A. Valores aproximados de k para casos simples

<p>La forma de pandeo se indica en línea de puntos</p>						
<p>Valores teóricos de K</p>	0,5	0,7	1,0	1,0	2,0	2,0
<p>Valores recomendados de proyecto para condiciones reales</p>	0,65	0,80	1,2	1,0	2,10	2,0
<p>Condiciones de vínculo</p>	 <ul style="list-style-type: none"> <li>Rotación y Traslación impedida</li> <li>Rotación libre y Traslación impedida</li> <li>Rotación impedida y Traslación libre</li> <li>Rotación libre y Traslación libre</li> </ul>					

# Pandeo flexional. Longitud de pandeo

## B. Determinación de $k$ mediante nomogramas. (Ver Comentarios CIRSOC 301, Cap. C)

Se determina en cada extremo de la barra un factor  $G$  que tiene en cuenta la rigidez relativa entre las columnas y vigas que llegan a cada extremo:

$$G = \frac{\sum I_c / L_c}{\sum I_b / L_b},$$

donde  $I_c$  es el momento de inercia de columna,  $L_c$  su longitud,  $I_b$  es el momento de inercia de viga y  $L_b$  su longitud. El factor de rigidez relativa  $G$  se calcula en los dos extremos de la barra comprimida ( $G_A$  y  $G_B$ ) cuya longitud de pandeo se quiere determinar.

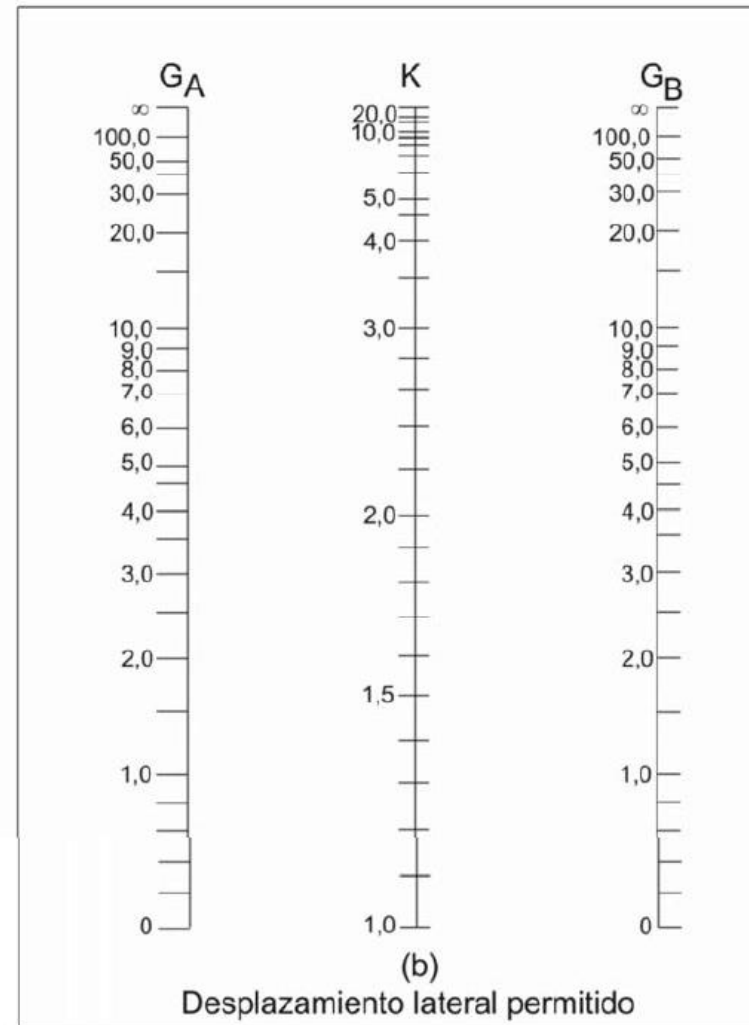
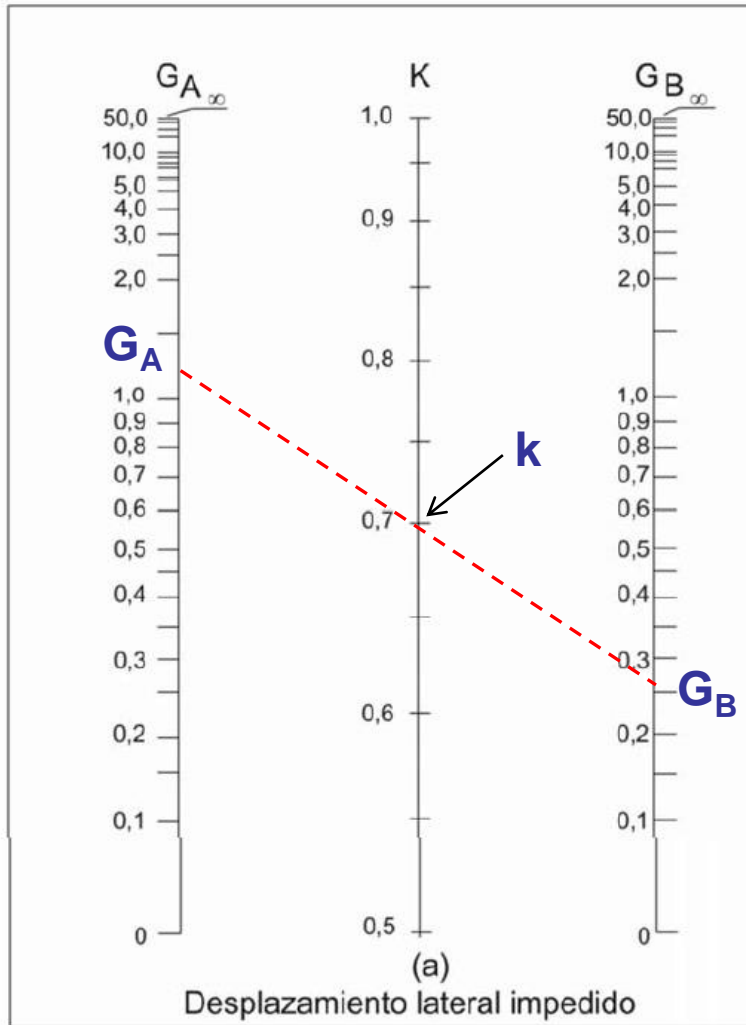
Se considera el caso de nudos desplazables e indesplazables.

Cuando no se cumplen ciertas condiciones propias del método deben hacerse correcciones, por ejemplo por comportamiento inelástico. Ver Comentarios CIRSOC 301, C C.2.

# Pandeo flexional. Longitud de pandeo

## B. Determinación de k mediante nomogramas. (Ver Comentarios Cap. C)

$$G = \frac{\sum I_c / L_c}{\sum I_b / L_b},$$



## C. Determinación de $k$ mediante análisis estructural (método general)

La aplicación de este procedimiento es requerida por el reglamento en varios casos, por ejemplo, en barras comprimidas de estructuras trianguladas isostáticas con nudos lateralmente desplazables, C.2.3.(3)(c). Sin embargo, no se indica ni describe cómo implementar este procedimiento para calcular el factor  $K$ .

Desde el punto de vista conceptual, para calcular  $k$  mediante análisis estructural se debe implementar un modelo que considere apropiadamente los desplazamientos de los nudos (en el plano y fuera del plano) y que permita determinar con precisión la deformada de las barras. El problema radica en que la implementación de estos modelos y las técnicas de análisis requeridas, por su complejidad, no son de aplicación en la práctica de la ingeniería estructural. En conclusión, este procedimiento no se emplea usualmente, salvo casos especiales o en tareas de investigación.

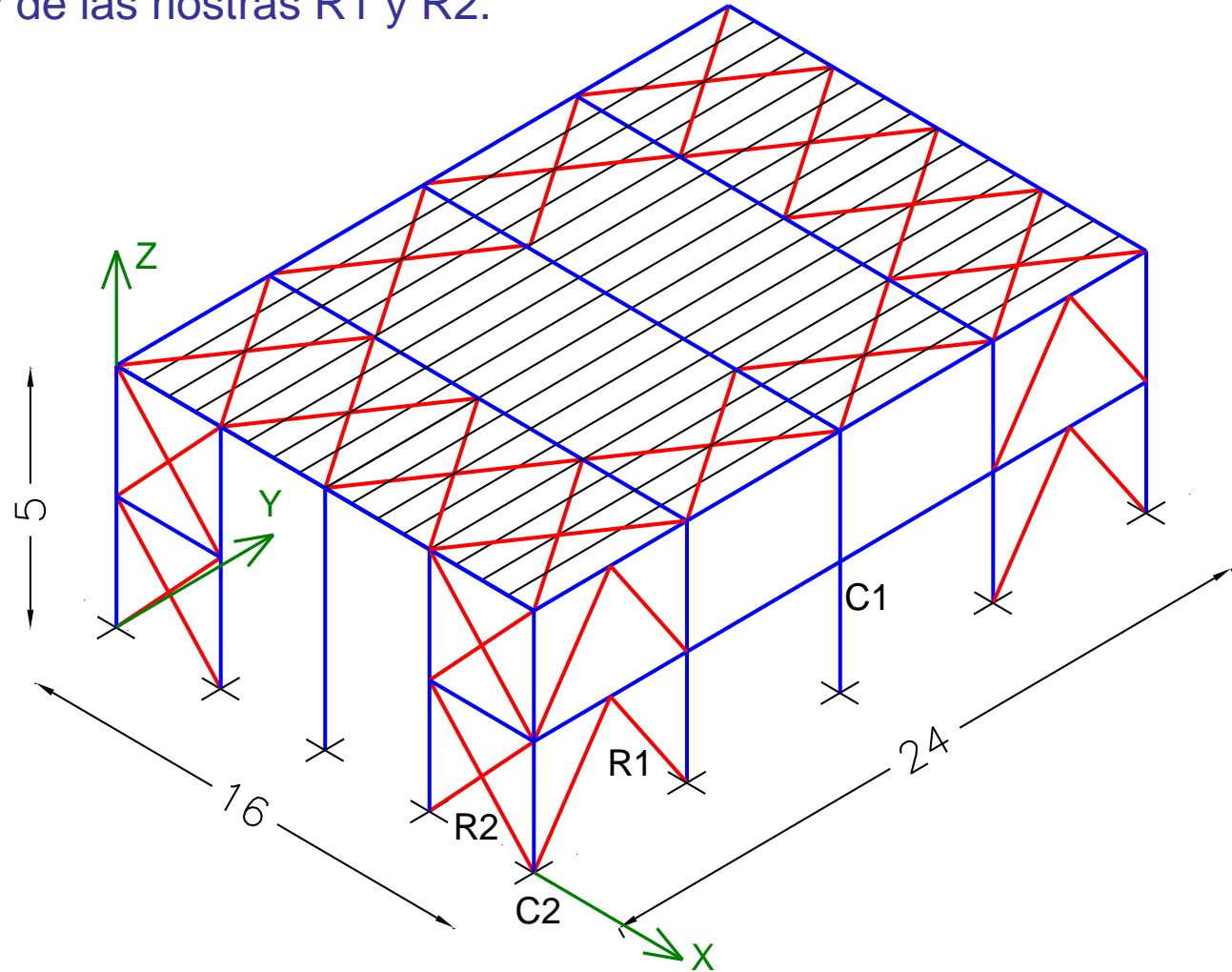


# Ejemplo: Nave industrial

La figura muestra el esquema estructural de una nave industrial. Vamos a determinar las longitudes de pandeo de las columnas C1 y C2 y de las riostras R1 y R2.

Todas las columnas y riostras están articuladas en sus extremos. En este ejemplo, las riostras R2 son barras con rigidez a compresión (no son tensores).

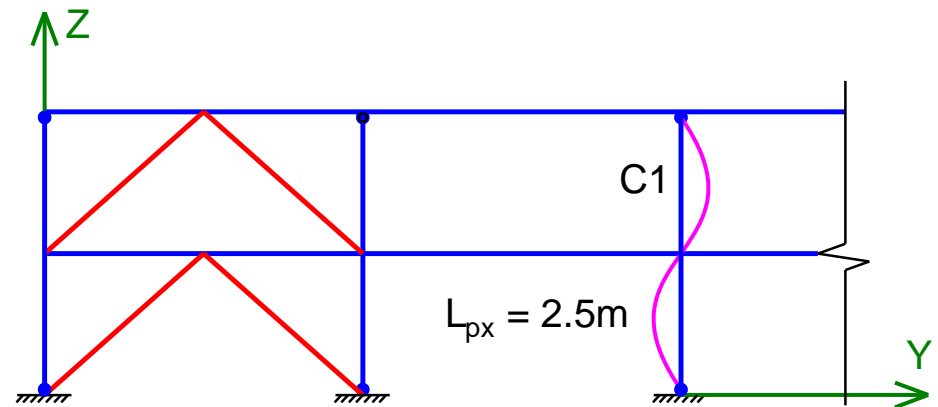
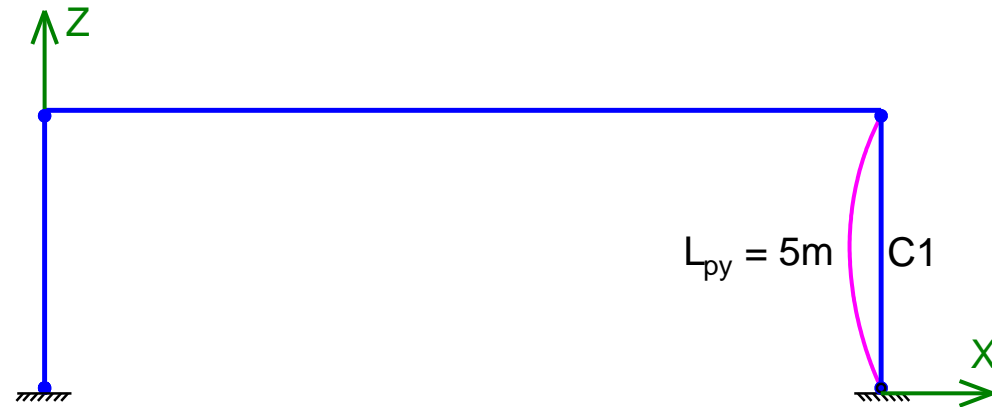
A continuación, analizaremos cada caso (C1, C2, R1 y R2), tomando como referencia el sistema de ejes XYZ indicado en la figura.



## Longitud de pandeo columna C1

**Plano XZ** (estructura transversal tipo): ambos extremos de la barra están articulados. El extremo inferior es indesplazable lateralmente por el vínculo y el extremo superior es indesplazable por el sistema de arriostramiento (ver estructura de la nave).

**Plano YZ** (fachada longitudinal): los extremos superior e inferior presentan las mismas condiciones de vínculo que las indicadas para el plano XZ. En el centro de la columna C1 el nudo es indesplazable porque está conectado al sistema de arriostramientos en V invertida.

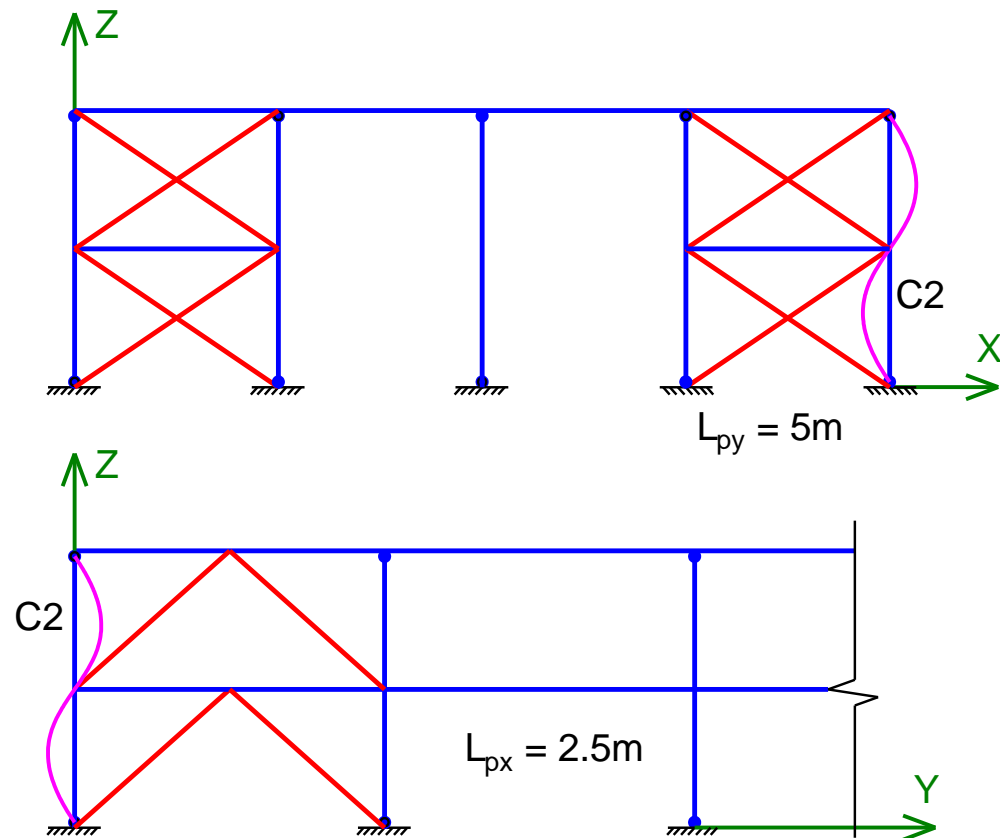


El sistema de arriostramiento de la nave cumple con los requerimientos de rigidez y resistencia mínima definidos por CIRSOC 301.

## Longitud de pandeo columna C2

**Plano XZ** (fachada transversal): ambos extremos de la barra están articulados. El extremo inferior es indesplazable lateralmente por el vínculo y el extremo superior es indesplazable por el sistema de arriostramiento (ver estructura de la nave). En el centro de la columna C2 el nudo es indesplazable porque está directamente vinculado a los arriostramientos en X.

**Plano YZ** (fachada longitudinal): los extremos superior e inferior presentan las mismas condiciones de vínculo que las indicadas para el plano XZ. En el centro el nudo es indesplazable porque está directamente vinculado a los arriostramientos en V invertida.



## Longitud de pandeo de las riostras

Para el caso de las riostras debe considerarse el pandeo en el plano del reticulado y fuera del plano del reticulado. Para ello, el reglamento CIRSOC 301 incluye especificaciones para el cálculo de la longitud efectiva de pandeo en *Pórticos arriostrados* y en *Estructuras trianguladas*, (Apéndice 7). En estas dos secciones del reglamento se consideran distintos casos según sean los nudos desplazables lateralmente o no, si la estructura es internamente isostática o hiperestática y otras particularidades del sistema estructural.

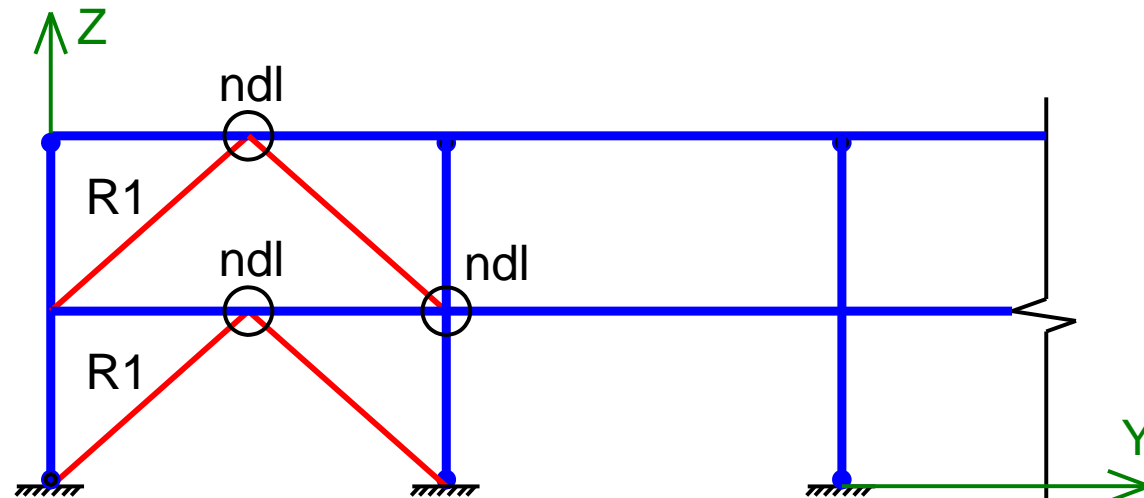
El reglamento, en las dos secciones indicadas, muestra ciertas ambigüedades porque no resulta claro la diferencia entre un pórtico arriostrado y una estructura triangulada con nudos rígidos, esto es internamente hiperestático.



## Longitud de pandeo riostra R1

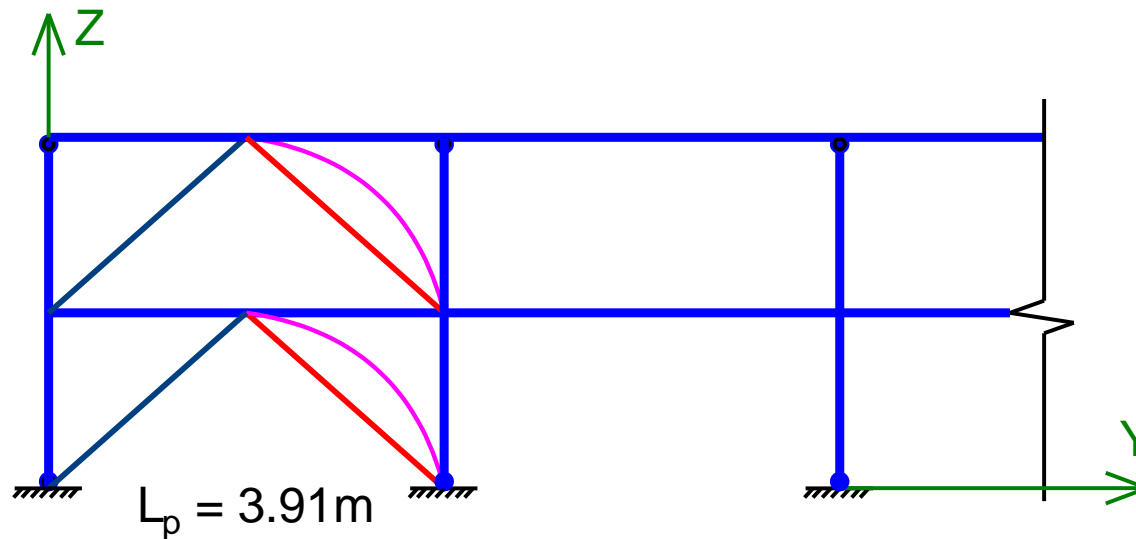
Si considerando que se trata de un pórtico arriostrado de una estructura de 1 nivel, obtenemos que  $L_p = L$

Si aplicamos el criterio estructural reticuladas, tenemos que tener en cuenta que hay tres nodos que son desplazables lateralmente (se indican en la figura con un círculo y la leyenda “ndl”). De modo que las riostras R1 tiene uno o ambos extremos que son desplazables lateralmente. Además, hay que considerar si la estructura es internamente isostática o hiperestática.



## Longitud de pandeo riostra R1

Para simplificar el diseño, adoptamos la misma longitud de pandeo en ambas direcciones,  $L_p = L$ , tanto para el pandeo en el plano del reticulado (plano YZ), como para el pandeo fuera del plano

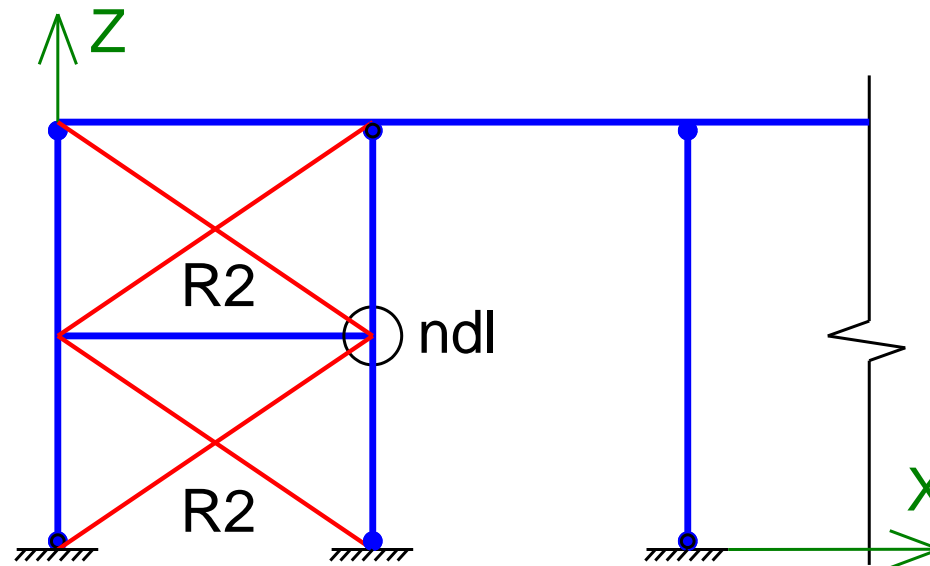


## Longitud de pandeo riostra R2

Para el estudio de las riostras R2 se presenta también cierta ambigüedad, como indicamos previamente para el caso de las riostras R1.

Si aplicamos el criterio pórticos, considerando que se trata de un pórtico arriostrado de una estructura de 1 nivel, obtenemos que  $L_p = L$

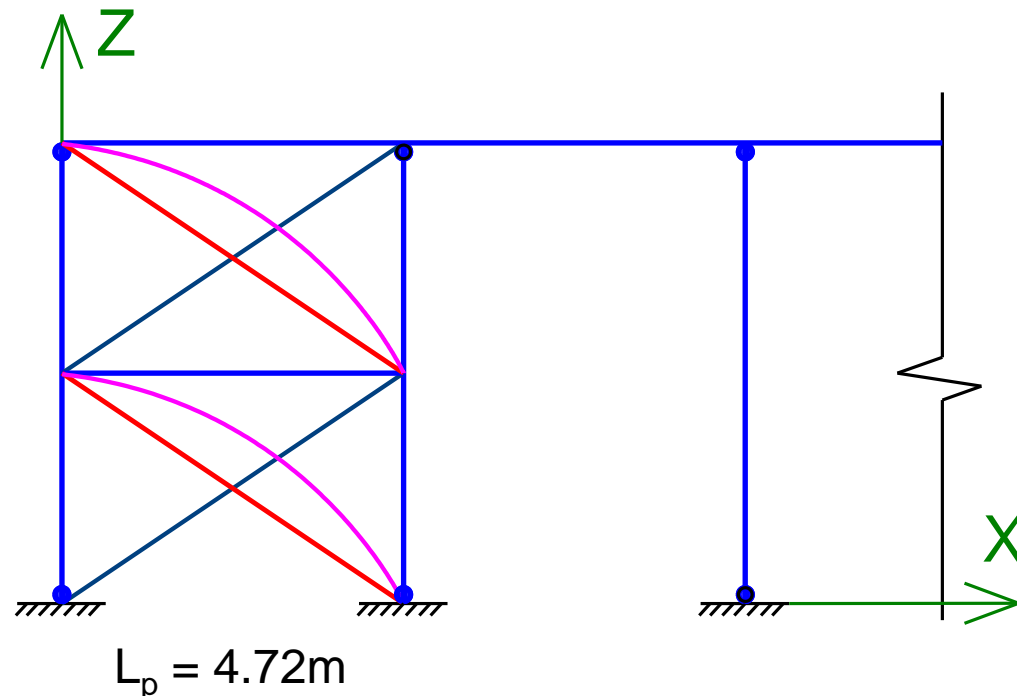
Si aplicamos el criterio para reticulados, la situación en este caso es más complicada, debido a que dos riostras tienen sus extremos conectados a nudos indesplazables, pero las otras dos tienen un extremo conectado a un nudo que puede desplazarse lateralmente (ndl). Además, hay que definir si las riostras están unidas entre sí en el centro.



## Longitud de pandeo riostra R2

Al igual que en el caso de las riostras R1, para simplificar el diseño adoptamos la misma longitud de pandeo en ambas direcciones,  $L_p = L$ , tanto para el pandeo en el plano del reticulado (plano XZ), como para el pandeo fuera del plano. Si las riostras estuvieran conectadas en el punto medio (donde se cruzan) se podría reducir la longitud de pandeo en el plano del reticulado.

Riostras R2 son barras con rigidez a compresión (no son tensores).  
Las riostras NO están unidas entre sí en el centro



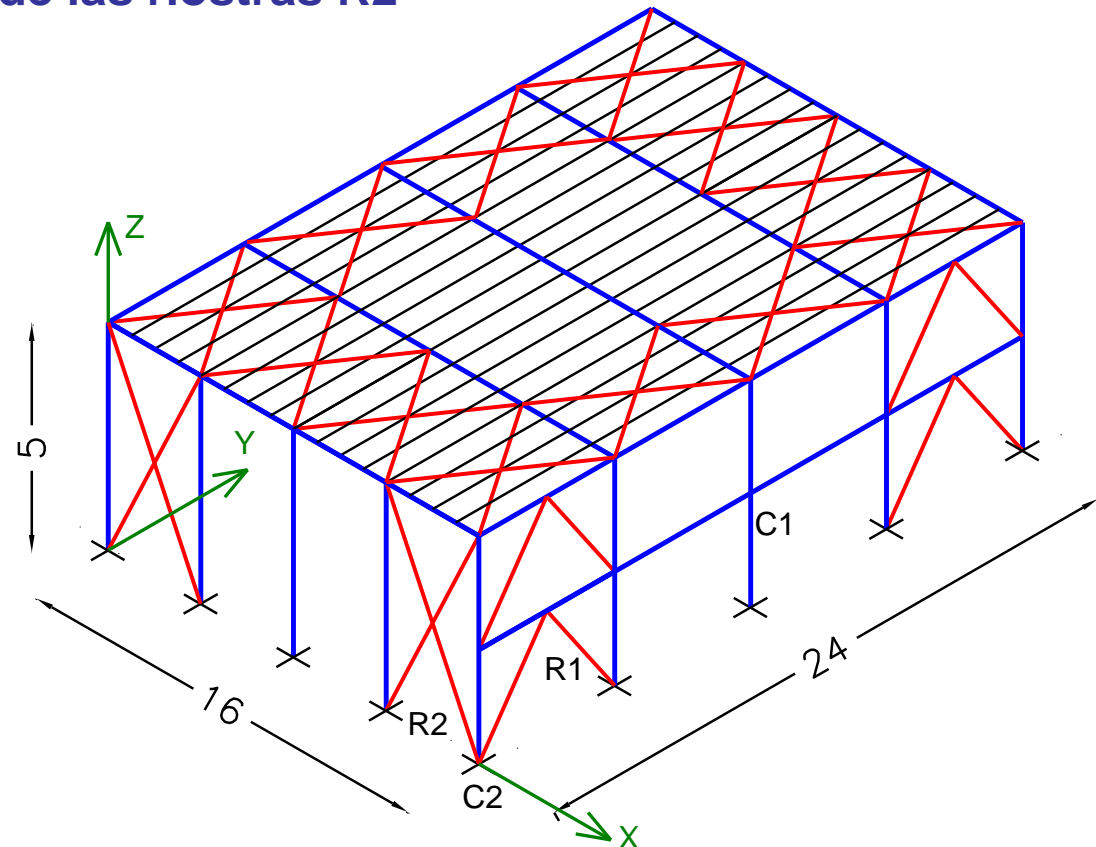


Para estudiar un caso diferente, vamos a considerar una nave industrial similar a la anterior en la cual modificamos la configuración de las riostras en X dispuestas en las fachadas transversales. A partir de esta modificación, todas las riostras R2 tienen sus extremos conectados a nudos indesplazables lateralmente.

## Cálculo de la longitud de pandeo de las riostras R2

**Alternativa 1:** a partir de lo indicado en CIRSOC 301 adoptamos  $L_p = L =$ , tanto para el pandeo en el plano (plano XZ), como para el pandeo fuera del plano (asumiendo que las riostras no están conectadas entre sí en el centro).

$$L_p = 6.40\text{m}$$



## Longitud de pandeo riostra R2

**Alternativa 2:** consideramos una estructura triangulada, internamente isostática y con nudos indesplazables, con las riostras conectadas en el centro, y aplicamos los requerimientos de la Sección C.2.3. del reglamento.

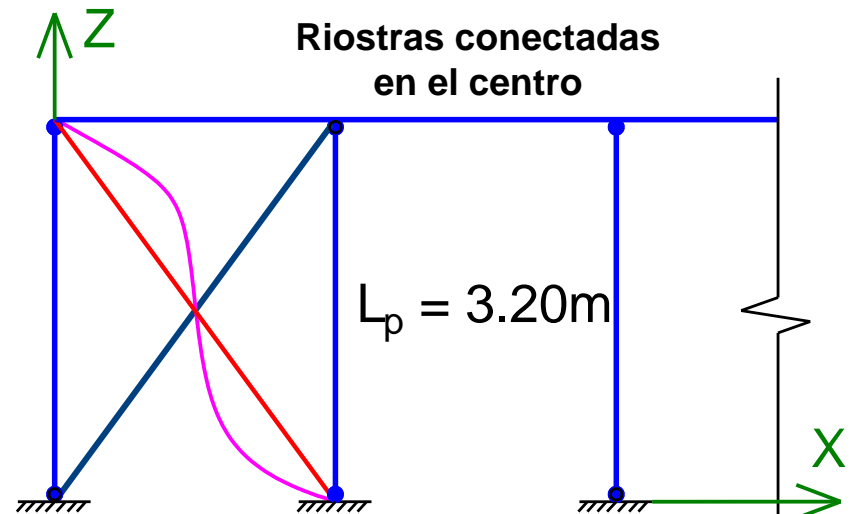
**Pandeo en el plano del reticulado** (plano XZ): según Ap. 7.2.3. (4) la longitud de pandeo se define según la Figura 7.2.4, Caso 4, de modo que  $L_p = 0.5 L = 3.20\text{m}$ .

**Pandeo fuerza del plano del reticulado:** según Ap. 7.2.3. (3) (b), para diagonales comprimidas unidas en su centro a una diagonal traccionada ( $P_t = P_c$ ):

$$k = \sqrt{1 - 0.75 \frac{P_t}{P_c}} = 0.5$$

de modo que  $L_p = 0.5 L = 3.20\text{m}$ .

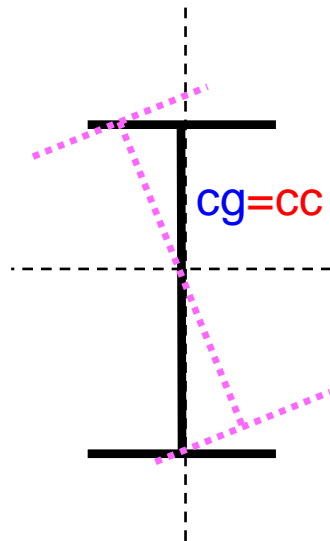
La longitud de pandeo es la misma en ambos planos.



# Columnas simples. Pandeo torsional y flexo-torsional

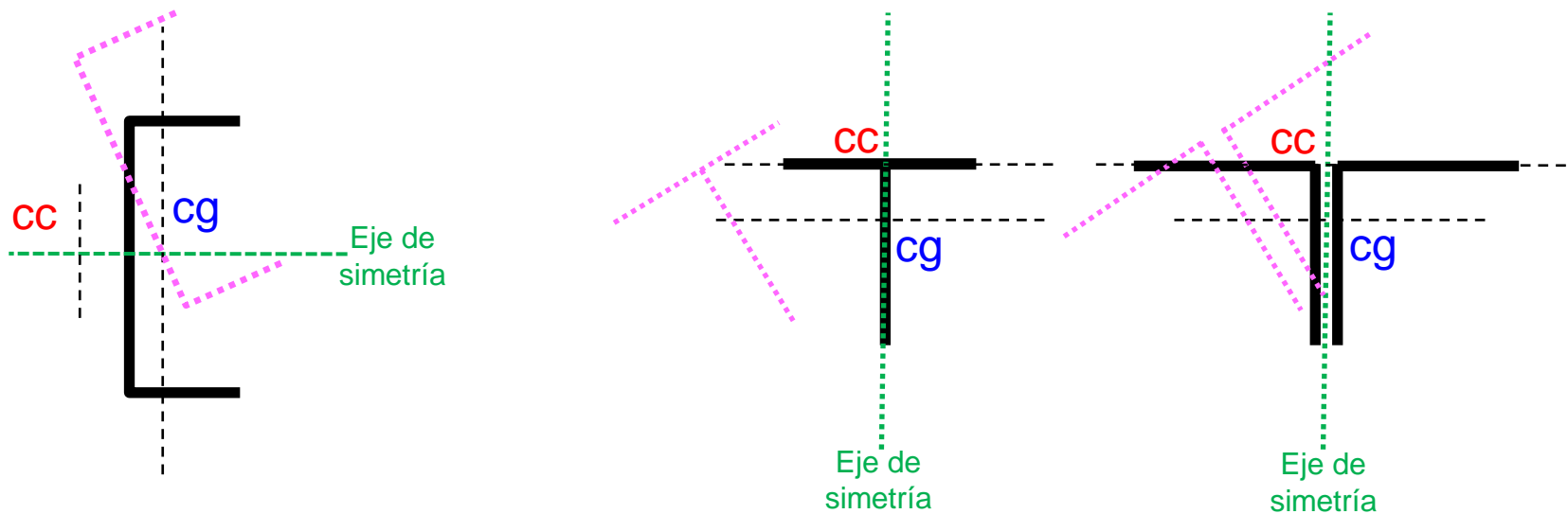
Este estado límite último (pandeo global) produce dos tipos de inestabilidad, según se la sección transversal:

**a) Pandeo torsional:** rotaciones alrededor del eje longitudinal que induce torsión. Se produce en barras con secciones de doble simetría, donde el centro de gravedad coincide con el centro de corte.



# Columnas simples. Pandeo torsional y flexo-torsional

**b) Pandeo flexo-torsional:** la inestabilidad produce rotaciones alrededor del eje longitudinal (torsión) acopladas con pandeo flexional alrededor del eje de simetría (si lo hay). Se produce en barras con secciones de simple simetría o sin eje de simetría, donde el centro de gravedad no coincide con el centro de corte.





# Columnas simples. Pandeo torsional y flexo-torsional

Los parámetros más importantes que controlan este modo de falla son la rigidez torsional de la sección y la longitud no arriostrada a los efectos del pandeo torsional

La longitud no arriostrada se define como la distancia entre arriostramientos que impiden que un miembro gire alrededor de su eje longitudinal.



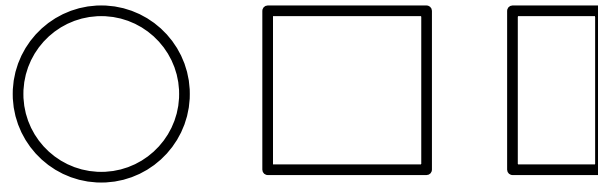
# Columnas simples. Pandeo torsional y flexo-torsional

El pandeo torsional, en secciones simétricas y el pandeo flexo-torsión, en secciones asimétricas, son modos de falla que generalmente no se consideran en el diseño de columnas formadas por perfiles laminados en caliente, dado que generalmente no controlan el diseño (es decir que la resistencia de diseño por pandeo flexional es menor).

Sin embargo, los modos de pandeo torsional y flexo-torsional pueden controlar la resistencia de columnas con secciones con chapas delgadas y columnas que tienen longitudes no arriostradas a torsión mayores que las longitudes no arriostradas a flexión (Comentarios AISC 360).

# Columnas simples. Pandeo torsional y flexo-torsional

Pandeo torsional en tubos



Los tubos estructurales (de sección circular, cuadrada o rectangular) presentan elevada rigidez a torsión, por tratarse de secciones cerradas. Es por esta razón que el **estado límite de pandeo torsional no se considera** para barras comprimidas formadas por **tubos de acero**.

Los requerimientos para el cálculo de estructuras con tubos de acero están incluidos en el Reglamento CIRSOC 302, si bien el estudio de este reglamento no está considerado en el curso de Construcciones Metálicas y de Maderas I.

# Columnas simples. Pandeo torsional y flexo-torsional

Resistencia nominal:  $P_n = F_{cr} A_g (10^{-1})$

Cuando  $F_y / F_e \leq 2.25$ :

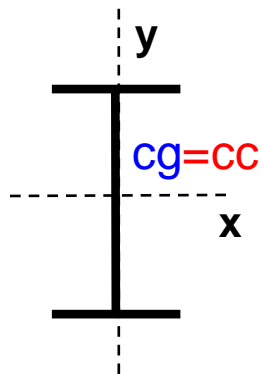
$$F_{cr} = \left(0,658^{\lambda_c^2}\right) F_y$$

Cuando  $F_y / F_e > 2.25$ :

$$F_{cr} = \left(0,658^{\frac{F_y}{F_e}}\right) F_y$$

La tensión de pandeo  $F_e$  se determina según el tipo de sección:

a) **Secciones doblemente simétricas** (cuando la longitud efectiva torsional lateralmente no arriostradas sea mayor que la longitud efectiva flexional)



$$F_e = \left[ \frac{\pi^2 E C_w}{(k_z L)^2} + G J \right] \frac{1}{I_x + I_y}$$

$C_w$ : módulo de alabeo ( $\text{cm}^6$ )

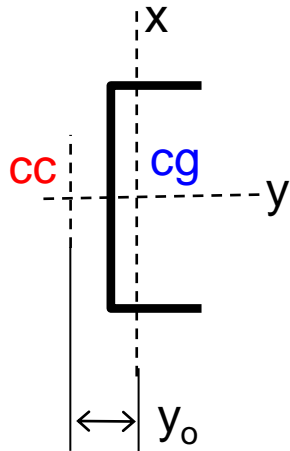
$J$ : módulo de torsión ( $\text{cm}^4$ )

$k_z L$ : longitud efectiva no arriostrada para pandeo torsional.

$I_x, I_y$  momentos de inercia respecto de los ejes principales

# Columnas simples. Pandeo torsional y flexo-torsional

## b) Secciones con un eje de simetría (y)



$$F_e = \frac{F_{ey} + F_{ez}}{2H} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4 F_{ey} F_{ez} H}{(F_{ey} + F_{ez})^2}} \right]$$

$x_0, y_0$ : las coordenadas del centro de corte con respecto al centro de gravedad.

$r_0$ : el radio de giro polar respecto del centro de corte

$$\overline{r_0}^2 = x_0^2 + y_0^2 + \frac{(I_x + I_y)}{A}$$

$$H = 1 - \left( \frac{x_0^2 + y_0^2}{\overline{r_0}^2} \right)$$

$$F_{ex} = \frac{\pi^2 E}{\left( k_x L / r_x \right)^2}$$

$$F_{ey} = \frac{\pi^2 E}{\left( k_y L / r_y \right)^2}$$

$$F_{ez} = \left[ \frac{\pi^2 E C_w}{(k_z L)^2} + G J \right] \frac{1}{A \overline{r_0}^2}$$

## c) Secciones asimétricas: resolver ecuación cúbica.

$$(F_e - F_{ex})(F_e - F_{ey})(F_e - F_{ez}) - F_e^2 (F_e - F_{ey}) \left( \frac{x_0}{r_0} \right)^2 - F_e^2 (F_e - F_{ex}) \left( \frac{y_0}{r_0} \right)^2 = 0$$



# Columnas simples. Pandeo torsional y flexo-torsional

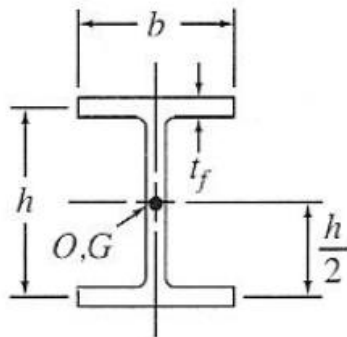
El módulo de alabeo  $C_w$  mide la resistencia a torsión no uniforme (o torsión con alabeo restringido, teoría de Vlasov) de un miembro estructural. Este parámetro puede obtenerse de tablas de perfiles, calcularse mediante programas de software o se pueden aplicar fórmulas aproximadas (ver tabla completa en Aula Abierta):

---

$O$  = shear center  
 $G$  = centroid

$J$  = torsion constant,  $C_w$  = warping constant  
 $I_p$  = polar moment of inertia about shear center

---



$$J = \frac{1}{3}(2bt_f^3 + ht_w^3)$$
$$C_w = \frac{I_f h^2}{2} = \frac{t_f b^3 h^2}{24} = \frac{h^2 I_y}{4}$$
$$I_p = I_x + I_y$$

---

# Columnas simples. Pandeo torsional y flexo-torsional

## Aclaración importante:

Se han presentado las ecuaciones para calcular la tensión crítica  $F_e$  para los casos más usuales de pandeo torsional y flexo-torsional. Para otros casos debe consultarse el Capítulo E del reglamento CIRSOC 301-2018.

# Columnas simples. Miembros con elementos esbeltos

## Columnas con elementos esbeltos, Sección E.7.

En este caso se deben considerar los estados límites de pandeo flexional, pandeo torsional o flexo-torsional (según corresponda). El efecto del pandeo local, que puede controlar la respuesta de miembros con elementos esbeltos, no se considera explícitamente.

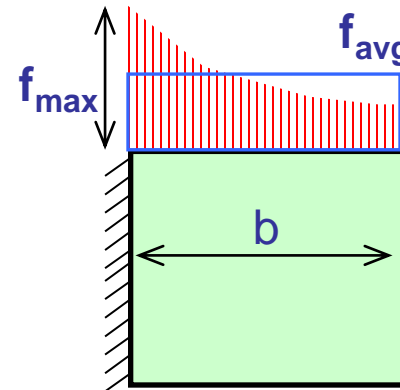
El procedimiento reglamentario se basa en determinar la resistencia por pandeo flexional, incluyendo un factor de reducción  $Q$ , que considera el efecto del pandeo local:  $Q = Q_s \quad Q_a \leq 1$

La resistencia nominal a pandeo flexional (incluyendo el efecto del pandeo local) se determina a partir de la tensión crítica que es función de la esbeltez y del factor  $Q$ :  $F_{cr} = f(\lambda_c, Q)$

# Columnas simples. Miembros con elementos esbeltos

## Elementos comprimidos no rigidizados

$$Q_s = f_{avg} / f_{max} = f(b/t, E/F_y) \leq 1$$

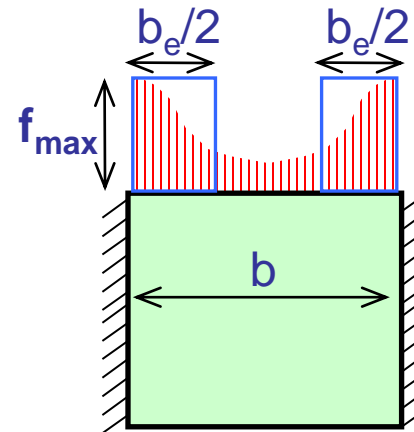


## Elementos comprimidos rigidizados

Ancho efectivo reducido:

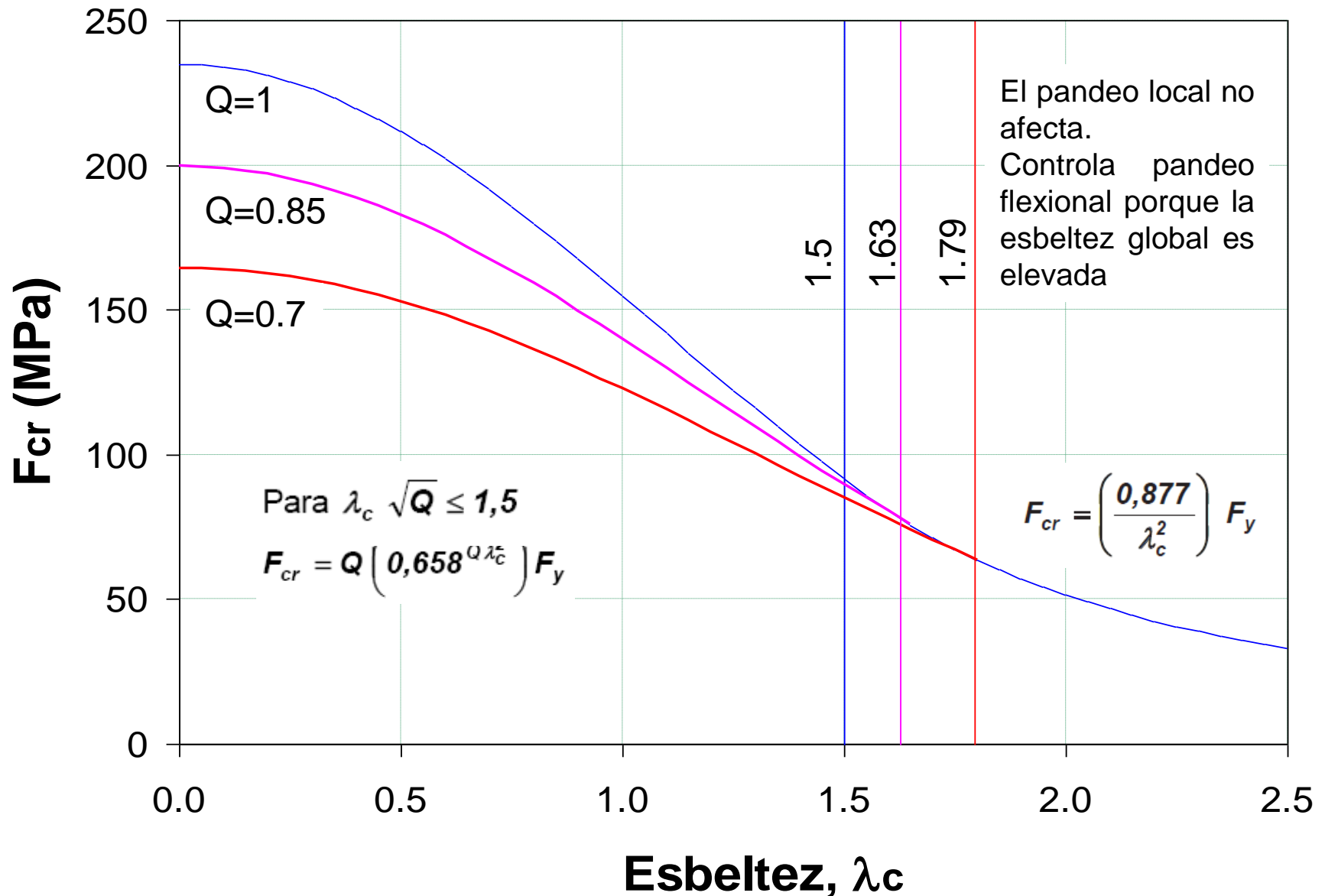
$$b_e = f(b/t, E/F_y) \leq b$$

$$Q_a = \text{Área efectiva} / \text{Área bruta} \leq 1$$



**Aclaración:** Los factores  $Q_a$  y  $Q_s$  se presenta en forma conceptual. No se incluye como tema de estudio de este curso la determinación de los factores  $Q$  ni la resolución de ejercicios sobre este tema.

# Columnas simples. Miembros con elementos esbeltos



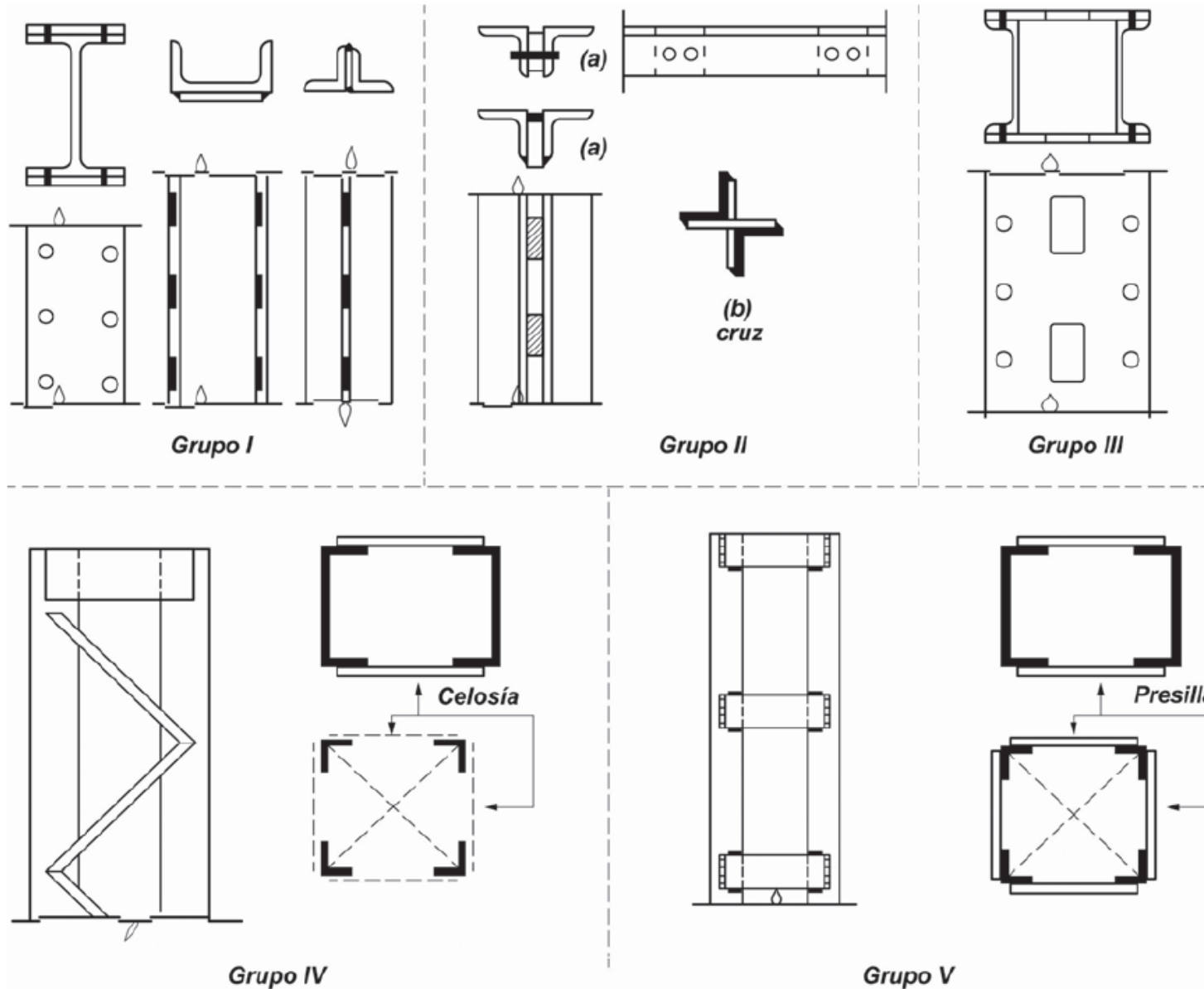
# Columnas armadas

## Método de la longitud efectiva



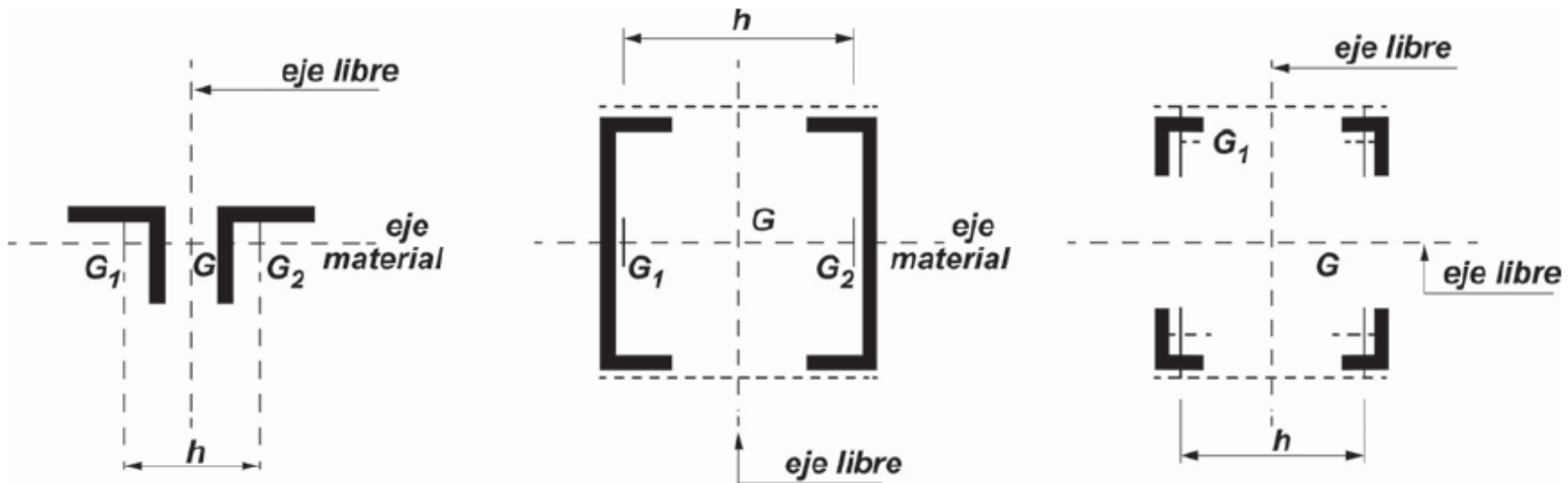


# Columnas armadas



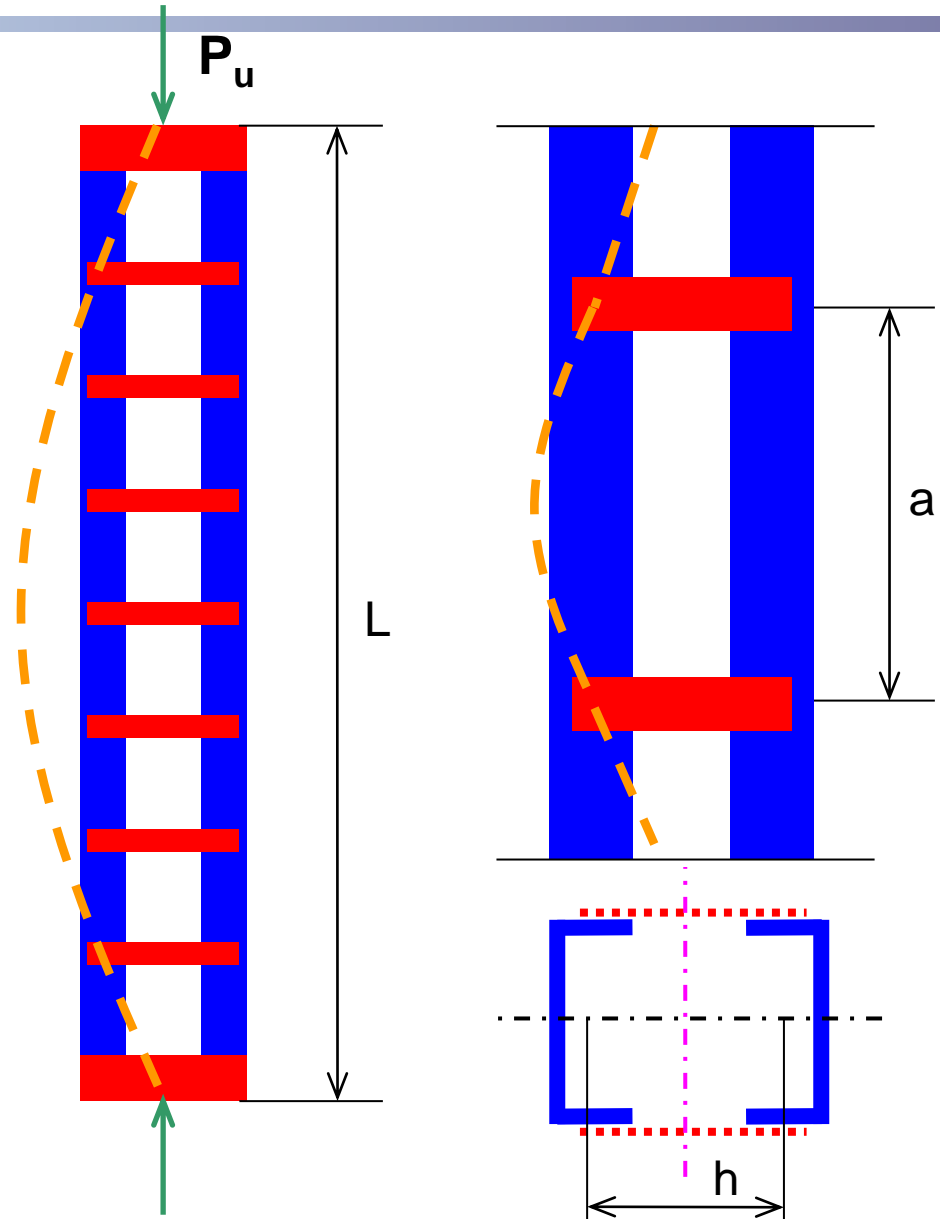
## Eje material y eje libre

Se define como **eje material** al que une los centros de gravedad de los dos perfiles longitudinales que forman la barra armada. Se define como **eje libre** el eje perpendicular al eje material que pasa por el centro de gravedad de la barra armada considerada en conjunto. Cuando los cordones son a su vez barras armadas, la pieza tendrá dos ejes libres perpendiculares entre sí.

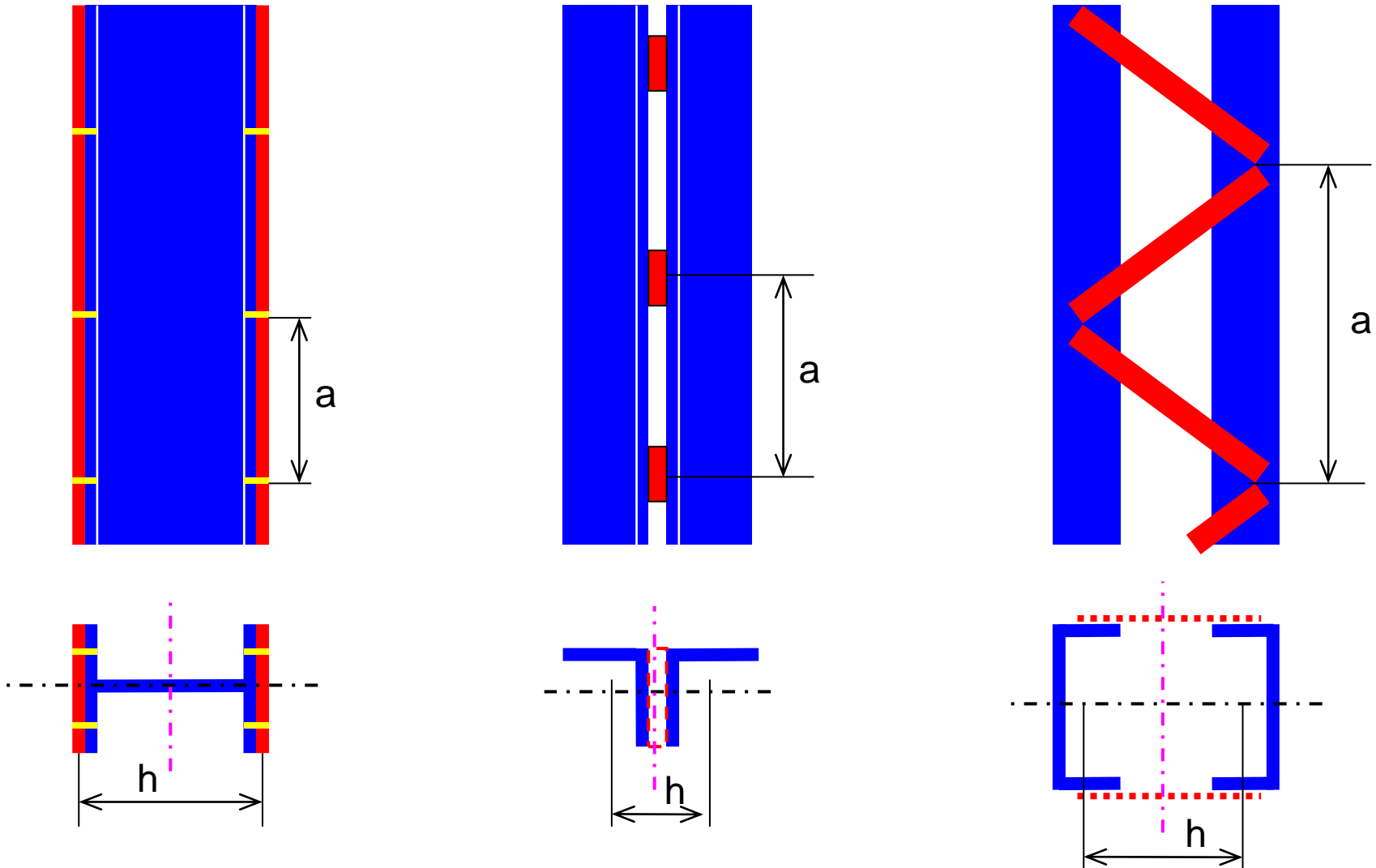


## Estados límites últimos:

1. Pandeo global flexional de la columna actuando como un conjunto (considerar efecto de las deformaciones de corte)
2. Pandeo de un tramo del cordón.
3. Pandeo local o abollamiento (normalmente no se considera porque se usan perfiles laminados)
4. Falla del elemento de conexión.
5. Falla de los medios de unión de los elementos de enlace (Grupos IV y V).
6. Distorsión de la sección transversal (Grupos IV y V).



## Determinación de la distancia la separación “a”



## Determinación de la resistencia

### 1. Barras armadas Grupos I, II y III – Sección E.6.2.

Se determina la resistencia nominal con la expresión:

$$P_n = F_{cr} A_g (10^{-1}), \quad \phi = 0.85$$

Para el cálculo de la tensión crítica  $F_{cr}$  se consideran los estados últimos indicados para columnas simples, con la siguiente modificación:

**Si el modo de pandeo implica deformaciones relativas** que producen esfuerzos de corte en los elementos que unen las barras individuales (pasadores, cordones de soldadura, o platabandas perforadas) se usa una esbeltez modificada  $(kL/r)_m > kL/r$ , (es decir que se usa una esbeltez modificada para el pandeo alrededor del eje ideal).

Adicionalmente, se exige el cumplimiento de especificaciones constructivas para controlar los restantes estados límites últimos.

## Determinación de la resistencia

Cálculo de la esbeltez modificada,  $(kL/r)_m$ :

a) Para uniones intermedias ejecutadas con bulones en uniones con ajuste sin juego:

$$\left(\frac{kL}{r}\right)_m = \sqrt{\left(\frac{kL}{r}\right)_o^2 + \left(\frac{a}{r_i}\right)^2}$$

$(kL/r)_o$ : esbeltez de la columna armada actuando como una unidad.

$a/r_i$ : mayor esbeltez de una barra componente

b) Para uniones intermedias soldadas o ejecutadas con bulones en uniones pretensadas o de deslizamiento crítico:

$$\left(\frac{kL}{r}\right)_m = \sqrt{\left(\frac{kL}{r}\right)_o^2 + \left(\frac{k_i a}{r_i}\right)^2}$$

$a/r_{ib}$ : la esbeltez de una barra componente relativa a su eje baricéntrico paralelo al eje de pandeo.

$k_i = 0,50$  para ángulos espalda contra espalda en contacto continuo.

$= 0,75$  para canales espalda contra espalda en contacto continuo.

$= 0,86$  para otros casos.



## Especificaciones particulares y constructivas. Sección E.6.2.2

Se indican en esa sección una serie de requerimientos adicionales que deben cumplir las columnas, según sean del grupo I, II o III. No se presentan en esta guía de estudio la descripción de esos requerimientos.

A modo de ejemplo, uno de los requerimientos indica que los bulones o cordones de soldadura dispuestos a lo largo de la barra armada tendrán las dimensiones y separación necesaria para resistir un esfuerzo de corte ideal:

$$V = 0.02 \phi_c P_n$$

# Columnas armadas. Grupos IV y V

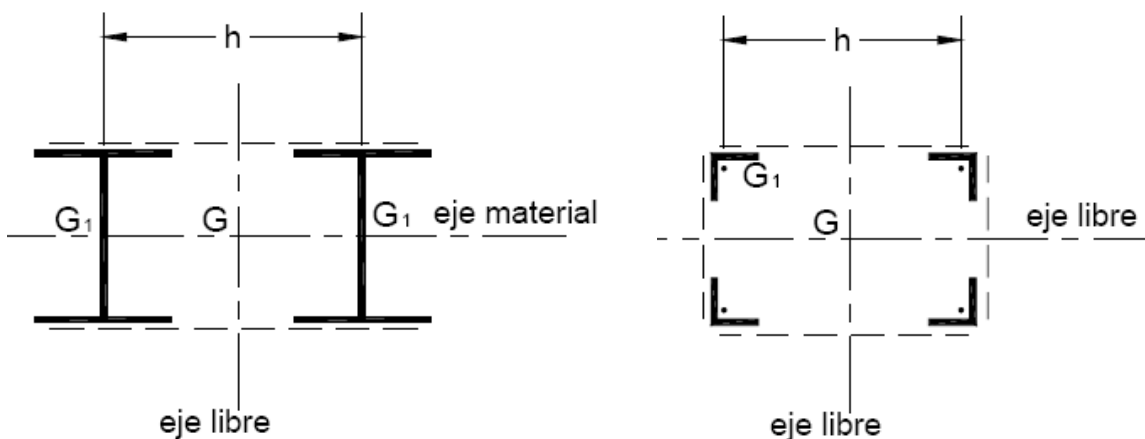
## Determinación de la resistencia

### 2. Barras armadas Grupos IV y V – Sección E.6.3

La resistencia nominal se determina de la siguiente forma:

- Si la barra tiene eje material, la resistencia para el pandeo alrededor de dicho eje se obtiene de acuerdo a lo indicado para columnas simples.
- Para el pandeo alrededor del eje o ejes libres, la resistencia se obtiene considerando una deformación inicial  $e_0$  (imperfección geométrica) de  $kL/500$  para los cordones y de  $kL/400$  para los elementos de enlace.

Las solicitaciones requeridas en las barras de los cordones y en los elementos de enlace se determinarán tomando en cuenta la deformación de la barra armada. (efecto de segundo orden).



## Determinación de la resistencia

El método se basa en determinar la resistencia requerida en cada barra de la sección considerando efectos de segundo orden (se supone pandeo global de la barra).

Para Grupo IV (con celosías), Sección E.6.3.1(a):

$$P_{u1} = \frac{P_u}{n} + \frac{M_s}{n_1 h} (10^2)$$

Se deberá verificar  $P_{u1} \leq P_{d1}$

$$P_{d1} = \phi_c F_{cr} A_{g1} (10^{-1})$$

$$\lambda_{c1} = \left( \frac{L_1}{r_i} \right) \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} \quad \text{Pandeo flexional}$$

$$\lambda_{c1} = \lambda_e = \sqrt{\frac{F_y}{F_e}} \quad \text{Pandeo torsional o flexo-torsional}$$

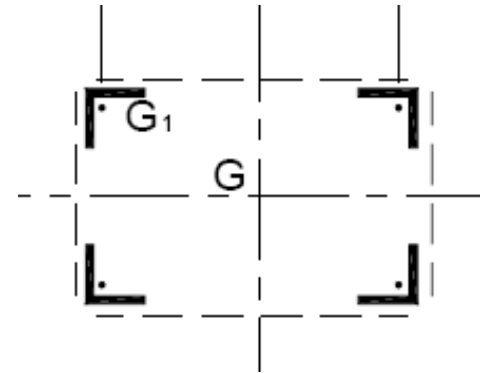
$$M_s = \frac{P_u e_o}{1 - \frac{P_u}{P_{cm}}} (10^{-2})$$

$$P_{cm} = \frac{\pi^2 E A_g}{\left( \frac{kL}{r} \right)_m^2} (10^{-1})$$

$$\lambda_m = \left( \frac{kL}{r} \right)_m = \sqrt{\left( \frac{kL}{r} \right)_o^2 + \lambda_1^2}$$

$\lambda_1$ : valor auxiliar relacionado con la rigidez a corte de la celosía de enlace.

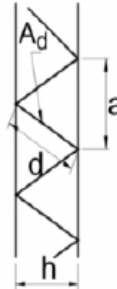
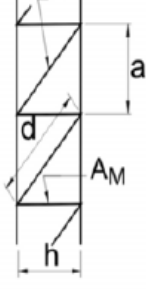
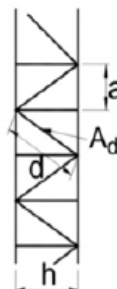
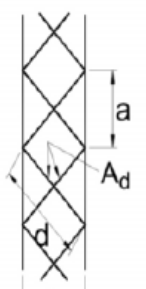

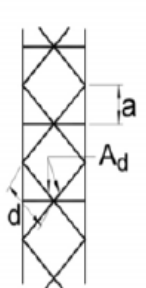

$L_1$ : longitud de pandeo para pandeo flexional del cordón.



# Columnas armadas

## Grupos IV

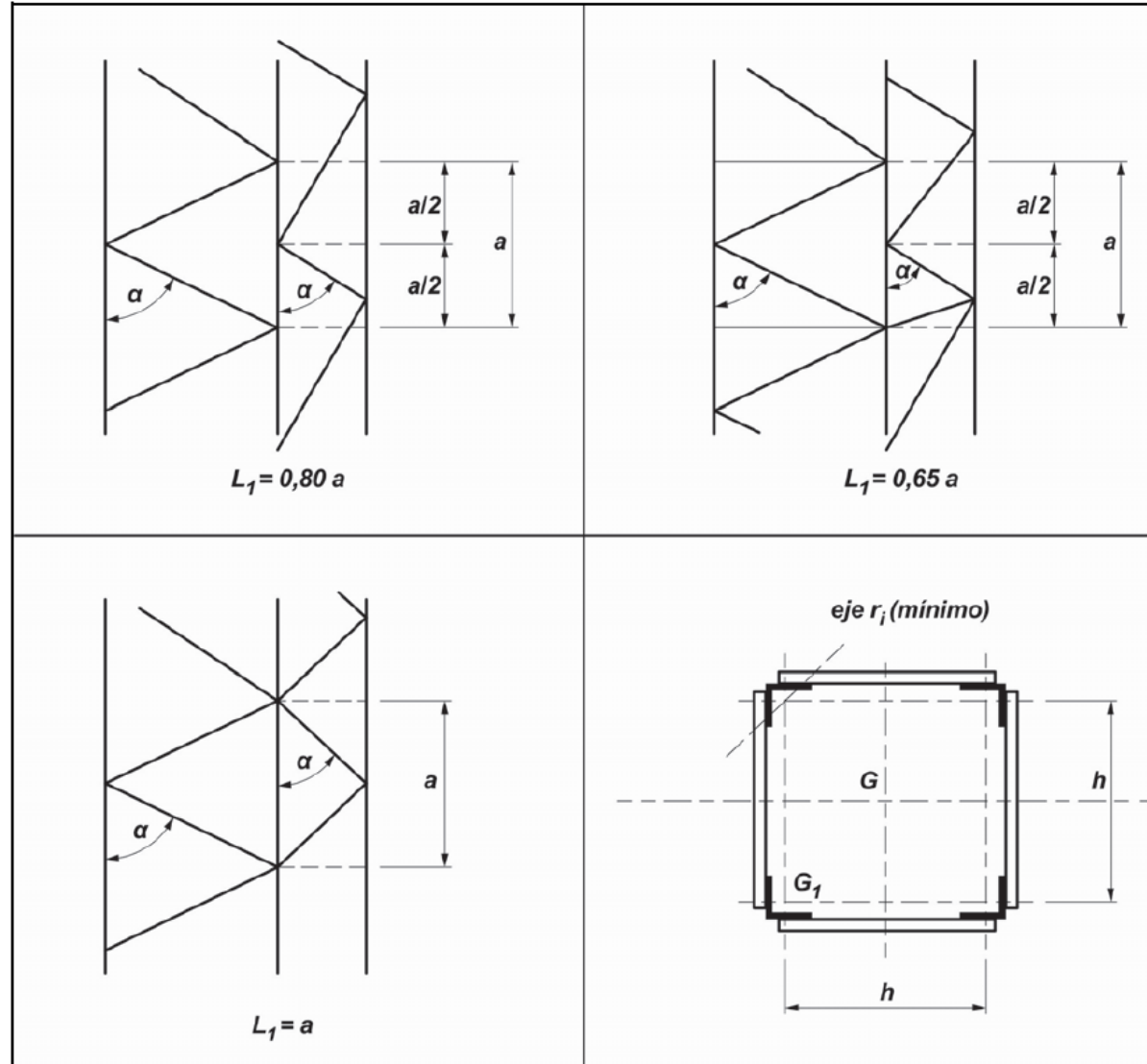
Determinación de  $\lambda_1$ , según  
Figura E.6.6

 $\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{2 A_g d^3}{n_o A_d a h^2}}$	 $\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{A_g}{n_o a h^2} \left( \frac{d^3}{A_d} + \frac{h^3}{A_M} \right)}$
 $\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{A_g d^3}{n_o A_d a h^2}}$	 $\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{A_g d^3}{2 n_o A_d a h^2}}$
 $\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{A_g d^3}{2 n_o A_d a h^2}}$	 $\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{2 A_g d^3}{n_o A_d a h^2}}$
 $\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{A_g}{2 n_o a h^2} \left( \frac{d^3}{A_d} + \frac{h^3}{A_M} \right)}$	<p><math>A_g</math> = Sección bruta total de la barra armada.</p> <p><math>n_o</math> = número de planos de celosía</p> <p><math>A_d</math> } = sección bruta de diagonal y  <math>A_M</math> } montante de un sólo plano.</p>

## Determinación de $L_1$

$L_1 = a$  cuando la columna armada tiene eje material y celosías sólo en una dirección, en cm.

$L_1$  de acuerdo con la Figura E.6.7. cuando hay celosías en planos perpendiculares, en cm.



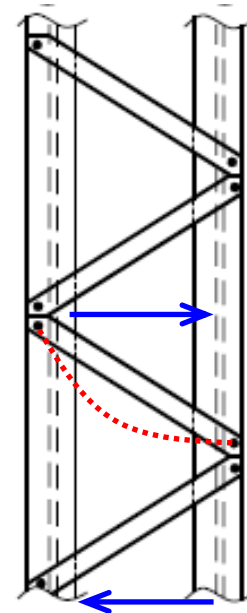
## Columnas Grupo IV (con celosías).

Determinación de la resistencia requerida en las celosías:

$$V_{eu} = \beta P_u$$

$$\beta = \frac{\pi}{400} \left[ \frac{1}{1 - \frac{P_u}{P_{cm}}} \right]$$

$$P_{cm} = \frac{\pi^2 E A_g}{\left( \frac{k L}{r} \right)_m^2} (10^{-1})$$



Barras sometidas a compresión y flexión.

$$M_s = \frac{(P_u e_o + M_u)}{1 - \frac{P_u}{P_{cm}}}$$

$$V_{eu} = \beta P_u + V_u$$

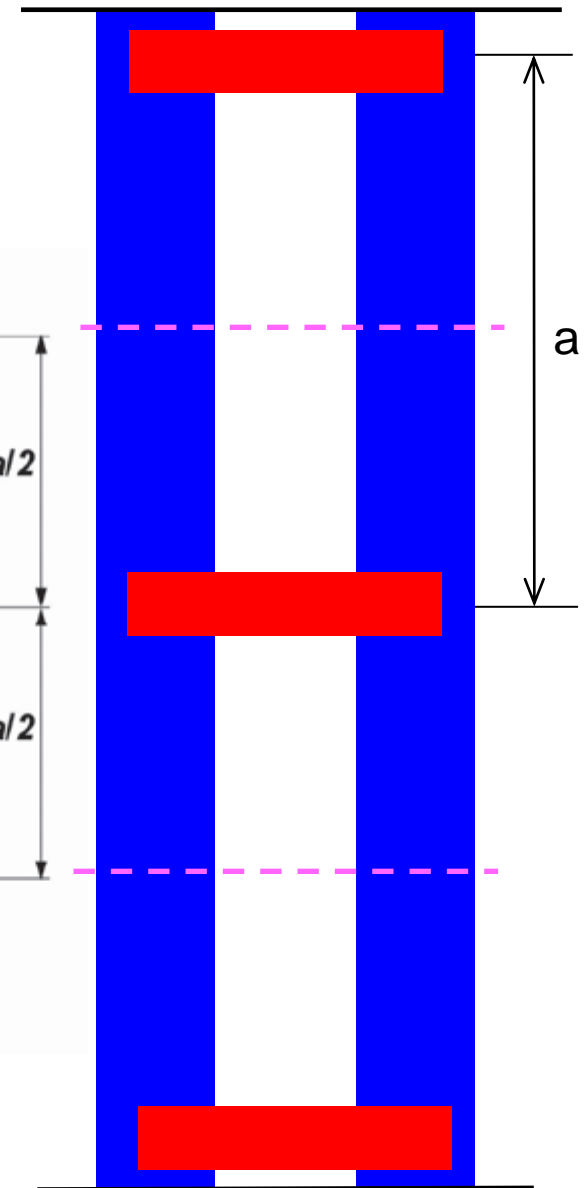
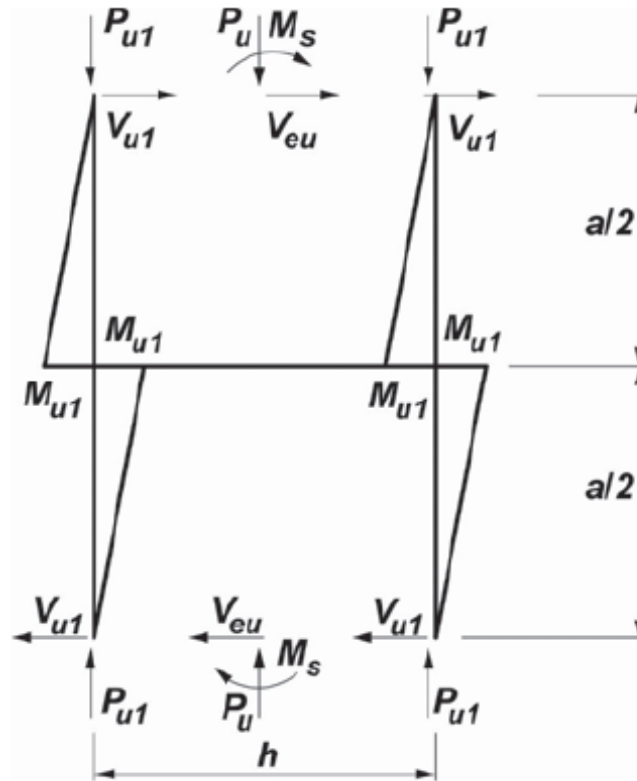


## Columnas Grupo V (con presillas).

El método de cálculo es similar, si bien los cordones de las columnas armada se dimensionan para resistir:

- Carga axial  $P_{u1}$
- Flexión  $M_{u1}$
- Corte  $V_{u1}$

$$M_s = \frac{P_u e_o}{1 - \frac{P_u}{P_{cm}}} (10^{-2})$$



## Columnas Grupo V (con presillas).

Esfuerzo axial  $P_{u1}$  (ídem Grupo IV con esbeltez modificada:

$$P_{u1} = \frac{P_u}{n} + \frac{M_s}{n_1 h} (10^2) \quad \lambda_m = \left( \frac{kL}{r} \right)_m = \sqrt{\left( \frac{kL}{r} \right)_o^2 + \frac{\lambda_1^2}{\theta}}$$

Momento flector  $M_{u1}$ :  $M_{u1} = \frac{V_{eu} a}{4 n_1} (10^{-2})$

Esfuerzo de corte  $V_{u1}$ :

$$V_{u1} = \frac{V_{eu}}{2 n_1}$$

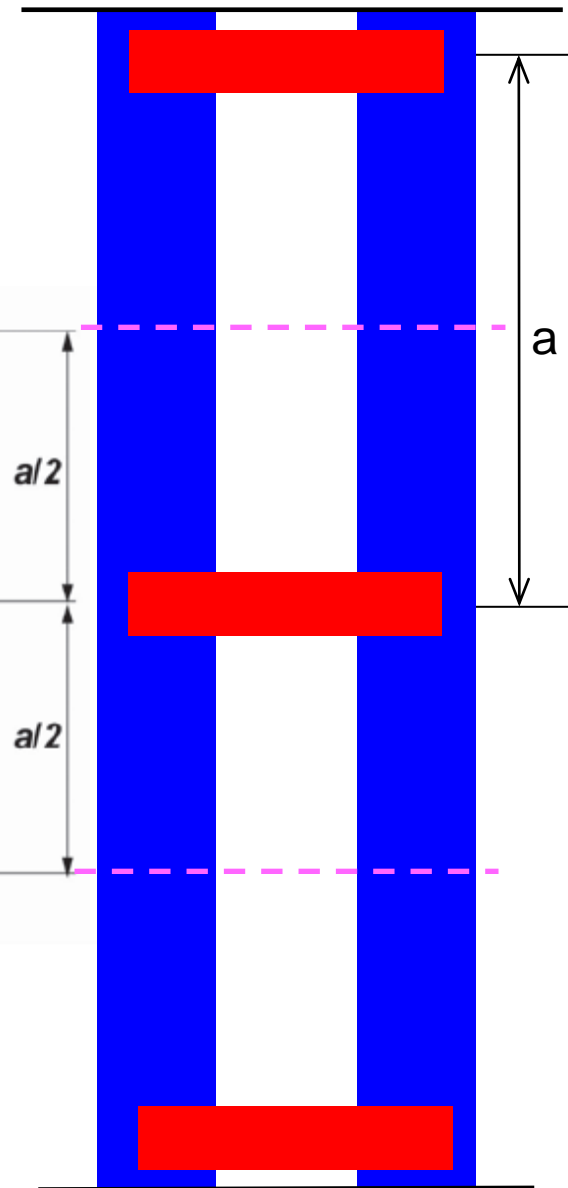
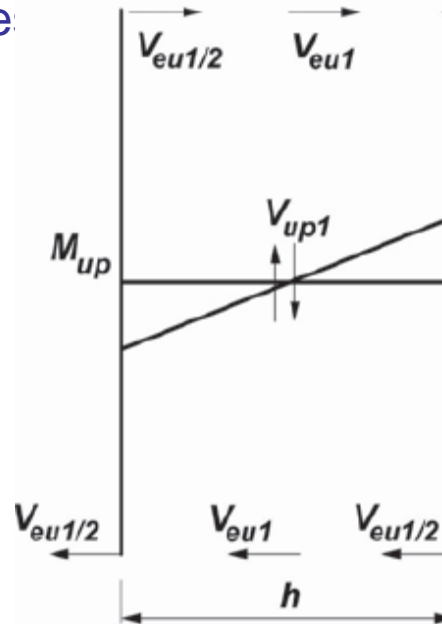
$$V_{eu} = \beta_1 P_u \quad \beta_1 = \frac{\pi}{500} \left[ \frac{1}{1 - \frac{P_u}{P_{cm}}} \right]$$

## Columnas Grupo V (con presillas).

Determinación de la resistencia requerida en presillas celosías  
 Las presillas deben resistir las sollicitaciones  $M_{up}$  y  $V_{up}$  resultante del esfuerzo de corte  $V_{eu1}$

$$V_{eu1} = \beta_2 P_u$$

$$\beta_2 = \frac{\pi}{400} \left[ \frac{1}{1 - \frac{P_u}{P_{cm}}} \right]$$



## Especificaciones particulares y constructivas. Sección E.6.3.2

Al igual que para las columnas armadas de los grupos I, II y III, en el reglamento se prescriben una serie de requerimientos adicionales que deben cumplir las columnas armadas, según sean del grupo IV o V. Estos requerimientos no se describen en la presente guía de estudio.

### **Aclaración:**

Se han descrito los conceptos y principales requerimientos para el cálculo de columnas armadas. Todos los requisitos, ecuaciones, definición de los distintos parámetros se presentan y describen detalladamente en el reglamento.

# Columnas armadas. Grupos IV y V

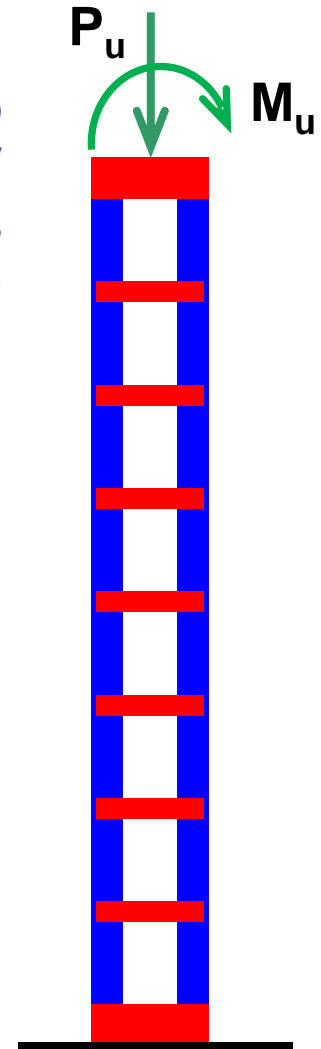
## Columnas solicitadas por carga axial y flexión, $P_u$ y $M_u$

El reglamento AISC 360 (USA), en el cual se basa el reglamento CIRSOC 301, no considera las columnas armadas de los grupos IV y V. El procedimiento de cálculo de la resistencia y requerimientos constructivos indicado en la reglamentación argentina se fundamentan en reglamentos europeos.

Es por esta razón que el reglamento CIRSOC 301 especifica un procedimiento de cálculo distintos para columnas armadas de los grupos IV y V sometidos a flexo-compresión. En este caso, no se aplica el concepto de diagrama de interacción M-P (indicado para columnas simples y grupos I, II y III), si no que se modifica el momento flector  $M_s$ , para incluir el efecto del momento  $M_u$ .

Recordar que el momento flector  $M_s$  es el momento resultante de la excentricidad  $e_o$ , incluyendo efectos de segundo orden:

$$M_s = \frac{P_u e_o}{1 - \frac{P_u}{P_{cm}}} (10^{-2})$$



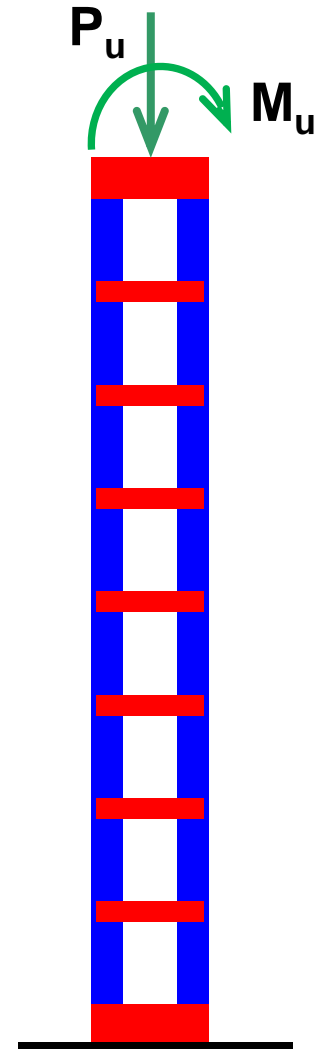
# Columnas armadas. Grupos IV y V

## Columnas solicitadas por carga axial y flexión, $P_u$ y $M_u$

Momento  $M_s$  para el caso de flexo-compresión:

$$M_s = \frac{(P_u e_o (10)^{-2} + M_u)}{1 - \frac{P_u}{P_{cm}}}$$

Las ecuaciones para determinar el esfuerzo de corte y el momento  $M_s$  en el caso columnas armadas con los dos ejes libres, se indican detalladamente en la sección H.5. del reglamento. En esta presentación se destacan los aspectos conceptuales del procedimiento.





# Método de análisis directo

## Aspectos conceptuales



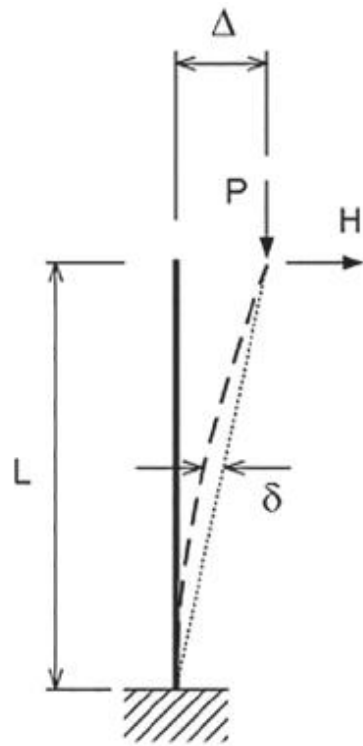
Las especificaciones para la aplicación del método de análisis directo se incluyen en la sección Capítulo C del CIRSOC 301-2018

El procedimiento puede resumirse en dos pasos principales:

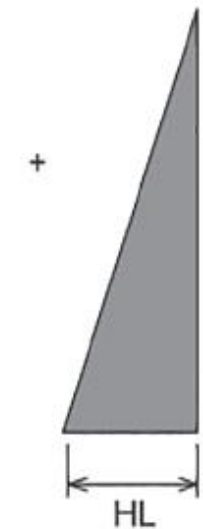
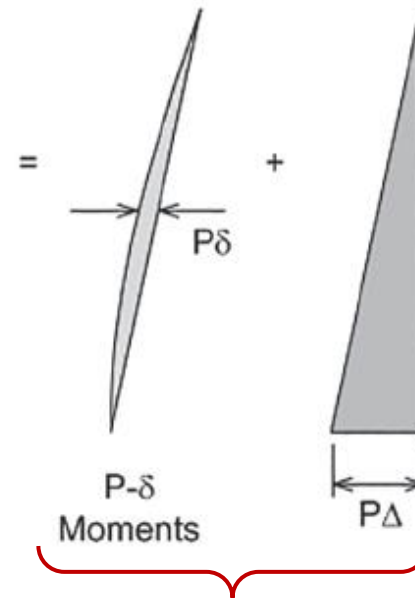
- 1. Determinación de la resistencia requerida**, carga axial de compresión y momentos flectores,  $P_u$  y  $M_u$ . (sección C.2.). Esta determinación se realiza mediante análisis estructural considerando:
  - Efectos de segundo orden, P- $\Delta$  y P- $\delta$ .
  - Consideración de imperfecciones iniciales (desplome de H/500).
  - Reducción de la rigidez de los miembros estructurales ( $\rightarrow$  mayores desplazamientos).
- 2. Determinación de la resistencia de diseño** (sección C.3.). Se realiza según lo indicado por el reglamento, considerando el factor de longitud efectiva  $k=1$ .

$$R_u \leq R_d$$

## Efectos de segundo orden, P- $\Delta$ y P- $\delta$



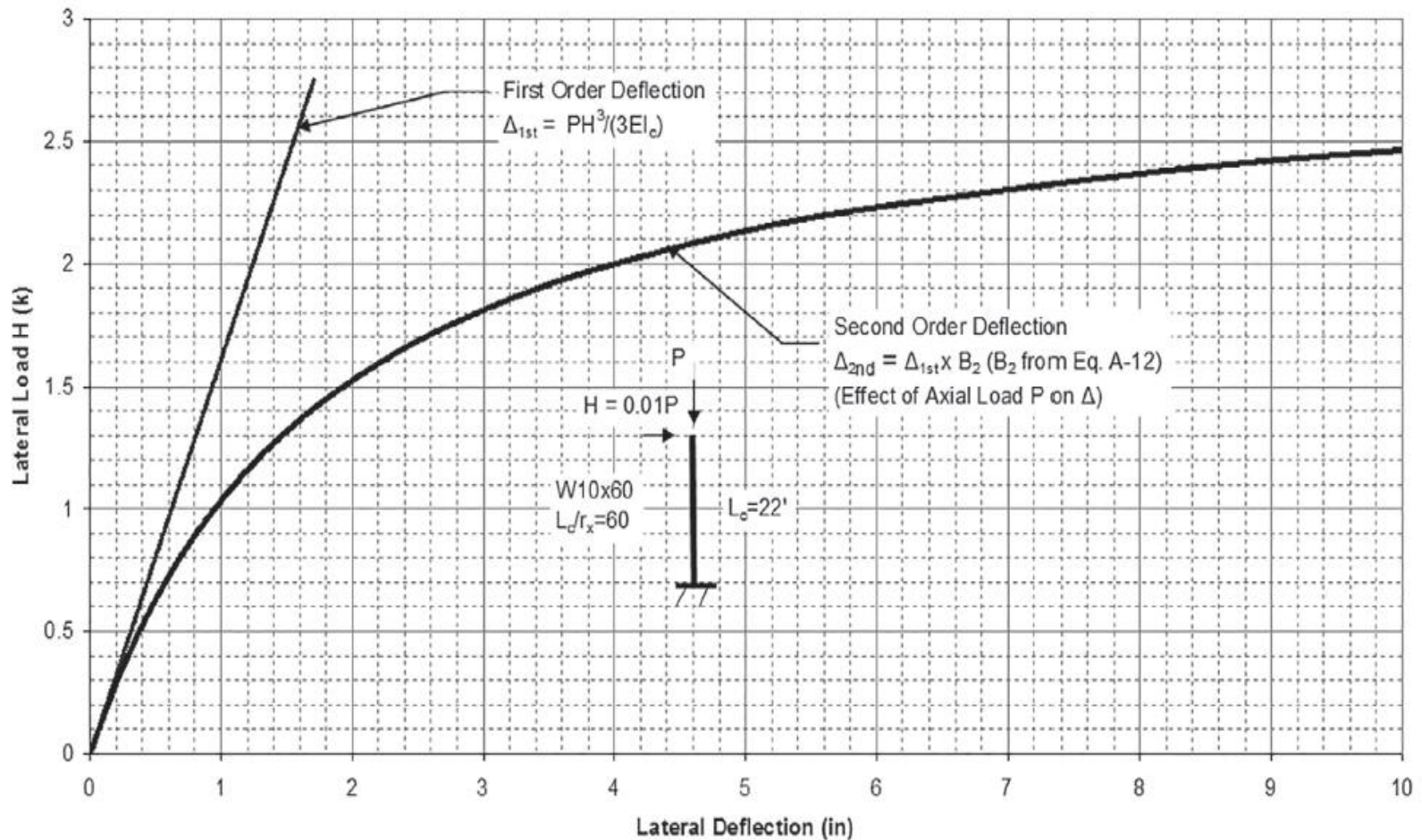
La condición de equilibrio se satisface considerando la posición deformada de la estructural



Momentos de segundo orden

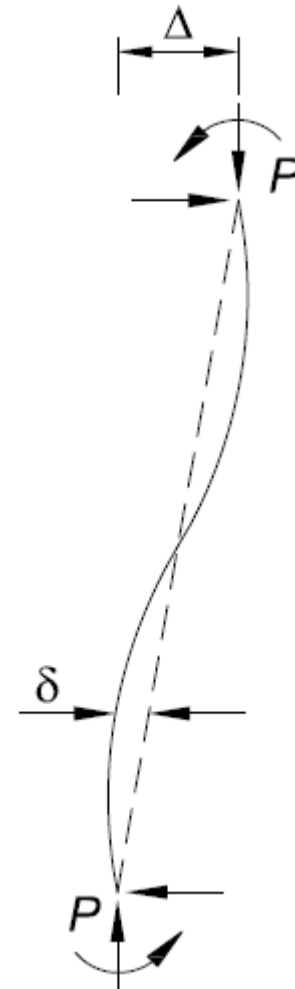
Momentos de primer orden

## Efectos de segundo orden, P-Δ y P-δ



## Efectos de segundo orden, $P-\Delta$ y $P-\delta$

La condición de equilibrio se satisface considerando la posición deformada de la estructural

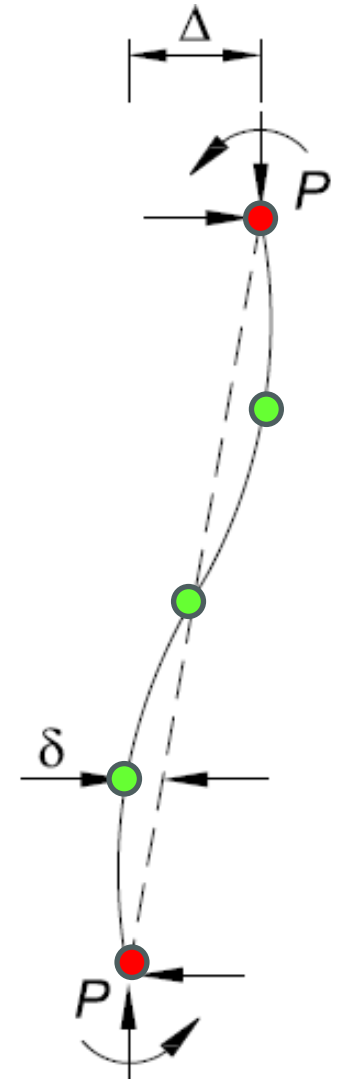


## Efectos de segundo orden, $P-\Delta$ y $P-\delta$

Estos efectos pueden considerarse adecuadamente mediante la utilización de programas de análisis estructural.

La mayoría de los programas comerciales incluyen algoritmos para considerar el efecto  $P-\Delta$  mediante el procedimiento de la matriz de rigidez geométrica  $K_G$ . De modo que es muy sencillo para el usuario incluir este efecto en el análisis.

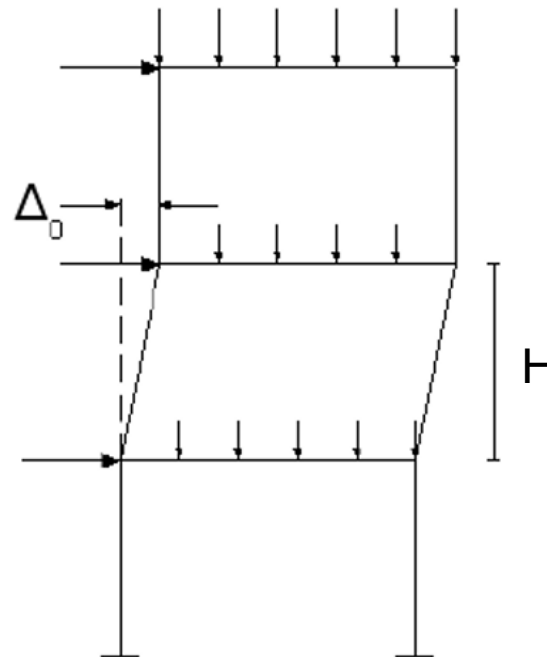
Para la consideración del efecto  $P-\delta$  se presentan varias alternativas, pero la más simple desde el punto de vista práctico es subdividir cada barra (viga, columna, etc.) introduciendo nodos internos que pueden capturar adecuadamente la deformada de la barra.



## Consideración de imperfecciones iniciales (desplome de $H/500$ )

Se pueden considerar las imperfecciones según dos procedimientos:

- **Modelado directo de las imperfecciones**, desplazando en el modelo los nudos de la estructura de manera que estas imperfecciones produzcan el máximo efecto desestabilizante.

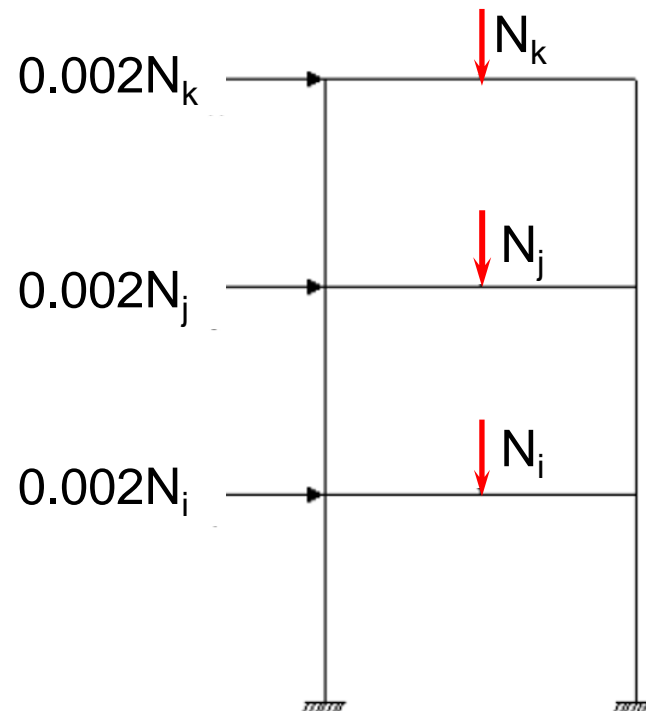




## Consideración de imperfecciones iniciales (desplome de $H/500$ )

Se pueden considerar las imperfecciones según dos procedimientos:

- **Uso de cargas ficticias** (*notational loads*), aplicadas como cargas laterales en todos los niveles. Estas fuerzas laterales ficticias son proporcionales a la carga gravitatoria del nivel.



## Reducción de la rigidez de los miembros estructurales

- (1) Se deberá aplicar un factor de reducción igual a **0,80** a todas las rigideces de los elementos estructurales.
- (2) Se deberá aplicar un factor de reducción adicional  $\tau_b$  a la rigidez a flexión de todos los miembros de la estructura cuya rigidez a flexión contribuya a la estabilidad de la estructura.

(a) Cuando  $(P_u/P_y) \leq 0,5$   $\tau_b = 1$  (C.2.2a)

(b) Cuando  $(P_u/P_y) > 0,5$   $\tau_b = 4 (P_u/P_y) [1-(P_u/P_y)]$  (C.2.2b)

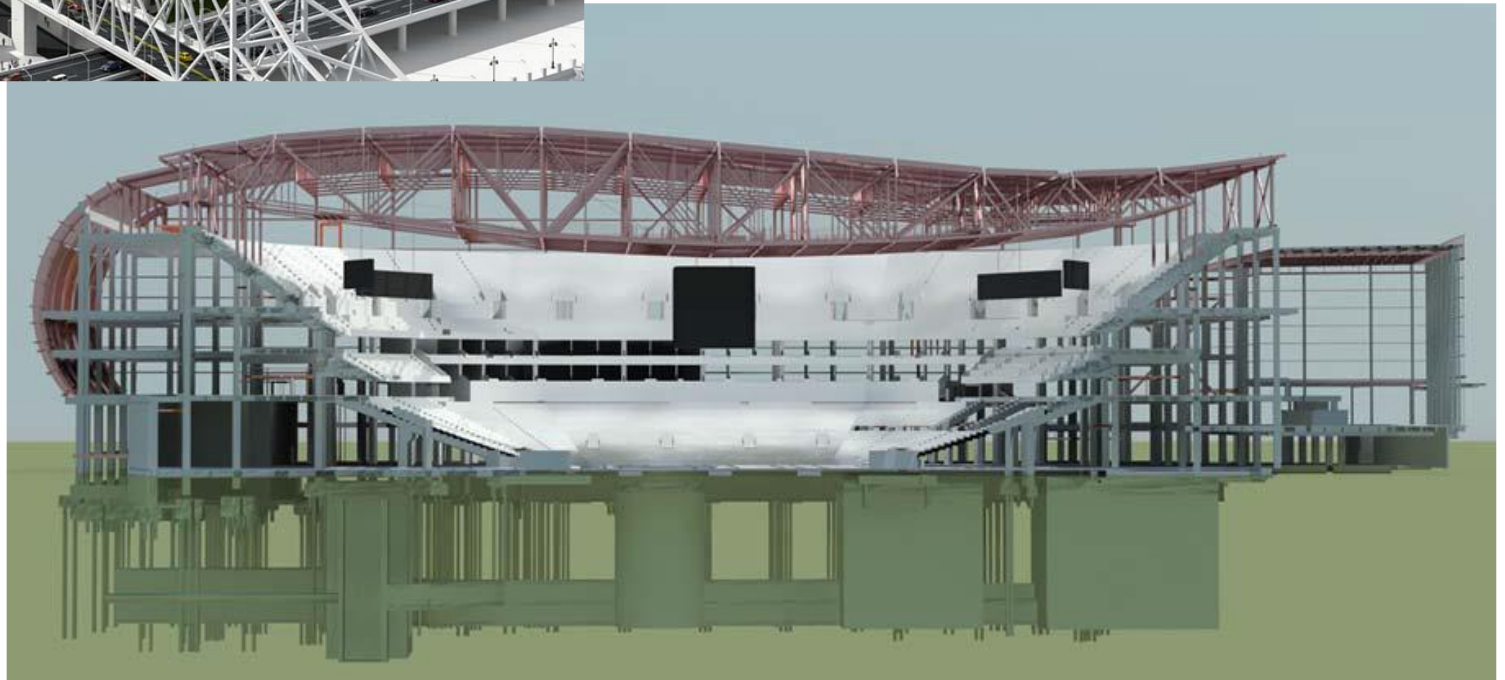
$$P_u/P_y = 0.6 \rightarrow \tau_b = 0.96$$

$$P_u/P_y = 0.7 \rightarrow \tau_b = 0.84$$

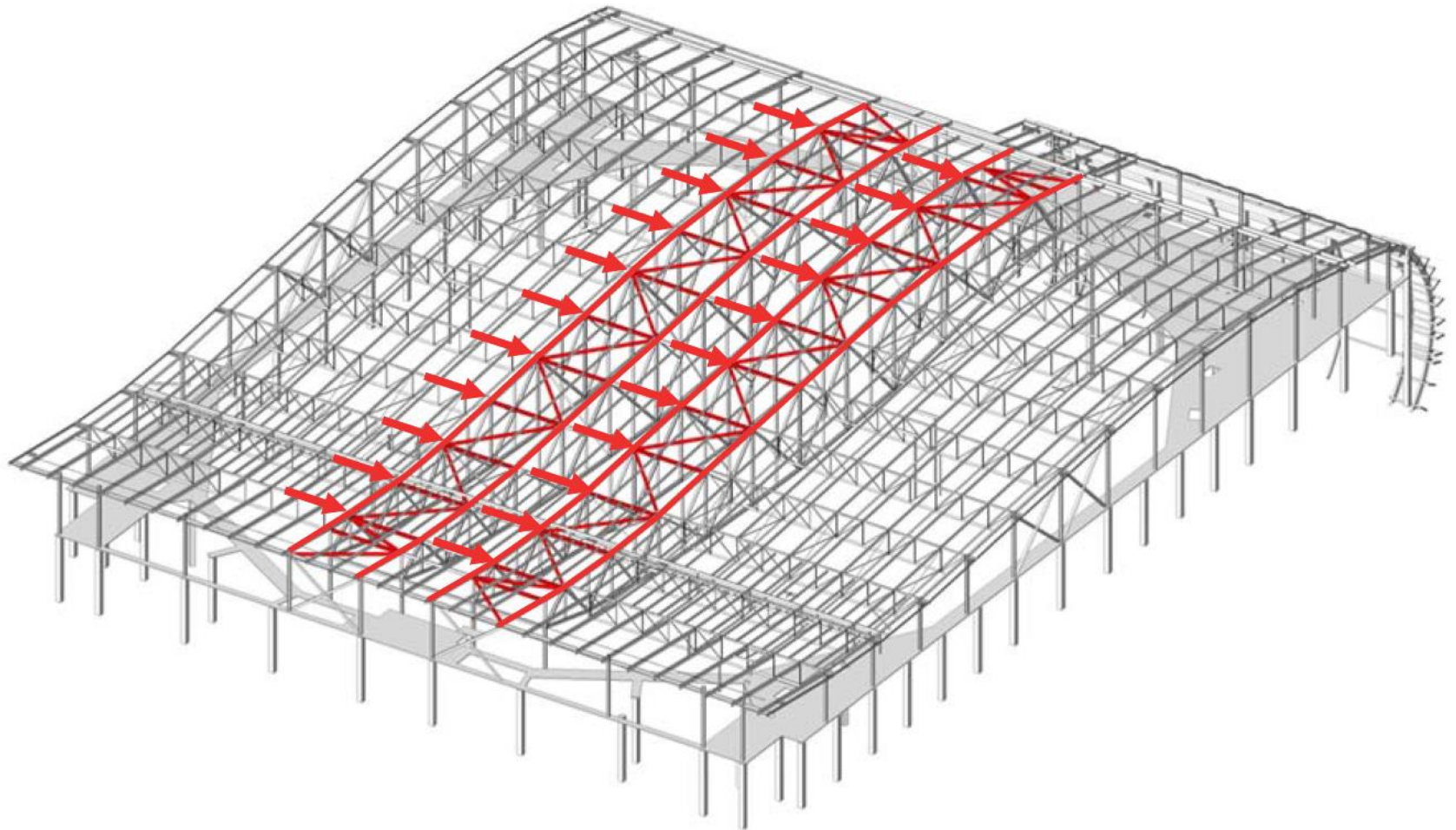
$$P_u/P_y = 0.6 \rightarrow \tau_b = 0.64$$

# Método de análisis directo

KFC Yum! Center,  
Louisville, Kentucky



# Método de análisis directo



## ASPECTOS PRINCIPALES

- Modela adecuadamente el comportamiento de estructuras aporticadas y reticulados complejos.
- Considera imperfecciones iniciales (explícitamente o mediante cargas ficticias equivalentes).
- Reduce la rigidez que contribuye a la estabilidad de la estructura (las verificaciones para estados límites de servicio consideran la rigidez sin reducción).
- Incluye efectos de segundo orden (no linealidad geométrica) en forma explícita.
- Requiere del uso de programas de análisis estructural.
- No se requiere evaluar la longitud de pandeo efectiva ( $k=1$ ).