Análisis Matemático I
Clase 1: Presentación de la Cátedra-Introducción a Funciones

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2023

Cuerpo Docente

- Profesor Titular: Dr. Pablo Ochoa, e-mail: pablo.ochoa@ingenieria.uncuyo.edu.ar
- Profesor Adjunto: Lic. Martin Matons
- Auxiliares:
  - Ing. Paula Acosta
  - Ing. Julián Martínez
  - Lic. Verónica Nodaro
  - Dra. Dalía Bertoldi
  - Dr. Hernán Garrido
- Profesora Colaboradora: Dra. Mercedes Larriqueta

Inicio del cuatrimestre: Lunes 06 de Marzo de 2023.
Finalización del cuatrimestre: 17 de Junio de 2023.

Metodología

Inicio del cuatrimestre: Lunes 06 de Marzo de 2023.
Finalización del cuatrimestre: 17 de Junio de 2023.
Metodología de Enseñanza:
La modalidad de cursado es de carácter presencial. Las clases tienen un carácter teórico-práctico. De las 8 horas semanales, se destinarán 4 horas al dictado de las clases teórico-prácticas y 4 horas al desarrollo de actividades prácticas.
Importante: consultar frecuentemente la plataforma AulaAbierta, ahí se encuentran las comisiones, horarios de consulta y se irá subiendo el material didáctico del curso.

Comisiones de teoría, turno mañana

Lunes de 8 a 11 hs:

- Ingresantes de Industrial turno mañana (apellidos de la A a la G inclusive): Anfiteatro Oeste
- Ingresantes de Civil y Petróleos: Anfiteatro Oeste
- Todos los recursantes: Aula 17

Jueves de 8 a 10 hs:

- Ingresantes de Industrial turno mañana (apellidos de la A a la G inclusive): Anfiteatro Oeste
- Ingresantes de Civil y Petróleos: Anfiteatro Oeste
- Todos los recursantes: Aula 17

Comisiones de teoría, turno tarde

Lunes de 17 a 19 hs:

- Ingresantes de Industrial turno tarde con apellidos de la H a la O inclusive): Anfiteatro Oeste
- Ingresantes Lic. en Cs. de la Computación: Anfiteatro Oeste
- Ingresantes de Industrial turno tarde con apellidos de la P a la Z inclusive): Aula 16

Viernes de17 a 19 hs:

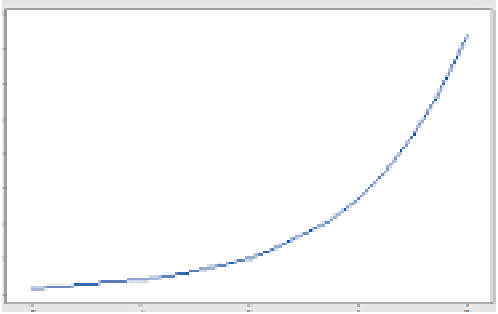
- Ingresantes de Industrial turno tarde con apellidos de la H a la O inclusive): Anfiteatro Oeste
- Ingresantes Lic. en Cs. de la Computación: Anfiteatro Oeste
- Ingresantes de Industrial turno tarde con apellidos de la P a la Z inclusive): Aula 17

Las comisiones de práctica pueden consultarse en el Aula Abierta.

Objetivos:

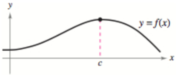
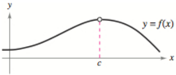
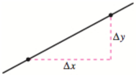
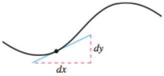
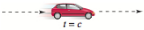
- Promover el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, reflexivo y crítico.
- Desarrollar la modelización matemática de problemas propios de la ingeniería y de la Computación.
- Estimular el aprendizaje de herramientas analíticas para resolver diversas situaciones prácticas.
- Estimular la interpretación y análisis de los resultados obtenidos como primer indicador de la válidez de estos.
- Fomentar el aprendizaje significativo de la Matemática a través de su aplicación a la resolución de problemas prácticos.

EXPECTATIVA: Curva de aprendizaje



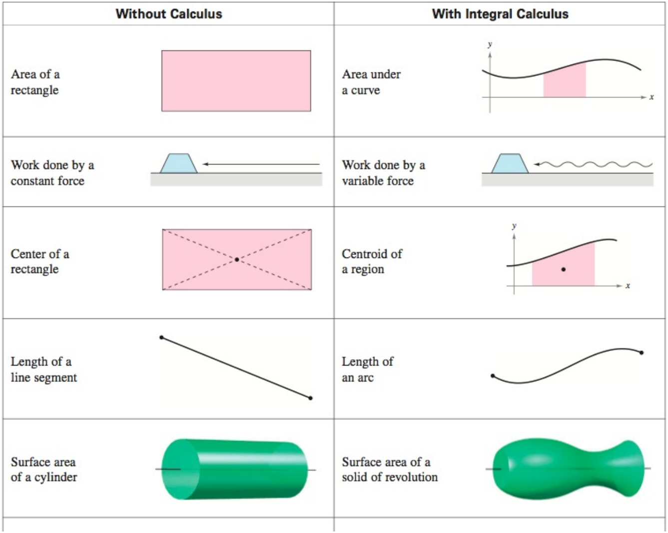
Presentación de la Cátedra

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA:

Without Calculus		With Differential Calculus	
Value of $f(x)$ when $x = c$		Limit of $f(x)$ as x approaches c	
Slope of a line		Slope of a curve	
Secant line to a curve		Tangent line to a curve	
Average rate of change between $t = a$ and $t = b$		Instantaneous rate of change at $t = c$	
Curvature of a circle		Curvature of a curve	

Presentación de la Cátedra

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA:



Without Calculus	With Integral Calculus
Area of a rectangle	Area under a curve
Work done by a constant force	Work done by a variable force
Center of a rectangle	Centroid of a region
Length of a line segment	Length of an arc
Surface area of a cylinder	Surface area of a solid of revolution

Presentación de la Cátedra

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA:

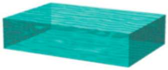
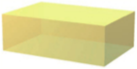
Mass of a solid of constant density		Mass of a solid of variable density	
Volume of a rectangular solid		Volume of a region under a surface	
Sum of a finite number of terms	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S$	Sum of an infinite number of terms	$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S$

Diagrama tomado de: Edwards, B. and Larson, R. Calculus of a single variable. Ed. 10. 2014.

Bibliografía

Libro principal:
Título: Cálculo: una variable.
Autor: George Thomas.
Editorial: PEARSON.
Edición: 12.
Año: 2010.
Importante: habrá algunas diferencias entre los temas dados en clases y los presentados por el libro. Se debe priorizar el contenido de las diapositivas y utilizar el libro como material de apoyo. En las clases se aclarará cuando los contenidos sean presentado en forma diferente a la del libro.

Régimen de regularidad

Durante el semestre, se tomarán 2 evaluaciones parciales para definir la regularidad del estudiante. Cada una consistirá de ejercicios teórico-prácticos del mismo estilo y nivel de dificultad que los de las guías de trabajos prácticos. El contenido de cada examen será informado durante el cuatrimestre con la antelación adecuada. **Un alumno queda regular cuando aprueba los dos exámenes en cualquiera de sus instancias.**

Evaluaciones parciales

Importante: las instancias de evaluación son únicas y las fechas son inamovibles. La inasistencia a un examen parcial se considera como un No aprobado (aún si la inasistencia se justifica). Como regla general, el alumno recupera aquello que no ha aprobado (esto incluye inasistencias). Es decir, si en una evaluación parcial no obtuvo el mínimo de puntaje para aprobar, entonces recuperará solamente esa evaluación. Si el alumno no obtiene el puntaje mínimo en dos evaluaciones parciales, entonces rendirá un global asociado a los contenidos de los dos exámenes no aprobados, con la siguiente excepción: **si no asiste a las dos evaluaciones parciales, quedará libre (en carácter de Abandonó) sin posibilidad de recuperar y sin posibilidad de acceder al examen final.**

Evaluaciones parciales

Importante: las instancias de evaluación son únicas y las fechas son inamovibles. La inasistencia a un examen parcial se considera como un No aprobado (aún si la inasistencia se justifica). Como regla general, el alumno recupera aquello que no ha aprobado (esto incluye inasistencias). Es decir, si en una evaluación parcial no obtuvo el mínimo de puntaje para aprobar, entonces recuperará solamente esa evaluación. Si el alumno no obtiene el puntaje mínimo en dos evaluaciones parciales, entonces rendirá un global asociado a los contenidos de los dos exámenes no aprobados, con la siguiente excepción: **si no asiste a las dos evaluaciones parciales, quedará libre (en carácter de Abandonó) sin posibilidad de recuperar y sin posibilidad de acceder al examen final.**

Cronograma (horarios a confirmar):

- Primer examen parcial: Lunes 3 de Abril
- Segundo examen parcial: Lunes 15 de Mayo
- Recuperatorios/ Global: Lunes 12 de Junio.

Acreditación de la asignatura

La acreditación de la asignatura es por examen final. La metodología del mismo se distingue si el alumno es regular o libre. En todos los casos, el alumno debe traer en el examen final una carpeta con ejercicios resueltos de una guía de ejercitación. Durante el cuatrimestre se darán más detalles.

Acreditación de la asignatura

La acreditación de la asignatura es por examen final. La metodología del mismo se distingue si el alumno es regular o libre. En todos los casos, el alumno debe traer en el examen final una carpeta con ejercicios resueltos de una guía de ejercitación. Durante el cuatrimestre se darán más detalles.

Beneficios de alcanzar la regularidad:

- Puede cursar asignaturas en el semestre siguiente que requieran tener regular AM1.
- Para acreditar la asignatura, puede rendir un examen final escrito más breve que en el caso del alumno libre.
- En su nota final NF, se tiene en cuenta el desempeño durante el cuatrimestre:

NF=0.20 x (promedio de notas de parciales) + 0.80(nota examen final)

Acreditación de la asignatura

Importante. El alumno libre que no haya cursado la asignatura, no se inscribió al espacio, o que no haya rendido ambos exámenes parciales, quedará en condición de **abandonó**, no podrá acceder al examen final. El resto de los alumnos libres (ya sea por haber rendido, pero no aprobar los dos exámenes parciales o por pérdida de regularidad) tendrá acceso al examen final. La nota final del alumno libre será la nota obtenida en el examen final.

Objetivo de la clase 1:

Se espera que el estudiante comprenda la noción de función y comience a describir y analizar distintas funciones elementales desde enfoques geométricos y analíticos.

Noción de función

Las funciones son objetos matemáticos muy importantes para describir el *mundo real*. Algunos ejemplos son:

- la velocidad de ejecución de un algoritmo depende de los pasos a ejecutar
- el costo de elaboración de un tanque metálico cilíndrico depende del radio o de la altura del mismo
- la fuerza ejercida sobre la pared de una presa por un líquido aumenta con la profundidad
- el trabajo realizado por una fuerza sobre un objeto puede depender del desplazamiento del mismo

Noción de función

Considere $f(x) = x^2$, donde $x \in \mathbb{R}$ (x *pertenece a los números reales*). Podemos representar algunos elementos de f como pares ordenados de la forma $(x, f(x))$:

$$(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (2, 4), ...$$

Noción de función

Considere $f(x) = x^2$, donde $x \in \mathbb{R}$ (x *pertenece a los números reales*). Podemos representar algunos elementos de f como pares ordenados de la forma $(x, f(x))$:

$$(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (2, 4), ...$$

Observar que un mismo x no puede aparecer en más de un par ordenado como primer elemento (aunque sí se pueden repetir las segundas entradas de los pares).

Noción de función

Considere $f(x) = x^2$, donde $x \in \mathbb{R}$ (x *pertenece a los números reales*). Podemos representar algunos elementos de f como pares ordenados de la forma $(x, f(x))$:

$$(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (2, 4), ...$$

Observar que un mismo x no puede aparecer en más de un par ordenado como primer elemento (aunque sí se pueden repetir las segundas entradas de los pares).

Definición de función

Sean A y B conjuntos de números reales. Una función f es un conjunto de pares ordenados (a, b), con $a \in A$ y $b \in B$ que cumple: si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$, entonces $b = c$.
El **dominio** de f es el conjunto de todos los $a \in A$ tales que existe $b \in B$ con la propiedad: $(a, b) \in f$. La **imagen** de f es el conjunto de los $b \in B$ tales que existe $a \in A$ con $(a, b) \in f$. El **conjunto de llegada o codominio** de f es el conjunto B.

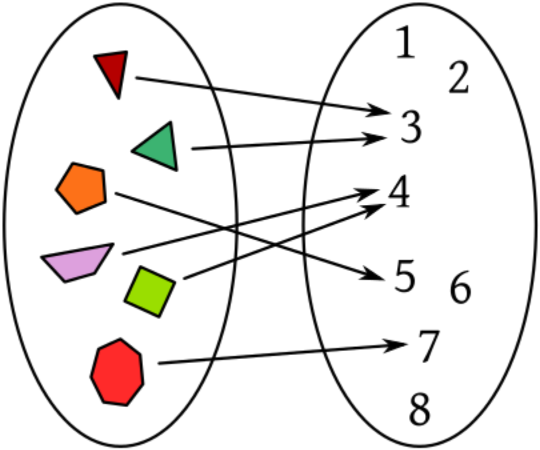
Notación: Si D es el dominio de f y C su conjunto de llegada, entonces escribimos:

$$f : D \to C.$$

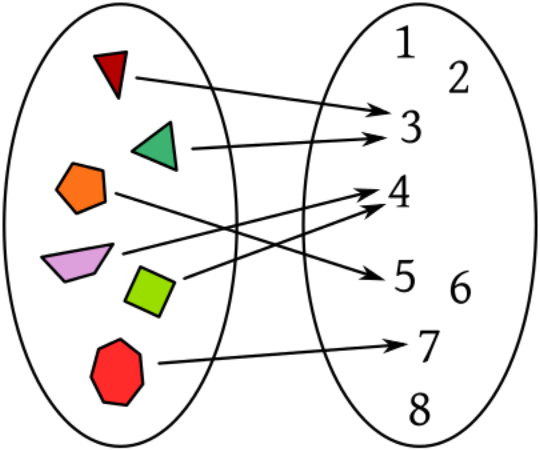
Si en una situación intervienen más de una función, por ejemplo f, g, etc., entonces distinguimos los dominios como sigue: $D(f) =$dominio de f, $D(g) =$ dominio de g, etc.

Observación: la definición de función es diferente de la dada en el libro. La única válida para nosotros es la dada en la diapositiva 16.

Noción de función: ejemplo



Noción de función: ejemplo



Dominio: el conjunto de las 6 figuras geométricas que se ilustran.
Imagen $= \{3, 4, 5, 7\}$.
Conjunto de llegada o codominio $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Dominio de una función

Observación: Siempre que busquemos el dominio de una función, lo haremos encontrando el máximo conjunto de números reales donde esté definida.

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{4 - x}.$$

Dominio de una función

Observación: Siempre que busquemos el dominio de una función, lo haremos encontrando el máximo conjunto de números reales donde esté definida.

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{4 - x}.$$

Solución: para determinar el dominio vamos a encontrar todos los x que cumplen

$$4 - x \geq 0.$$

Despejando x se obtiene:

$$4 - x \geq 0$$

$$4 \geq x.$$

Así, el dominio de f es $D = (-\infty, 4]$.

Dominio de una función

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{2 - x^2}.$$

Dominio de una función

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{2 - x^2}.$$

Solución: para determinar el dominio vamos a encontrar todos los x que cumplen

$$2 - x^2 \geq 0.$$

Despejando x se obtiene:

$$2 - x^2 \geq 0$$

$$2 \geq x^2.$$

Tomando raíces cuadradas a ambos miembros y recordando que $\sqrt{x^2} = |x|$, se obtiene:

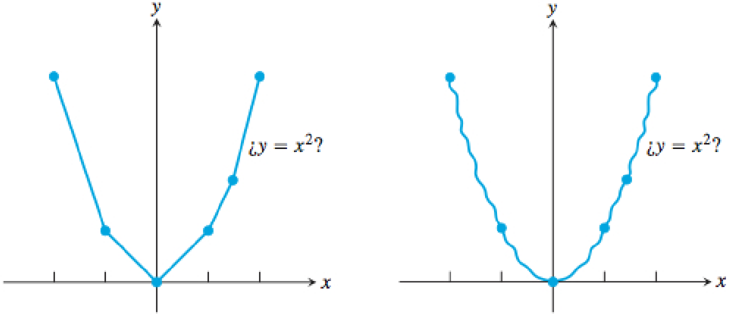
$$\sqrt{2} \geq \sqrt{x^2}$$

$$\sqrt{2} \geq |x|.$$

Así, el dominio de f es $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

El problema de graficar una función.

Gráfica de una función: sea $y = x^2$. ¿Exactitud en el trazado del gráfico?



El Análisis Matemático da herramientas para determinar con gran detalle el comportamiento de la gráfica de una función, facilitando así la descripción y representación de la misma.

Construcción de un modelo matemático

TABLA 1.1 Datos del diapasón

Tiempo	Presión	Tiempo	Presión
0.00091	−0.080	0.00362	0.217
0.00108	0.200	0.00379	0.480
0.00125	0.480	0.00398	0.681
0.00144	0.693	0.00416	0.810
0.00162	0.816	0.00435	0.827
0.00180	0.844	0.00453	0.749
0.00198	0.771	0.00471	0.581
0.00216	0.603	0.00489	0.346
0.00234	0.368	0.00507	0.077
0.00253	0.099	0.00525	−0.164
0.00271	−0.141	0.00543	−0.320
0.00289	−0.309	0.00562	−0.354
0.00307	−0.348	0.00579	−0.248
0.00325	−0.248	0.00598	−0.035
0.00344	−0.041		

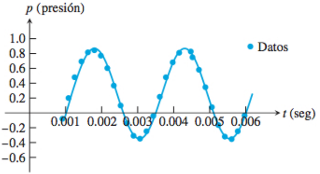
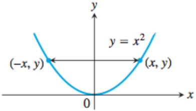


FIGURA 1.6 La curva suave que pasa por los puntos trazados según la tabla 1.1 forma una gráfica que representa a la función de presión (ejemplo 3).

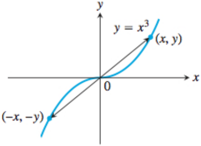
Clasificación de funciones en pares e impares

Funciones pares e impares

- Una función $y = f(x)$ es par si $f(x) = f(-x)$ para todo x en el dominio de f.
- Una función $y = f(x)$ es impar si $f(x) = -f(-x)$ para todo x en el dominio de f.



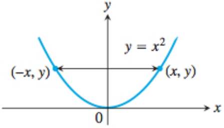
(a)



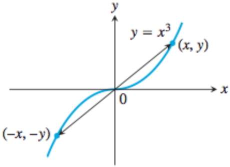
(b)

Clasificación de funciones en pares e impares

Observación: la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y y la gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas



(a)



(b)

Para probar que una función f es par se debe verificar que:

$$f(x) = f(-x)$$

PARA TODA x en el dominio de f. Si, por el contrario, quiere mostrar que una función no es par, puede hacerlo encontrando **ALGÚN** x_0 en el dominio de f donde se cumpla:

$$f(x_0) \neq f(-x_0).$$

Lo mismo se aplica al concepto de función impar.
Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo: analizar si la función $f(x) = x^2 - 3$ es par.
Solución: tomemos cualquier x en el dominio D de f (en este caso, $D = \mathbb{R}$). Entonces:

$$f(x) = x^2 - 3$$

y:

$$f(-x) = (-x)^2 - 3 = (-x)(-x) - 3 = x^2 - 3.$$

Así:

$$f(x) = f(-x).$$

Como x es arbitraria, se tiene que f es par.

Ejemplo: analizar si la función $f(x) = x^3 - 3$ es par.
Solución: dado que el exponente de x en la expresión de f es 3, es probable que f no sea par. Para comprobarlo buscamos un contraejemplo. Tomamos $x_0 = 1$, entonces:

$$f(x_0) = f(1) = -2$$

y

$$f(-x_0) = f(-1) = -4.$$

Como $f(x_0) \neq f(-x_0)$ se tiene que f no es par.
Observar que, tomando el mismo $x_0 = 1$, se llega a que f tampoco es impar.

Funciones crecientes y decrecientes

- Una función $y = f(x)$ definida en un intervalo I es creciente en I si para todo par de puntos x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene:
$$f(x_1) \leq f(x_2).$$
- Una función $y = f(x)$ definida en un intervalo I es decreciente en I si para todo par de puntos x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene:
$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Dar interpretación geométrica.

Función afín y función polinómica

Función afín

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son números reales, se denomina función afín. El gráfico de una función afín es una recta. El número m es la pendiente de dicha recta y b es la ordenada al origen.

Función afín

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = mx + b$$

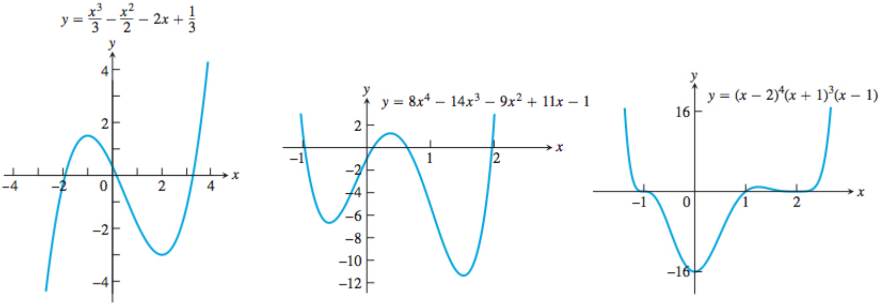
donde m y b son números reales, se denomina función afín. El gráfico de una función afín es una recta. El número m es la pendiente de dicha recta y b es la ordenada al origen.

Funciones polinómicas

Una función polinómica es una función $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Ejemplos de funciones polinómicas



Observación: el gráfico de una función polinómica es *suave*, sin *picos* ni *saltos*.

Funciones racionales

Una función racional R es un cociente de funciones polinómicas. Es decir, si P y Q son funciones polinómicas, entonces $R : D_R \to \mathbb{R}$ tal que:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in D_R$$

es una función racional.

Funciones racionales

Funciones racionales

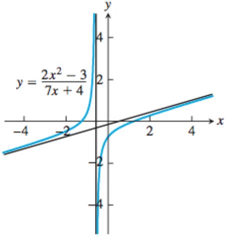
Una función racional R es un cociente de funciones polinómicas. Es decir, si P y Q son funciones polinómicas, entonces $R : D_R \to \mathbb{R}$ tal que:

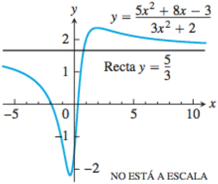
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in D_R$$

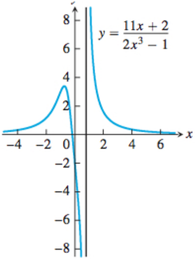
es una función racional. Observar que el dominio D_R de R es :

$$D_R = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

Ejemplos:

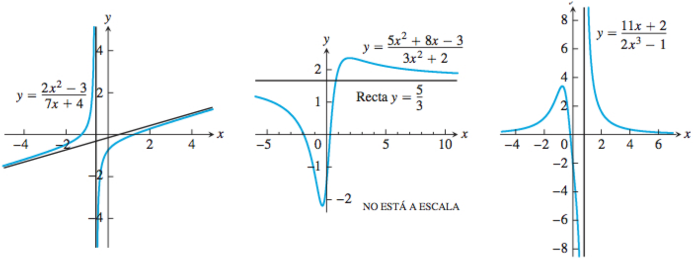






Calcular el dominio de $f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4}$.

Ejemplos:



Calcular el dominio de $f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4}$.
Solución: dado que f es una función racional, para determinar su dominio observamos cuándo se anula el denominador

$$7x + 4 = 0$$

$$x = -\frac{4}{7}.$$

Luego, $D(f) = (-\infty, -4/7) \cup (-4/7, +\infty)$.

Función valor absoluto

La función $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

se denomina función valor absoluto.

Realizar gráfico.

Observación: la función valor absoluto es un ejemplo de una función definida por partes. Veamos otro ejemplo: graficar la siguiente función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$