Trabajo Práctico N°1
Análisis Matemático 1-Facultad de Ingeniería

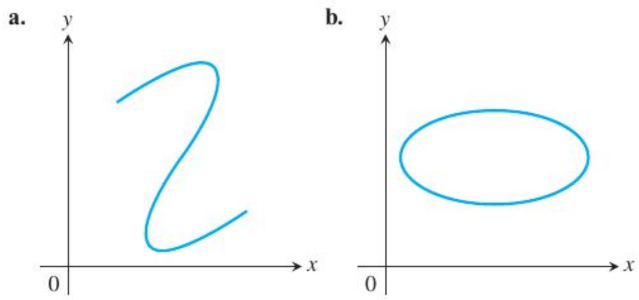
FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD[1]

1-FUNCIONES

1. Determine el dominio de cada una de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = 1 + x^2$
   b) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$
   c) $f(x) = \sqrt{5x + 10}$
   d) $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$
   e) $f(t) = \dfrac{4}{3 - t}$
   f) $g(t) = \dfrac{2}{t^2 - 16}$
   g) $f(x) = \dfrac{x + 3}{4 - \sqrt{x^2 - 9}}$

2. Explique por qué los siguientes gráficos no representan funciones de la forma $y = f(x)$.



3. Expres e la longitud del lado, el área de la superficie y el volumen de un cubo como función de la diagonal d del mismo.

4. Escriba símbolicamente la siguiente relación: la magnitud F de una fuerza es directamente proporcional al desplazamiento Δx.

5. Exprese la siguiente relación como una igualdad: la magnitud de la fuerza eléctrica F_e que ejerce la carga eléctrica q_1 sobre q_2 es directamente proporcional al producto de $|q_1|$ y $|q_2|$, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r que las separa. (Puede utilizar la misma constante k para todas las relaciones de proporcionalidad mencionadas).

6. Grafique las siguientes funciones:

[1] En ocasiones, prescindiremos del rigor con fines didácticos. Por ejemplo, a veces se darán funciones sin especificar el dominio o el conjunto de llegada.

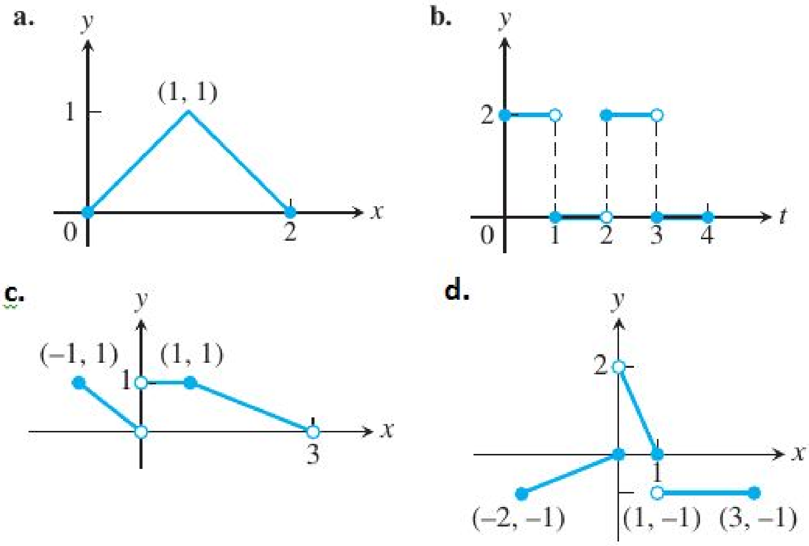
a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 + 2x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

c) $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

d) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x < 0, \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

7. Determine una fórmula para cada función graficada.



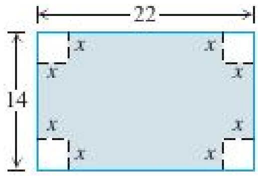
8. Para las siguientes funciones:
   - determine el dominio;
   - estudie paridad e indique simetrías;
   - grafique la función;
   - a partir de la gráfica, indique intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

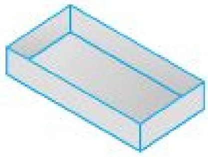
   a) $f(x) = \sqrt{|x|}$
   b) $h(x) = x^3 + x$
   c) $g(x) = 2|x| - 1$

9. Indique si las siguientes funciones son pares, impares o ni pares ni impares. Justifique su respuesta (esto es, si la función es par por ejemplo, debe comprobar la definición de función par tomando x genérica. Si la función no es par, debe dar un valor específico de x para el cual no se cumpla la definición de función par).

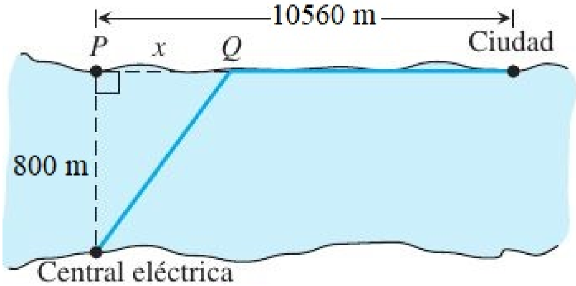
   a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
   b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
   c) $g(x) = |x^3|$

10. Una caja sin tapa se construye a partir de una pieza rectangular de cartón, cuyas dimensiones son 14 x 22 cm. A la pieza de cartón se le cortan cuadrados de lado x en cada esquina y luego se doblan hacia arriba los lados. Exprese el volumen de la caja en función de x.





11. Una central eléctrica se encuentra cerca de un río, donde éste tiene un ancho de 800 m. Tender un cable de la central a un lugar en la ciudad, 10560 m río abajo en el lado opuesto, tiene un costo de pesos 180 por metro que cruce el río y pesos 100 por metro en tierra a lo largo de la orilla del río.



   a) Suponga que el cable va de la central al punto Q, en el lado opuesto, lugar que se encuentre a x metros del punto P, directamente opuesto a la central. Escriba una función $C(x)$ que indique el costo de tender el cable en términos de la distancia x.

   b) Con la ayuda de un graficador, represente gráficamente $C(x)$ y determine cúal es la ubicación más barata para el punto Q.

12. A partir de las definiciones de operaciones entre funciones, determine los dominios de f, g, $f+g$, $f.g$, f/g y g/f.

   a) $f(x) = \sqrt{x+1}, \qquad g(x) = \sqrt{x-1}$

   b) $f(x) = x^2+1, \qquad g(x) = 1+\sqrt{x}$

13. Evalúe cada expresión siendo

$$f(x) = 2 - x, \qquad g(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } -2 \leq x < 0, \\ x-1, & \text{si } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

   a) $f\left(g(0)\right)$
   b) $f\left(f(2)\right)$
   c) $g\left(f(3)\right)$
   d) $g\left(f(0)\right)$
   e) $g\left(g(-1)\right)$

f) $f\left(g(\frac{1}{2})\right)$

14. Determine el dominio de $f \circ g$ y escriba la expresión de $(f \circ g)(x)$

    a) $f(x) = x^4, \qquad g(x) = \sqrt{x}$

    b) $f(x) = \sqrt{x+1}, \qquad g(x) = \dfrac{1}{x+4},$

    c) $f(x) = \dfrac{x+2}{3-x}, \qquad g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}.$

15. Suponga que f es una función par y g es una función impar y que tanto f como g están definidas en todo $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de las siguientes funciones (donde estén definidas) son pares?¿Cuáles son impares?

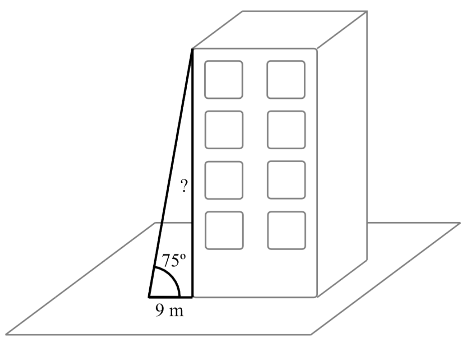
    a) $f.g$
    b) $f^2 = f.f$
    c) $g \circ f$
    d) f/g
    e) $g^2 = g.g$
    f) $f \circ f$
    g) g/f
    h) $f \circ g$
    i) $g \circ g$

16. En un círculo de 10 m de radio, ¿Cuál es la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de:

    a) $\dfrac{4\pi}{5}$?
    b) 110°?

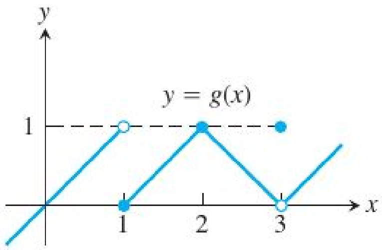
17. Un ángulo central en un círculo de radio 8 está subtendido por un arco de longitud 10π. Determine la medida del ángulo en radianes y en grados.

18. Un agrimensor se encuentra a 9 metros de la base de un edificio (ver la figura siguiente). Mide el ángulo de elevación a la parte superior del edificio y éste resulta entre 74,40° y 75,55°, debido a imprecisiones en la medición. ¿Dentro de qué rango se encontrará el valor real de la altura del edificio? Justifique por qué puede conocerse este rango con sólo dos cálculos.



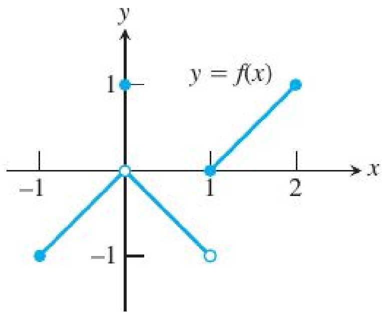
2-LÍMITES

1. Para la función g, cuya gráfica se ve a continuación, determine los límites siguientes o explique por qué no existen. Justifique su respuesta explicando con palabras.



a) $\lim\limits_{x\to 1} g(x) =$ b) $\lim\limits_{x\to 2} g(x) =$ c) $\lim\limits_{x\to 3} g(x) =$ d) $\lim\limits_{x\to 2{,}5} g(x) =$

2. ¿Cuáles de los siguientes enunciados, con respecto a la función $y = f(x)$ graficada aquí, son verdaderos y cuáles son falsos?



a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *existe*

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *no existe*

e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

f) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

g) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *existe para todo* x_0 *en* $(-1;1)$

3. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \left(-x^2 + 5x - 2\right)$

b) $\lim\limits_{y\to 2} \left(\dfrac{y+2}{y^2+5y+6}\right)$

c) $\lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{3h}{\sqrt{3h+1}-1}\right)$

d) $\lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{5h+4}-2}{h}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 5} \left(\dfrac{x-5}{x^2-25}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x+\operatorname{sen} x}{3\cos x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \left[(x^2-1)(2-\cos x)\right]$

h) $\lim_{t \to -1} \left(\dfrac{t^2 + 3t + 2}{t^2 - t - 2} \right)$

4. Debido a su relación con las rectas secantes, tangentes y tasas instantáneas, los límites de la forma

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$$

aparecen con mucha frecuencia en cálculo. Evalúe este límite para el valor de x y la función f indicados.

a) $f(x) = x^2 \qquad x = 1$

b) $f(x) = \sqrt{3x+1} \qquad x = 0$

5. Si $\sqrt{5 - 2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5 - x^2}$ para toda $-1 \leq x \leq 1$, determine $\lim_{x \to 0} f(x)$.

6. Puede demostrarse que las desigualdades

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x} < 1$$

se cumplen para todos los valores de x cercanos a 0, $x \neq 0$. ¿Nos indica algo acerca de

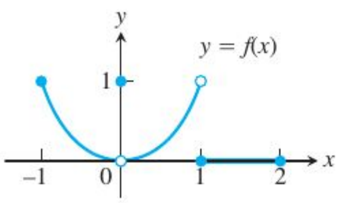
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x} \right)?$$

Justifique su respuesta.

7. *a*) Si $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$, determine $\lim_{x \to 2} f(x)$.

   b) Si $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 4$, determine $\lim_{x \to 2} f(x)$.

8. De los siguientes enunciados, respecto de la función $y = f(x)$ que aparece graficada, ¿cuáles son verdaderos y cuáles son falsos? Jusitifique con sus palabras la respuesta.



a) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

f) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

g) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ *existe.*

d) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

e) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

h) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

i) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

j) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

9. Calcule los siguientes límites laterales e interprete gráficamente realizando un gráfico de la función, indicando también en el dibujo los límites pedidos:

   a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|} =$

   b) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} =$

   c) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{|x-2|} =$

   d) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x-2}{|x-2|} =$

   e) $\lim_{x\to 1^+} f(x) =,$ siendo $f(x) = \begin{cases} 4-2x, & x \leq 1 \\ 6x-4, & x > 1 \end{cases}$

   f) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|} =$

   g) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{5}}{h} =$

10. Grafique la siguiente función y responda

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

   a) Determine el dominio de f;

   b) ¿En qué puntos c, si los hubiera, existe el límite $\lim_{x\to c} f(x)$?

   c) ¿En qué puntos c, si los hubiera, sólo existe el límite $\lim_{x\to c^-} f(x)$?

   d) ¿En qué puntos c, si los hubiera, sólo existe el límite $\lim_{x\to c^+} f(x)$?

11. Determine los siguientes límites trigonométricos:

   a) $\lim_{\theta\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta}\right)$

   b) $\lim_{h\to 0^-} \left(\dfrac{h}{\operatorname{sen} 3h}\right)$

   c) $\lim_{h\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} h)}{\operatorname{sen} h}\right)$

   d) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan 3x}{\operatorname{sen} 8x}\right)$

12. Si usted sabe que en un punto interior a del dominio de f, existen $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ entonces ¿se cumplirá necesariamente que existe $\lim_{x\to a} f(x)$? Justifique su respuesta (es decir, si la respuesta es afirmativa argumente por qué y si es falso, dé un contraejemplo).

13. Si sabe que existe $\lim_{x\to c} f(x)$ ¿puede encontrar su valor calculando $\lim_{x\to c^+} f(x)$? Justifique su respuesta (es decir, si la respuesta es afirmativa argumente por qué y si es falso, dé un contraejemplo).

14. Suponga que f es una función impar de x. ¿Saber que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$ le indica algo acerca de $\lim_{x\to 0^-} f(x)$? Justifique su respuesta (es decir, si la respuesta es afirmativa argumente por qué y si es falso, dé un contraejemplo).

15. Suponga que f es una función par de x. ¿Saber que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$ le indica algo acerca de $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ o de $\lim_{x\to -2^+} f(x)$? Justifique su respuesta (es decir, si la respuesta es afirmativa argumente por qué y si es falso, dé un contraejemplo).

16. El flujo de calor a través de una pared de espesor L puede calcularse como:

$$Q = -kA\frac{T_2 - T_1}{L},$$

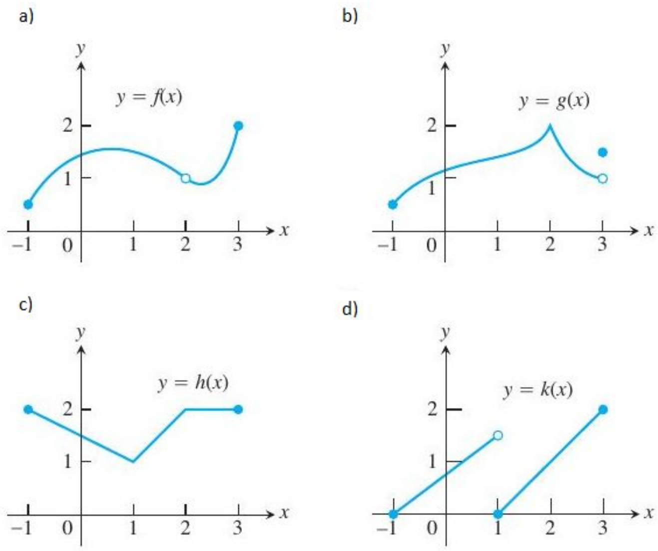
donde k es la conductividad térmica, A es el área de tranferencia y T_2 y T_1 las temperaturas a cada lado de la pared. Usando límites, determine el comportamiento de Q bajo las siguientes posibilidades:

- El espesor de la pared es muy grande.
- La temperatura T_1 es muy cercana a T_2.
- El espesor de la pared es muy delgado.

¿Los resultados tienen sentido físico? ¿En qué casos no habrá transferencia de calor?.

3-CONTINUIDAD, LÍMITES INFINITOS Y LÍMITES EN EL INFINITO

1. Indique dónde son continuas las siguientes funciones:



2. Grafique la siguiente función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 2x, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \\ -2x + 4, & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{si } 2 < x < 3. \end{cases}$ y responda:

   a) ¿Existe $f(-1)$?

   b) ¿Existe $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$?

   c) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$?

   d) ¿La función es continua en $x = 0$? ¿Y en $x = 1$? Si no lo es, clasifique la discontinuidad.

   e) ¿Existe $f(1)$?

   f) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?

3. ¿En qué puntos son continuas las siguientes funciones? También, clasifique las discontinuidades.

   a) $y = \dfrac{1}{(x+2)^2} + 4$

   b) $y = \dfrac{x+2}{\cos x}$

   d) $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$

   e) $y = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

4. Defina $h(2)$ de manera que $h(t) = \dfrac{t^2 + 3t - 10}{t - 2}$ sea continua en $t = 2$.

5. ¿Para qué valores de a, la función f es continua para todo x?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x < 3, \\ 2ax, & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

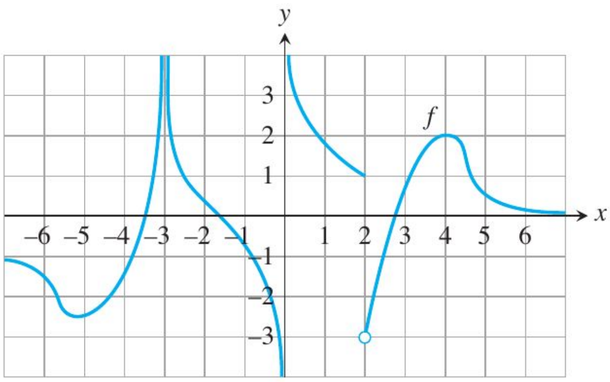
6. ¿Para qué valores de b, la función g es continua para todo x?

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-b}{b+1}, & \text{si } x < 0, \\ x^2 + b, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

7. Utilizando el teorema del valor intermedio para funciones continuas, demuestre que la ecuación $x^3 - 15x + 1 = 0$ tiene al menos 3 soluciones en el intervalo [-4;4].

8. Si las funciones f y g son continuas en $[0, 1]$, ¿podría existir algún x del intervalo $[0, 1]$ donde f/g no sea continua? Explique.

9. Para la función f, cuya gráfica se muestra, determine los siguientes límites (si existen):



a) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$
b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
c) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$
d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
e) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
f) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$
g) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
h) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
i) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
j) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$
k) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$
l) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

10. Determine los límites para $x \to \infty$ y para $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{5x+7}$
b) $f(x) = \dfrac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$
c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$
d) $f(x) = \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$

11. Determine los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{8x^2-3}{2x^2+x}}$
b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2+x-1}{8x^2-3}\right)^{\frac{1}{3}}$

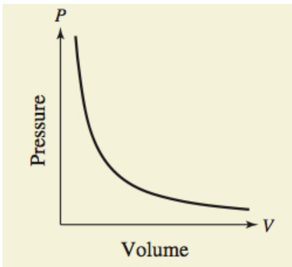
12. Indique las ecuaciones de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas) de las siguientes funciones. Además, grafique las funciones y las asíntotas encontradas.

    a) $y = \dfrac{1}{2x+4}$
    b) $y = \dfrac{x+3}{x+2}$
    c) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$
    d) $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$
    e) $y = \dfrac{x^2-1}{2x+4}$

13. Determine los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+9} - \sqrt{x+4}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+25} - \sqrt{x^2-1}\right)$

14. Para un gas (ideal) la presión es inversamente proporcional al volumen ocupado por el gas como se muestra en el gráfico:



    ¿Qué sucede con la presión cuando el volumen tiende a 0? ¿Qué sucede con la presión cuando el volumen tiende a infinito? Interprete sus respuestas.

15. Suponga que $U = U(t)$ representa la concentración de cierta sustancia en función del tiempo t. ¿Cuál de los siguientes límites debe utilizarse para estudiar el comportamiento de U a largo plazo?

    a) $\lim_{t\to 0^+} U(t)$
    b) $\lim_{t\to +\infty} U(t)$
    c) $\lim_{t\to 0^-} U(t)$

Trabajo Práctico N°2
Análisis Matemático 1-Facultad de Ingeniería

DERIVADAS

Aclaraciones:

- Tenga en cuenta que en algunos ejercicios de aplicaciones, aunque no se indique explícitmante, los números no son adimensionales sino que tienen las unidades correspondientes para establecer la distancia en metros (m), el tiempo en segundos (s), la velocidad en metros por segundo (m/s) y la aceleración en metros por segundo al cuadrado (m/s^2).
- Cuando se pida analizar la existencia de la derivada f' de una función f en un intervalo cerrado, se debe analizar también la existencia de las derivadas laterales en los extremos del intervalo.

1. Determine la pendiente de la gráfica de la función en el punto dado. Determine también una ecuación para la recta tangente a la gráfica en ese punto. Finalmente, grafique f y la recta tangente.

   a) $f(x) = x^2 + 1$ (2;5)

   b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ (8;3)

   c) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ (3;3)

2. ¿En qué puntos las gráficas de las funciones indicadas tienen tangentes horizontales? Grafique la función y las rectas tangentes horizontales.

   a) $f(x) = x^2 + 4x - 1$

   b) $f(x) = x^3 - 3x$

3. Un objeto se deja caer desde lo alto de una torre de 100 m de altura. Su altura por encima del nivel del suelo, al cabo de t segundos, es $(100 - 4,9t^2)$. ¿Cuál es su rapidez 2 segundos después de que se suelta?

4. ¿Cuál es la tasa de cambio instantánea del volumen de una pelota, con respecto al radio, cuando este mide r = 2 cm?

5. Calcule la derivada de las siguientes funciones y determine el valor de las derivadas indicadas en cada caso.

   a) $f(x) = (x-1)^2 - 1$ $f'(-1); f'(0); f'(2)$

   b) $g(x) = \dfrac{1-x}{2x}$ $g'(-1); g'(1); g'(\sqrt{2})$

6. Utilice la fórmula

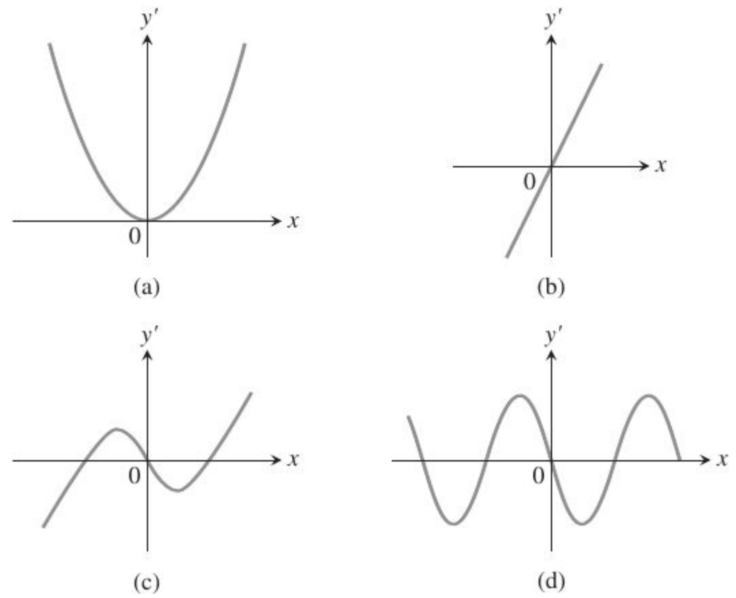
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$$

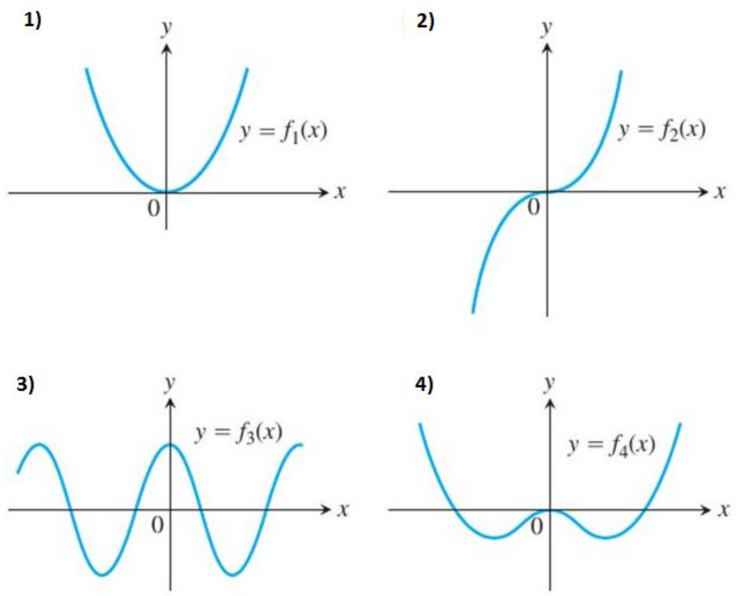
para determinar la derivada de las siguientes funciones en cualquier punto x_0:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 4,$

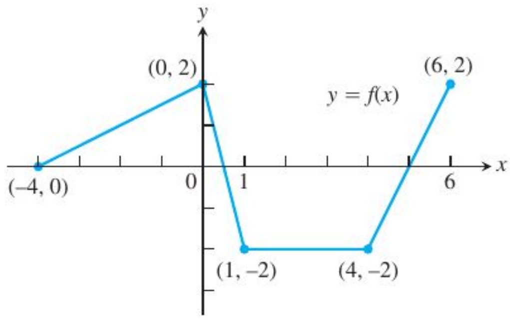
7. Relacione las gráficas de las funciones con las gráficas de sus derivadas.





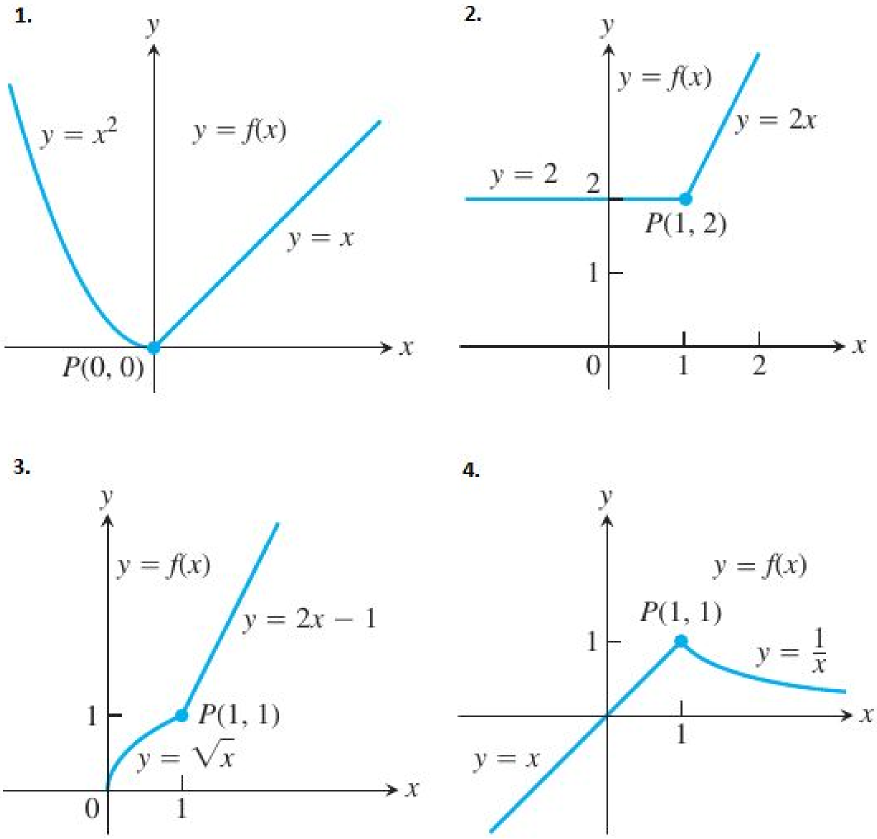
8. La gráfica de la siguiente figura está formada por segmentos de recta unidos

a) ¿En qué puntos del intervalo [-4;6] f' no está definida? Observe que como se considera el intervalo cerrado, en los extremos del mismo debe analizar también las derivadas laterales correspondientes. Justifique su respuesta.



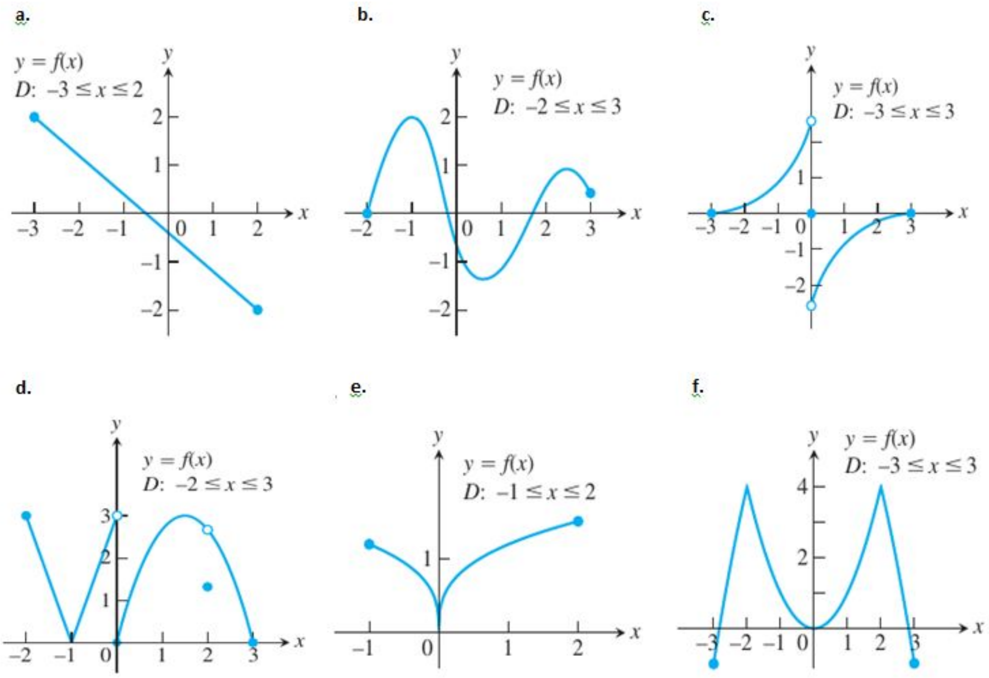
b) Grafíque la derivada de f en el intervalo [-4, 6] (en los extremos del intervalo, debe graficar los valores de las derivadas laterales correspondientes).

9. Calcule las derivadas por la derecha y por la izquierda como límites laterales para mostrar que las funciones dibujadas no son derivables en el punto P.



10. Cada figura (ver página 4) presenta la gráfica de una función en el intervalo cerrado D. ¿En qué puntos del dominio la función parece ser:
    - derivable (observe que las funciones están definidas en intervalos cerrados, por lo que deberá analizar las derivadas laterales en los extremos de dichos intervalos)?
    - continua, pero no derivable?
    - ni continua ni derivable?

Justifique sus respuestas.



11. Determine, utilizando la definición, la derivada y' de las siguientes funciones:

    a) $y = -x^2$

    b) $y = -\dfrac{1}{x}$

    Luego grafique $y = f(x)$ y $y = f'(x)$, una al lado de la otra, usando un conjunto diferente de ejes y responda las siguientes preguntas.

    - ¿Para qué valores de x, si los hay, $f'(x)$ es positiva, cero y negativa, respectivamente?
    - ¿Para qué valores de x, si los hay, la función $y = f(x)$ es creciente?¿Para qué valores es decreciente? ¿Cómo se relaciona esto con lo que encontró en el inciso anterior?

12. Utilizando reglas de derivación, determine la derivada primera y segunda de:

    a) $y(x) = \dfrac{x^3 + 7}{x}$

    b) $s(t) = \dfrac{t^2 + 5t - 1}{t^2}$

13. a) **Normal a una curva.** Determine una ecuación para la recta perpendicular a la recta tangente a la curva $y = x^3 - 4x + 1$ en el punto (2, 1).

    b) **Pendiente mínima.** ¿Cuál es la menor pendiente de la curva anterior? ¿En qué punto la curva tiene dicha pendiente?

    c) **Tangentes con una pendiente específica.** Determine ecuaciones para las tangentes a la curva en los puntos donde la pendiente de la misma es 8.

14. La curva $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto (1;2) y es tangente a la recta $y = x$ en el origen. Determine a, b y c.

15. Determine todos los puntos (x;y) en la gráfica de $f(x) = 3x^2 - 4x$ con rectas tangentes paralelas a la recta $y = 8x + 5$. Grafique f y las rectas tangentes paralelas a $y = 8x + 5$.

16. Evalúe cada límite convirtiendo primero cada uno a una derivada evaluada en un valor particular de x.

    $a)$ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^{50}-1}{x-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^{\frac{2}{9}}-1}{x+1}\right)$

17. Determine el valor de a que hace que la siguiente función sea derivable para todo valor de x.

$$g(x) = \begin{cases} ax, & \text{si } x < 0, \\ x^2 - 3x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

18. Determine los valores de a y b que hacen que la siguiente función sea derivable para todo valor de x.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{si } x > -1, \\ bx^2 - 3, & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

19. **Presión en un cilindro.** Si en un cilindro se mantiene un gas a una temperatura constante T (véase la siguiente figura), la presión P está relacionada con el volumen V mediante la siguiente fórmula:

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

en la que a, b, n y R son constantes.

- Determine $\dfrac{dP}{dV}$.
- Interprete qué significa que $\dfrac{dP}{dV} > 0$ y que $\dfrac{dP}{dV} < 0$.
- Las condiciones del inciso anterior, ¿son físicamente posibles?

20. Dadas las posiciones $s = f(t)$ de un cuerpo que se mueve en linea recta:

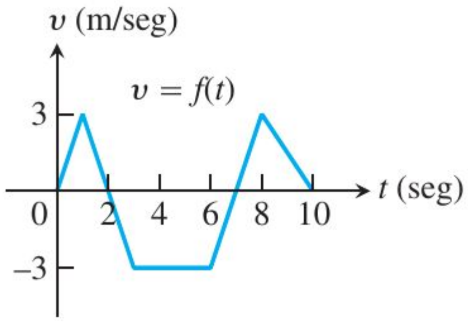
$a)$ $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 6$ 2) $s = \dfrac{t^4}{4} - t^3 + t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3,$

determine:

$a)$ El desplazamiento del cuerpo y la velocidad promedio para el intervalo indicado. En los extremos del intervalo, considere derivadas laterales.

$b)$ ¿Cuándo, si es que sucede, el cuerpo cambia de dirección?

21. La siguiente figura muestra la velocidad $v = \dfrac{ds}{dt} = f(t)$ de un cuerpo que se mueve a lo largo de una recta. Analizando la figura responda:



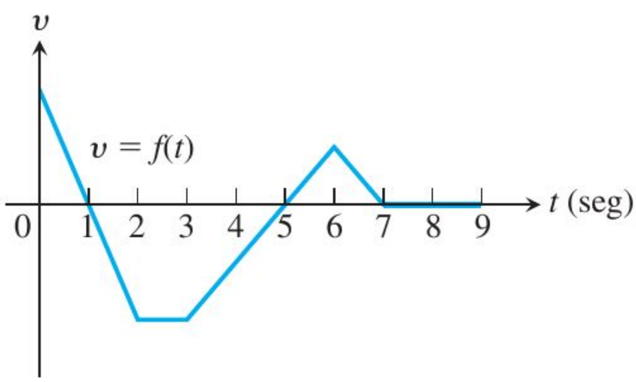
$a)$ ¿En qué intervalo(s) de tiempo retrocede el objeto?

$b)$ ¿En qué intervalo(s) de tiempo el objeto se mueve con rapidez constante?

$c)$ Grafique la rapidez del objeto para $0 \leq t \leq 10$.

$d)$ Grafique la aceleración donde esté definida.

22. La siguiente figura representa la velocidad $v = f(t)$ de una partícula que se mueve en una recta horizontal. Analizando la figura responda:



a) ¿Cuándo se mueve la partícula hacia delante?¿Cuándo hacia atrás? ¿Cuándo aumenta su rapidez? ¿Cuándo se detiene?

b) ¿Cuándo es positiva la aceleración de la partícula? ¿Cuándo es negativa? ¿Cuándo es cero?

c) ¿Cuándo alcanza la partícula su máxima rapidez?

d) ¿Cuándo permanece inmóvil la partícula durante más de un instante?

23. El número de galones de agua de un depósito t minutos después de que éste empezó a drenar es $Q(t) = 200(30 - t)^2$. ¿Qué tan rápido sale el agua al final de 10 minutos? ¿Cuál es la tasa promedio a la que el agua sale durante los primeros 10 minutos?

24. El volumen, $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, de un globo esférico cambia con el radio.

a) ¿A qué tasa cambia el volumen con respecto al radio cuando $r = 2$ cm ?

b) ¿ Aproximadamente en cuánto aumenta el volumen cuando el radio cambia de 2 a $2,2$ cm?

25. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ para cada caso:

a) $y = x^2 \cos(x)$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)\ \tan(x)$

c) $y = \dfrac{\cos(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)}$

d) $y = \csc(x) - 4\sqrt{x} + 7$

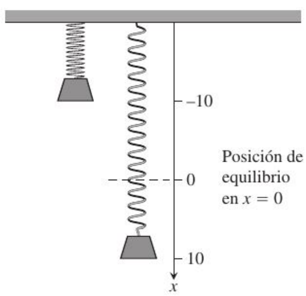
e) $y = (\sec(x) + \tan(x))\,(\sec(x) - \tan(x))$

26. Determine los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen}(\theta) - \frac{1}{2}}{\theta - \frac{\pi}{6}}$

d) $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(\theta) - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}}$

27. Un objeto que está sujeto a un resorte (véase la siguiente figura) estaba inicialmente en su posición de equilibrio ($x = 0$). Sin embargo, un estudiante le aplicó una fuerza poniéndolo en movimiento y dando por resultado un desplazamiento de $x = 10\cos(t)$.



a) ¿Cuál es la amplitud A del movimiento?

b) ¿Cuál es el periodo de la oscilación T, es decir, cuánto tiempo demora en realizar una oscilación completa? Luego calcule la frecuencia $f = 1/T$.

c) Determine el desplazamiento del objeto cuando $t = 0$, $t = \frac{\pi}{3}$ y $t = \frac{3\pi}{4}$.

d) Determine la velocidad del objeto cuando $t = 0$, $t = \frac{\pi}{3}$ y $t = \frac{3\pi}{4}$.

28. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ utilizando la regla de la cadena.

    a) $y = \left(1 - \dfrac{x}{7}\right)^{-7}$

    b) $y = \sec(\tan(x))$

    c) $y = \cot\left(\pi - \frac{1}{x}\right)$

    d) $y = \operatorname{sen}^3 x$

29. Determine las derivadas de las siguientes funciones:

    a) $q = \left(2r - r^2\right)^{\frac{1}{3}}$

    b) $r = 6\left(\sec(\theta) - \tan(\theta)\right)^{\frac{3}{2}}$

    c) $y = (4x+3)^4 (x+1)^{-3}$

    d) $f(x) = \sqrt{7 + x\sec(x)}$

30. Determine la ecuación de la recta tangente a $y = \left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]^2$ en el punto $(0, 1)$.

31. Suponga que un pistón describe un movimiento recto hacia arriba y hacia abajo, y que su posición en el instante t (en segundos) es

$$s = A\cos(2\pi bt),$$

    con A y b positivos. El valor de A es la amplitud del movimiento y b es la frecuencia (número de veces que el pistón se mueve hacia arriba y hacia abajo cada segundo).¿Qué efecto tiene la duplicación de la frecuencia en la velocidad y la aceleración del pistón? (Una vez que lo determine, sabrá por qué algunas máquinas se descomponen cuando las hacen funcionar demasiado rápido).

32. Suponga que $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$. Entonces las dos composiciones

$$(fog)(x) = |x|^2 = x^2 \qquad y \qquad (gof)(x) = |x^2| = x^2$$

    son difenciables en $x = 0$, aunque g no sea diferenciable en $x = 0$. ¿Esto contradice la regla de la cadena? Explique.

33. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ a través de derivación implícta para cada caso:

    a) $2xy + y^2 = x + y$

    b) $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$

    d) $y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$

    e) $y\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - xy$

c) $x + \tan(xy) = 0$

f) $\operatorname{sen}(yx) = \dfrac{1}{2}$

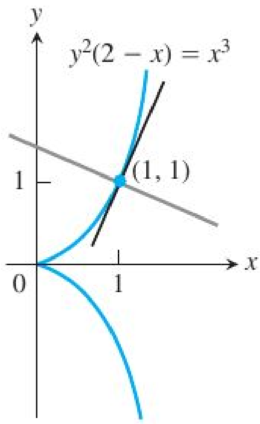
34. Verifique que el punto dado esté en la curva y determine las rectas tangente y normal a la curva en el punto dado.

    a) $x^2+xy-y^2 = 1, \qquad (2,3)$

    b) $y^2-2x-4y-1 = 0, \qquad (-2;1)$

35. Determine los dos puntos donde la curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ cruza al eje x y demuestre que las tangentes a la curva en estos puntos son paralelas. ¿Cuál es la pendiente común a tales tangentes?

36. Determine ecuaciones para la tangente y la normal a la cisoide de Diocles $y^2(2-x) = x^3$ en (1;1).



37. Suponga que el radio r y el área de la superficie $S = 4\pi r^2$ de una esfera son funciones derivables de t. Escriba una ecuación que relacione $\dfrac{dS}{dt}$ con $\dfrac{dr}{dt}$.

38. Si la longitud original de 24 m del lado x de un cubo disminuye a razón de 5 m/min, cuando $x = 3$ m. ¿a qué razón cambia:

    a) el área de la superficie del cubo?

    b) el volumen?

39. El área de la superficie de un cubo aumenta a razón de 72 pulg^2/seg.¿A qué tasa cambia el volumen del cubo cuando la longitud del lado es $x = 3$ pulg.?

40. El radio r y la altura h de un cono circular recto están relacionados con el volumen V del cilindro mediante la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

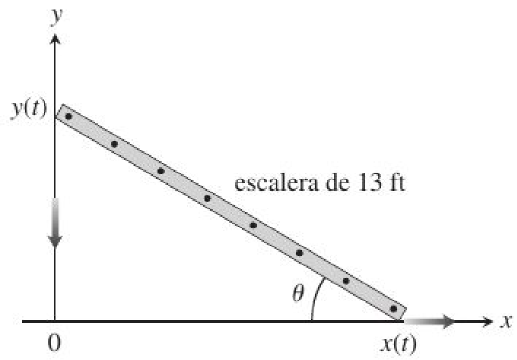
a) ¿Cómo está relacionada $\dfrac{dV}{dt}$ con $\dfrac{dh}{dt}$ si r es constante?

b) ¿Cómo está relacionada $\dfrac{dV}{dt}$ con $\dfrac{dr}{dt}$ si h es constante?

c) ¿Cómo está relacionada $\dfrac{dV}{dt}$ con $\dfrac{dr}{dt}$ y $\dfrac{dh}{dt}$ si ni r ni h son constante?

41. Cuando un plato circular de metal se calienta en un horno, su radio aumenta a razón de $0,01$ cm/min. ¿A qué razón aumenta el área del plato cuando el radio es de 50 cm?

42. Una escalera de 13 pies está recargada sobre el muro exterior de una casa cuando su base empieza a deslizarse y alejarse (véase la figura). En el instante en el que la base está a 12 pies de la casa, la base se mueve a una tasa de 5 pies/seg.



a) ¿Qué tan rápido resbala hacia abajo la parte superior de la escalera?

b) En ese instante, ¿con qué tasa cambia el área del triángulo formado por la escalera, la pared y el suelo?

c) En ese instante, ¿A qué tasa cambia el ángulo θ entre la escalera y el suelo?

43. Dos aviones comerciales vuelan a una altura de 40 000 pies a lo largo de recorridos en línea recta que se interesectan en ángulos rectos. El avión A se aproxima al punto de intersección con una rapidez de 442 nudos (millas náuticas por hora; una milla náutica equivale a 2000 yardas). El avión B se aproxima a la intersección a 481 nudos. ¿A qué tasa cambia la distancia entre ellos cuando A está a 5 millas náuticas del punto de intersección y B a 12 millas náuticas del punto de intersección?

44. Los mecánicos de la Automotriz Lincoln vuelven a perforar un cilindro de 6 pulg. de profundidad para colocar un nuevo pistón. La máquina que utilizan aumenta el radio del cilindro una milésima de pulgada cada 3 minutos. ¿Qué tan rápido aumenta el volumen del cilindro cuando la perforación tiene un diámetro de 3, 800 pulgadas?

45. Desde un depósito cónico de concreto (con el vértice hacia abajo), con altura de 6 m y cuyo radio de la base mide 45 m, fluye agua a razón 50 m^3/min.

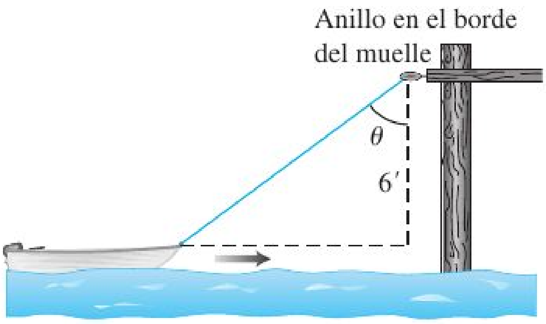
a) ¿Con qué rapidez disminuye el nivel del agua cuando la profundidad es de 5 m?

b) En ese momento, ¿qué tan rápido cambia el radio de la superficie del agua?. Dé su respuesta en centímetros por minuto.

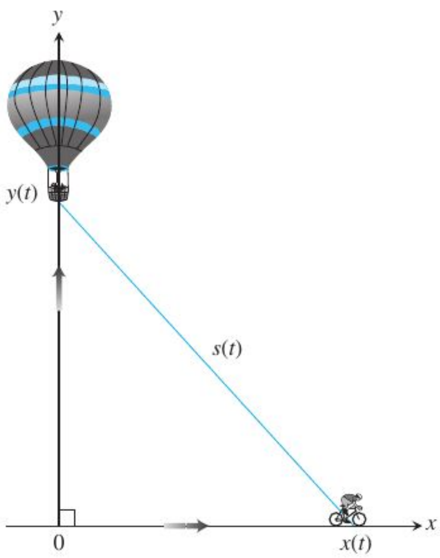
46. Un bote se arrastra hacia el muelle mediante una cuerda que está atada a la proa. Se tira de la cuerda a razón de 2 pie/seg.

    a) ¿Qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando la longitud de la cuerda es de 10 pies?

    b) ¿A qué velocidad cambia el ángulo θ en ese instante?(Véase la figura)



47. Un globo se eleva verticalmente desde una superficie plana a una tasa de 1 pie/seg. Justo cuando el globo está a 65 pies sobre el nivel del suelo, una bicicleta que se desplaza a una velocidad constante de 17 pie/seg pasa debajo de él. ¿Qué tan rápido cambia la distancia, $s(t)$, entre la bicicleta y el globo 3 segundos después?



48. Determine una linealización en un entero cercano a x_0, elegido de manera adecuada, en la que la función dada y sus derivadas sean fáciles de evaluar.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -0,9$

b) $f(x) = 1 + x, \quad x_0 = 8,1$

c) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}, \quad x_0 = 8,5$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}, \quad x_0 = 1,3$

49. Demuestre que la linealización de $f(x) = (1 + x)^k$ en x = 0 es $L(x) = 1 + kx$.

50. Utilice la aproximación $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ para estimar lo siguiente.

a) $(1,0002)^{50}$

b) $(1,009)^{\frac{1}{3}}$

51. Determine dy:

a) $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{3(1 + \sqrt{x})}$

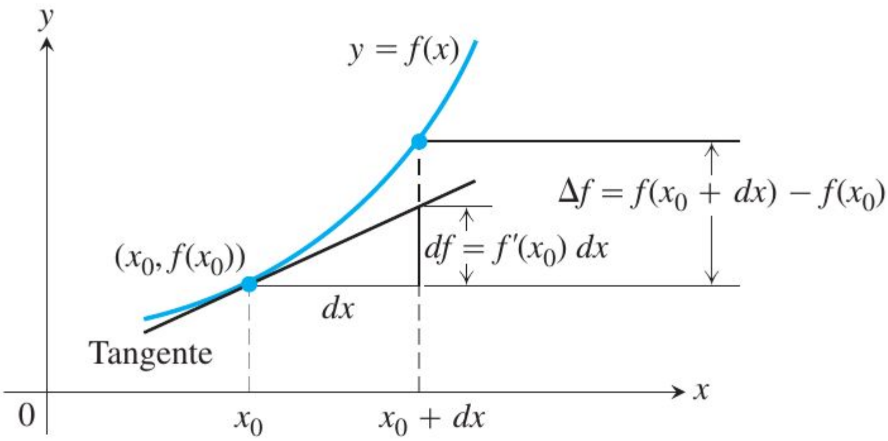
b) $2y^{\frac{3}{2}} + xy - x = 0$

c) $y = 3\csc(1 - 2\sqrt{x})$

d) $y = 4\tan\left(\frac{1}{3}x^3\right)$

52. Cada función f cambia de valor cuando x pasa de x_0 a $x_0 + dx$. Determine:

- el cambio $\triangle f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$;
- el valor de la estimación $df = f'(x_0)dx$, y
- el error de aproximación $|\triangle f - df|$.



a) $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0,1$

b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -1, \quad dx = 0,1$

c) $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad x_0 = 2, \quad dx = 0,1$

53. Escriba una fórmula diferencial que estime el cambio dado en el volumen o el área de la superficie.

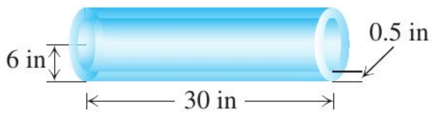
a) El cambio en el volumen $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ de una esfera cuando el radio pasa de r_0 a $r_0 + dr$.

b) El cambio en el volumen $V = x^3$ de un cubo cuando las longitudes de los lados pasan de x_0 a $x_0 + dx$.

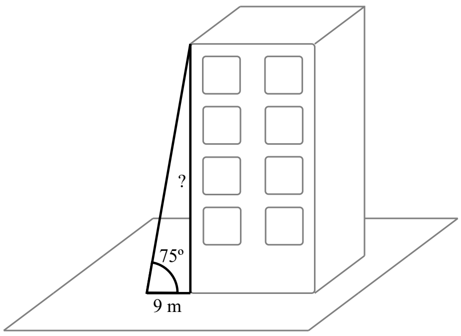
c) El cambio en el área de la superficie $S = 6x^2$ de un cubo cuando las longitudes de los lados pasan de x_0 a $x_0 + dx$.

d) El cambio en el volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto cuando el radio pasa de r_0 a $r_0 + dr$ y la altura no se modifica.

54. Utilizando diferenciales, estime el volumen del material en un cascarón cilíndrico con longitud de 30 pulg.(in), radio de 6 pulg.(in) y grosor de 0,5 pulg.(in). Compare el valor obtenido con el volumen real.



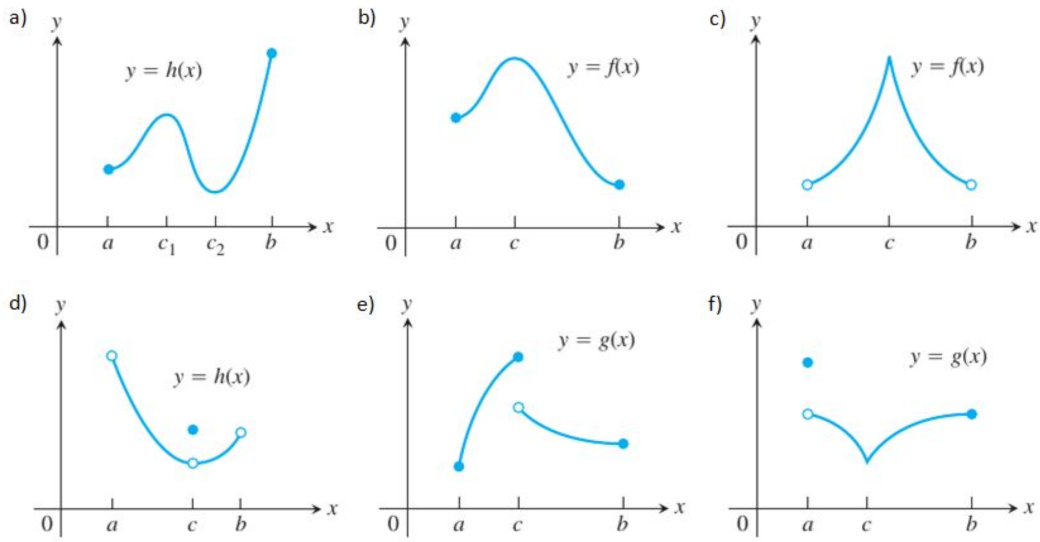
55. Un agrimensor se encuentra a 9 metros de la base de un edificio, mide el ángulo de elevación a la parte superior del edificio y éste es de 75°. ¿Con qué precisión se debe medir el ángulo para que el porcentaje de error en la estimación de la altura del edificio sea menor del 4 por ciento?



Trabajo Práctico N°3
Análisis Matemático 1-Facultad de Ingeniería

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

1. Determine si las siguientes funciones tienen valores extremos absolutos en [a;b].



2. Grafique cada función y determine si la función tiene valores extremos absolutos en su dominio.

   a) $f(x) = \dfrac{6}{x^2+2}, \qquad -1 < x < 1$

   b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } -1 \le x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{si } 0 \le x \le 4. \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} 4-2x, & \text{si } x \le 1, \\ x+1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

   d) $f(x) = \begin{cases} 3-x, & \text{si } x < 0, \\ 3+2x-x^2, & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$

3. En los siguientes ejercicios, determine dónde las siguientes funciones alcanzan sus extremos absolutos (máximos y mínimos absolutos). Dé además los valores máximos y mínimos absolutos de las funciones consideradas.

   a) $f(x) = -x - 4$, $-2 \le x \le 3$.
   b) $f(x) = x^2 - 1$, $-1 \le x \le 2$.
   c) $f(x) = x^{1/3}$, $-1 \le x \le 8$.
   d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 10$, $0 \le x \le 10$.
   e) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $-2 \le x \le 1$.

4. Sea $f(x) = |x^3 - 9x|$.

    a) ¿Existe $f'(0)$? En caso de que no exista, justifique empleando la definición de derivadas laterales.

    b) ¿Existe $f'(3)$? En caso de que no exista, justifique empleando la definición de derivadas laterales.

    c) ¿Existe $f'(-3)$? En caso de que no exista, justifique empleando la definición de derivadas laterales.

    d) Determine todos los valores extremos de f.

5. Si una función par f tiene un valor máximo local en $x = c$, ¿se puede decir algo acerca del valor de f en $x = -c$? Justifique su respuesta.

6. Si una función impar f tiene un valor mínimo local en $x = c$, ¿se puede decir algo acerca del valor de f en $x = -c$? Justifique su respuesta.

7. ¿Cuáles de las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado y cuáles no? Justifique sus respuestas.

    a) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $[-1; 8]$

    b) $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$, $[0; 1]$

    c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{si } -2 \leq x \leq -1, \\ 2x^2 - 3x - 3, & \text{si } -1 < x \leq 0. \end{cases}$

8. La función

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

es cero en $x = 0$ y en $x = 1$, así como derivable en el intervalo (0;1), pero su derivada ahí nunca es cero. ¿Cómo es esto posible?¿Acaso el teorema de Rolle no dice que la derivada tiene que ser cero en algún punto en (0;1)? Justifique su respuesta.

9. ¿Para qué valores de a, m y b la función

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x = 0, \\ -x^2 + 3x + a, & \text{si } 0 < x < 1. \\ mx + b, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

satisface las hipótesis del teorema de valor medio en el intervalo [0;2]?

10. Demuestre que las siguientes funciones tienen solamente un cero en el intervalo indicado.

    a) $f(x) = x^4 + 3x + 1$, [-2;-1]

b) $f(x) = x^3 + \dfrac{4}{x^2} + 7, \qquad (-\infty; 0)$

11. La velocidad $v(t) = \dfrac{ds}{dt}$ y la posición inicial de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una línea coordenada están modeladas por las siguientes ecuaciones. Determine la posición del cuerpo en el instante t ($g_1 = 9{,}8\ \mathrm{ms}^{-2}$, $g_2 = 32\ \mathrm{ms}^{-2}$).

    a) $v(t) = g_1 t + 5\ \mathrm{ms}^{-1}, \qquad \mathrm{s}(0){=}10\ \mathrm{m}$
    b) $v(t) = g_2 t - 2\ \mathrm{ms}^{-1}, \qquad \mathrm{s}(0,5\ \mathrm{s}) = 4\ \mathrm{m}$

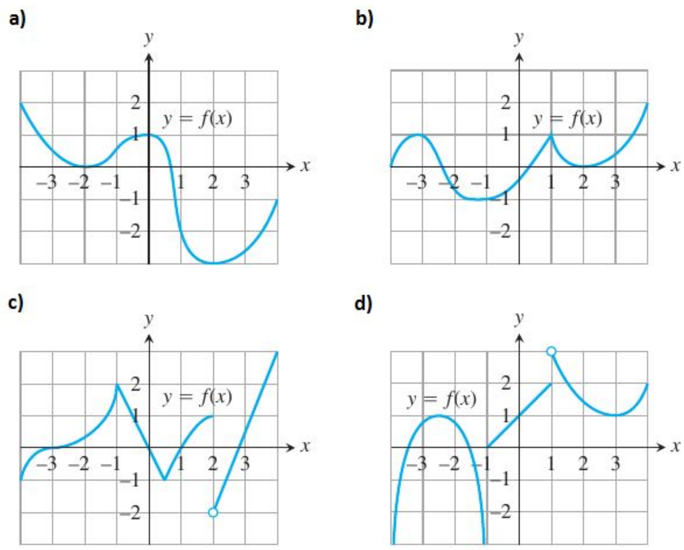
12. La aceleración $a(t) = \dfrac{d^2s}{dt^2}$, la velocidad y la posición inicial de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una línea coordenada están modeladas por las siguientes ecuaciones. Determine la posición del cuerpo en el instante t.

    a) $a(t) = 32\ \mathrm{ms}^{-2}, \quad \mathrm{v}(0) = 20\ \mathrm{ms}^{-1}, \quad \mathrm{s}(0) = 5\ \mathrm{m}$
    b) $a(t) = 9{,}8\ \mathrm{ms}^{-2}, \quad \mathrm{v}(0) = -3\ \mathrm{ms}^{-1}, \quad \mathrm{s}(0) = 0\ \mathrm{m}$

13. En base a las gráficas, responda.

    a) Determine los intervalos abiertos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

    b) Identifique los valores extremos locales y absolutos de la función, si los hay; además, indique en dónde se alcanzan.

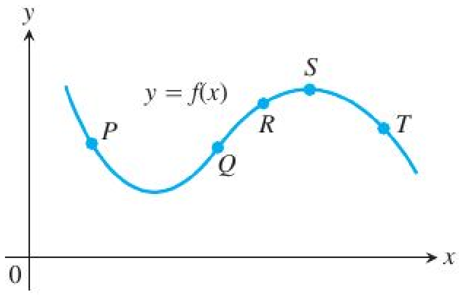


14. Grafique una función continua $y = g(x)$ tal que:

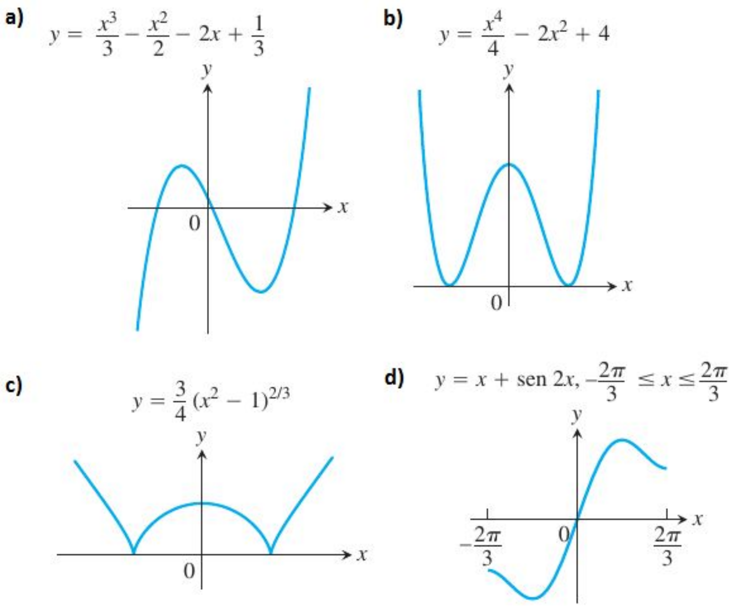
    a) $g(2) = 2$; $0 < g' < 1$ para $x < 2; g'(x) \to 1^-$ cuando $x \to 2^-; -1 < g' < 0$ para $x > 2$ y $g'(x) \to -1^+$ cuando $x \to 2^+$.

    b) $g(2) = 2$; $g' < 0$ para $x < 2; g'(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^-; g' > 0$ para $x > 2$ y $g'(x) \to \infty$ cuando $x \to 2^+$.

15. La siguiente figura muestra una parte de la gráfica de una función derivable $y = f(x)$. En cada uno de los cinco puntos indicados, clasifique y' e y'' como positiva, negativa o cero.



16. Identifique los puntos de inflexión así como los máximos y mínimos locales de las funciones graficadas. Identifique los intervalos en los que las funciones son cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo.



17. Para las siguientes funciones, determine:

- Dominio, intersecciones con los ejes y simetría (si la función es par o impar).
- Intervalos donde la función es continua.
- Discontinuidades de la función y tipos de discontinuidades.
- Asíntotas de la función (verticales, horizontales y oblicuas).
- Intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.
- Máximos y/o mínimos locales.
- Intervalos de concavidad hacia arriba y/o hacia abajo.
- Puntos de inflexión.

Finalmente, realice un esbozo de la gráfica de la función.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 3$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x^2 + 5x - 14}$

c) $y = |x^2 - 1|$

d) $y = \dfrac{8x}{x^2 + 4}$

18. Trace una curva y = f(x) que cumpla:
    - $f(-2) = 8$ $\qquad f'(2) = f'(-2) = 0,$
    - $f(0) = 4$ $\qquad f'(x) < 0$ para $|x| < 2,$
    - $f(2) = 0$ $\qquad f''(x) < 0$ para $x < 0,$
    - $f'(x) > 0$ para $|x| > 2$ $\qquad f''(x) > 0$ para $x > 0$

19. Demuestre que de todos los rectángulos de perímetro 8 m, el de mayor área es un cuadrado.

20. Un rectángulo tiene su base en el eje x y sus dos vértices superiores sobre la parábola $y = 12 - x^2$. ¿Cuál es el mayor área posible del rectángulo y cuáles son sus dimensiones?

21. Un sembradío rectangular de plantas de guisantes tiene un área de 216 m^2; se quiere encerrar con una cerca y dividirlo en dos partes iguales mediante otra cerca paralela a uno de los lados. ¿Qué dimensiones del rectángulo exterior requieren la menor longitud total de la cerca? ¿Cuánta cerca se requiere?

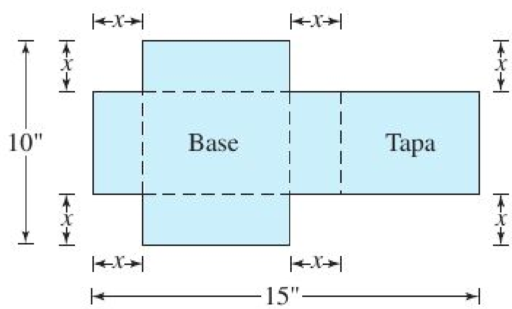
22. Una pieza de cartón mide 10 por 15 pulgadas. Como se ilustra en la figura, se le han quitado dos cuadrados en las esquinas del lado que mide 10 pulgadas, Además, se han eliminado dos rectángulos de las otras dos esquinas, de manera que las cejas puedan doblarse para formar una caja rectangular con tapa.

    a) Escriba una fórmula para el volumen, $V(x)$, de la caja.

    b) Encuentre el dominio de V para la situación del problema y grafique V en su dominio.

    c) Use un método gráfico para determinar el volumen máximo y el valor de x que lo da.

    d) Confirme analíticamente el resultado obtenido en el inciso (c).

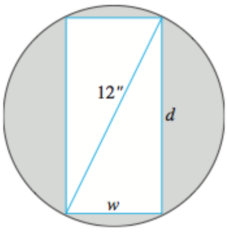


23. Determine las dimensiones de un cilindro circular recto de volumen máximo que se pueda inscribir en una esfera de de 10 cm de radio. ¿Cuál es el volumen máximo?

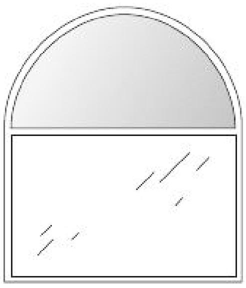
24. **Resistencia de una viga.** La resistencia S de una viga de madera rectangular es proporcional a su ancho (w) por el cuadrado de su espesor (d). Observe el dibujo.

    a) Asumiendo que la constante de proporcionalidad es $k = 1$, determine las dimensiones de la viga más resistente que se puede extraer de un tronco cilíndrico de 12 pulgadas de diámetro.

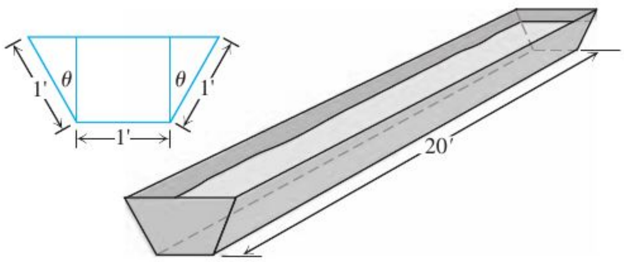
    b) Asumiendo que $k = 1$, grafique la resistencia S como función del ancho w y compare con el resultado del inciso anterior.



25. Una ventana tiene forma de rectángulo y está coronada con un semicírculo. El rectángulo es de vidrio claro, mientras que el semicírculo es de vidrio de color y transmite sólo la mitad de la luz por unidad de área en comparación con el vidrio claro. El perímetro total es fijo. Encuentre las proporciones de la ventana que admitan la mayor cantidad de luz. Desprecie el espesor del marco.



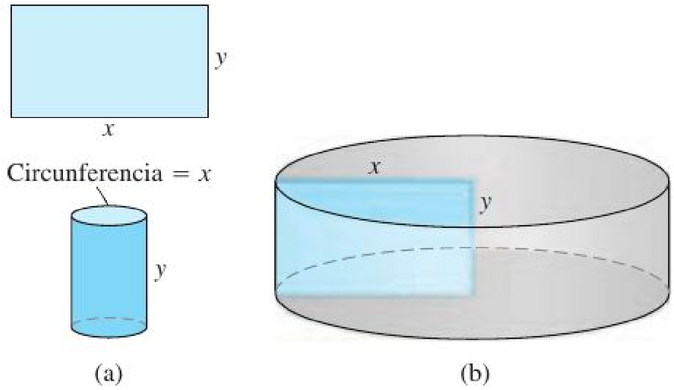
26. El abrevadero de la figura se debe construir con las dimensiones que se indican. Sólo se puede variar el ángulo θ. ¿Qué valor de θ maximizará el volumen del abrevadero?



27. Compare las respuestas de los siguientes dos problemas de construcción:

a) Una hoja rectangular de 36 cm de perímetro y dimensiones x por y cm se enrolla a manera de cilindro, como se ilustra en el inciso (a) de la figura. ¿Qué valores de x y de y dan el mayor volumen?

b) La misma hoja se hace girar alrededor de uno de los lados de longitud y para generar el cilindro que se ilustra en el inciso (b) de la figura.¿Qué valores de x y de y dan el mayor volumen?



28. La altura con respecto al suelo de un objeto que se desplaza verticalmente está dada por

$$s = -5\ \mathrm{ms}^{-2}\mathrm{t}^2 + 30\ \mathrm{ms}^{-1}\mathrm{t} + 34\ \mathrm{m},$$

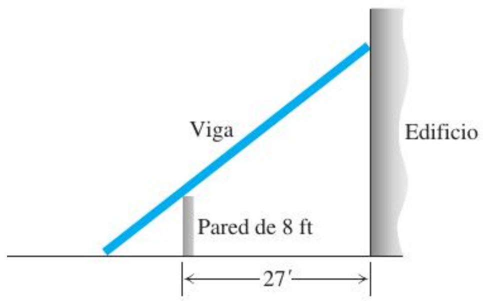
con s en metros y t en segundos. Determine:

a) la velocidad del objeto cuando $t = 0$

b) su altura máxima y cuando la alcanza.

c) su velocidad cuando $s = 0$.

29. La pared de 8 pies que se ilustra aquí está a 27 pies del edificio. Determine la viga recta de longitud más corta que alcance el lado del edificio desde el suelo que está al otro lado de la pared.



30. Al mediodia, el barco A se encuentra a 12 millas náuticas al norte del barco B. El barco A navega hacia el sur a 12 nudos (millas náuticas por hora; una milla náutica es igual a 2000 yardas) y continúa haciéndolo todo el día. El barco B navega hacia el este a 8 nudos y continua haciéndolo todo el día.

a) Empiece a contar el tiempo t = 0 al mediodía y exprese la distancia s entre los barcos como una función de t.

b) ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre barcos al mediodía? ¿Qué tan rápido lo hace una hora después?

c) Ese día, la visibilidad era de 5 millas náuticas. ¿los tripulantes de los barcos pudieron verse alguna vez?

d) Grafique juntas s y $\dfrac{ds}{dt}$ como funciones de t para $-1 \leq t \leq 3$, usando diferentes colores, si es posible. Compare las gráficas y lo que ve con las respuestas que obtuvo en los incisos (b) y (c).

e) Aparentemente, la gráfica de $\dfrac{ds}{dt}$ podría tener una asíntota horizontal en el primer cuadrante. Lo anterior sugiere que $\dfrac{ds}{dt}$ se aproxima a un valor límite cuando $t \to \infty$. ¿Cuál es ese valor? ¿Cuál es su relación con la rapidez individual de cada barco?

ANTIDERIVADAS

31. Determine una antiderivada para cada función. Realice todo cuanto pueda mentalmente. Verifique sus respuestas mediante la derivación.

a) $f(x) = x^7 - 6x + 8$

b) $f(x) = \pi \cos(\pi x)$

c) $f(x) = x^{-4} + 2x + 3$

d) $f(x) = 2 - \dfrac{5}{x^2}$

e) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

32. Determine la antiderivada más general o integral indefinida. Compruebe sus respuestas mediante derivación.

a) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x\right) dx$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$

c) $\displaystyle\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt$

d) $\displaystyle\int 3\ \cos(5\theta)\ d\theta$

e) $\displaystyle\int \frac{2}{5} \sec\theta \tan\theta d\theta$

f) $\displaystyle\int (\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{cosec}^2 x) dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1 - \cos(6t)}{2} dt$

h) $\displaystyle\int (1 + \tan^2\theta) d\theta$

Trabajo Práctico N°4
Análisis Matemático 1-Facultad de Ingeniería

INTEGRACIÓN Y APLICACIONES

1-NOTACIÓN SIGMA. SUMAS DE RIEMANN. INTEGRAL DEFINIDA.

1. Escriba la suma sin la notación sigma. Luego evalúela: $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos k\pi$.

2. Exprese la suma en notación sigma: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}$.

3. Grafique los integrandos y utilice las áreas para evaluar las integrales:

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-|x|)\, dx$.

   b) $\displaystyle\int_{a}^{b} 2s\, ds$, $0 < a < b$.

4. Para las siguientes funciones, calcule la integral definida en el intervalo indicado utilizando la definición de integral definida. Para ello, tome particiones que den origen a n subintervalos de igual longitud, elija como puntos muestra los extremos derechos de cada subintervalo y obtenga las sumas de Riemann correspondientes. Finalmente tome el límite de las sumas de Riemann cuando $n \to \infty$. ¿Por qué es suficiente tomar solamente particiones de la forma especificada para calcular la integral?

   a) $f(x) = 3x + 2$, en [0,1].
   Ayuda: utilice la fórmula
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   b) $g(x) = x + 4$, en [0,1]

   c) $f(x) = 1 - x^2$, $\quad x \in [0, 1]$. Ayuda: utilice la fórmula
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2-TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

1. Evalúe las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_{-3}^{4} \left(5 - \frac{x}{2}\right) dx$

   b) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t+1)(t^2+4)\, dt$

   c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/6} (\sec x + \tan x)^2\, dx$

2. Mediante el teorema fundamental del Cálculo, determine dy/dx: $y = \displaystyle\int_{0}^{x} \sqrt{1+t^2}\, dt$

3. Determine la derivada: $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \cos t\, dt$

   a) evaluando la integral y derivando el resultado.

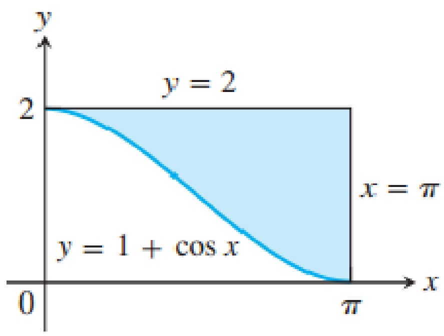
   b) derivando directamente la integral (usando el teorema fundamental del Cálculo).

4. Determine el área total entre el gráfico de la función y el *eje x* en el intervalo dado:

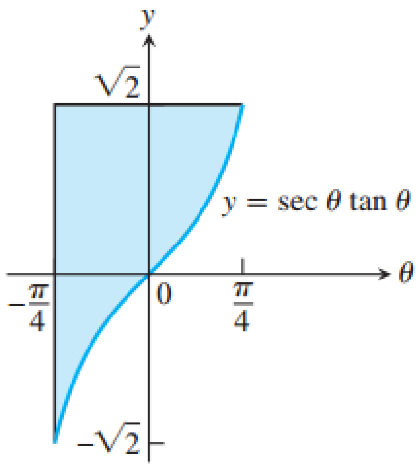
   a) $y = -x^2 - 2x$, $-3 \leq x \leq 2$

   b) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, $0 \leq x \leq 2$

5. Determine las áreas de las regiones sombreadas:

   a)

   b)

6. Suponga que el ingreso marginal de una compañia por la fabricación y venta de batidoras es:

$$\frac{dr}{dx} = 2 - \frac{2}{(x+1)^2}$$

donde r se mide en miles de pesos y x en miles de unidades. ¿Cuánto dinero recibirá la compañía por una venta de 3 mil unidades?

3-INTEGRALES INDEFINIDAS Y EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

7. Evalúe las integrales indefinidas usando las sustituciones dadas para reducir las integrales a una forma estándar:

   a) $\displaystyle\int 2x(x^2+5)^{-4}\, dx$; $u = x^2 + 5$

   b) $\displaystyle\int \left(1 - \cos\frac{t}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt$; $u = 1 - \cos\dfrac{t}{2}$

c) $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta \, d\theta$. Usando:

1) $u = \cot 2\theta$
2) $u = \csc 2\theta$

8. Evalúe las integrales:

a) $\int \theta(1-\theta^2)^{1/4} \, d\theta$

b) $\int x^{1/2} \operatorname{sen}(x^{3/2}+1) \, dx$

c) $\int \dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}\operatorname{sen}^2\sqrt{t}} \, dt$

d) $\int x^3\sqrt{x^2+1} \, dx$

9. La aceleración de una partícula que se mueve hacia atrás y hacia adelante en una recta es $a = \dfrac{d^2s(t)}{dt^2} = \pi^2\cos(\pi t) m/s^2$ para toda t (recurse que $s = s(t)$ es la posición de la partícula). Si $s = 0$ y $v = 8m/s$ cuando $t = 0\,s$, determine s cuando $t = 1s$.

10. Calcule el valor promedio de la función temperatura en Fairbanks, Alaska:

$$f(x) = 37\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(x-101)\right) + 25,$$

para un periodo de 365 días. Esta es una manera de estimar la temperatura promedio. Compare su resultado con el del servicio meteorológico que es de $25{,}7^0F$.

4-SUSTITUCIÓN Y ÁREA ENTRE CURVAS.

1. Evalúe las siguientes integrales definidas:

a) a1) $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x \, dx$

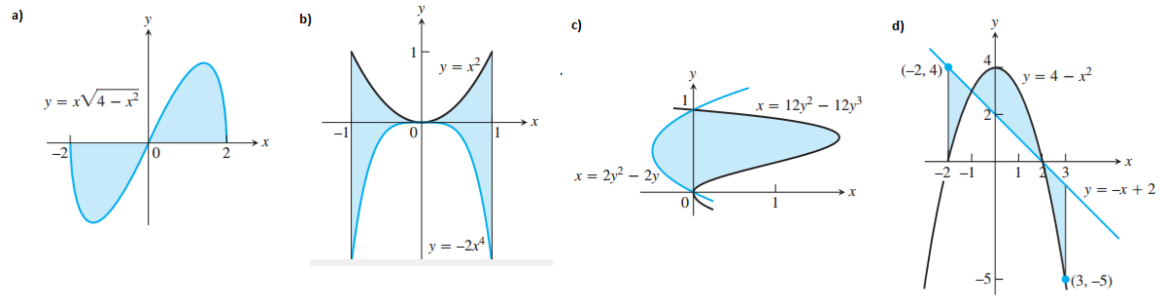
a2) $\int_{-\pi/4}^{0} \tan x \sec^2 x \, dx$

b) b1) $\int_0^1 \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+9}} \, dx$

b2) $\int_{-1}^{0} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+9}} \, dx$

c) $\int_0^1 (4y - y^2 + 4y^3 + 1)^{-2/3}(12y^2 - 2y + 4) \, dy$

2. Determine las áreas totales de las regiones sombreadas.



3. Determine el área de la región encerrada por las curvas:

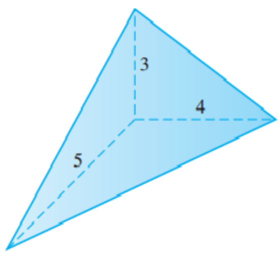
   a) $y = x^4 - 4x^2 + 4$ y $y = x^2$

   b) $y = 2\,\text{sen}\,x$ y $y = \text{sen}\,2x$ $0 \leq x \leq \pi$

   c) $y = \text{sen}(\pi x/2)$ y $y = x$

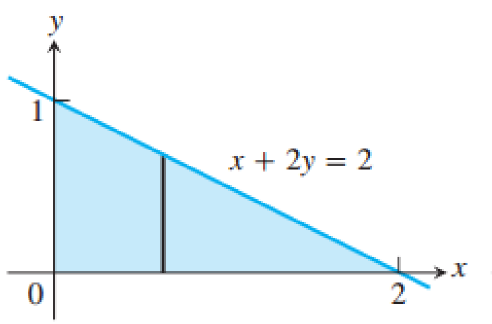
5-CÁLCULO DE VOLÚMENES POR SECCIONES TRANSVERSALES.

1. Determine el volumen del tetraedro dado. (*Sugerencia: considere rebanadas perpendiculares a uno de los lados marcados*)

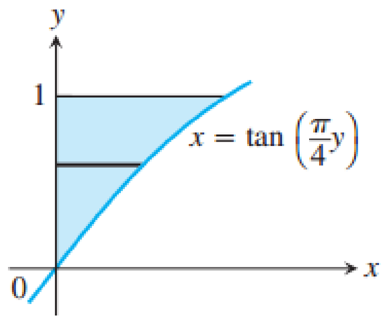


2. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región sombreada:

   a) Alrededor del eje x:



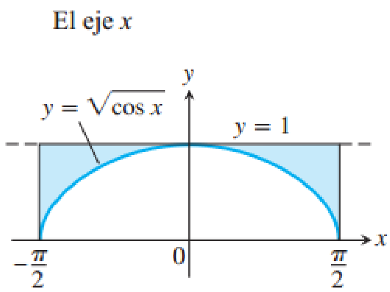
   b) Alrededor del eje y:

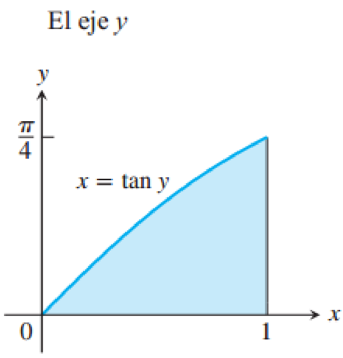


3. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$ alrededor del eje x.

4. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$ alrededor del eje x.

5. Determine el volumen de cada uno de los sólidos generados al hacer girar las regiones sombreadas alrededor del eje indicado:





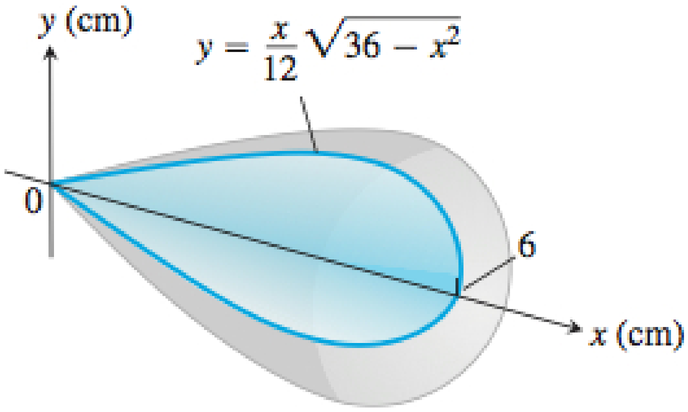
6. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante, acotada por arriba por la parábola $y = x^2$, abajo por el eje x, y a la derecha por la recta $x = 2$ alrededor del eje y.

7. Un tazón tiene una forma que puede generarse al hacer girar la gráfica de $y = x^2/2$ entre $y = 0$ y $y = 5$ alrededor del eje y.

   a) Determine el volumen del tazón.

   b) Si llenamos el tazón con agua a una velocidad constante de 3 unidades cúbicas por segundo, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua en el tazón cuando el agua tiene una profundidad de 4 unidades?

8. Se le ha pedido que diseñe una plomada de 190 g. La forma debe ser similar al sólido de revolución que se ilustra en la figura. Si se elige Latón, que tiene una densidad de 8.5 g por cm cúbico, ¿cuánto pesará la plomada?



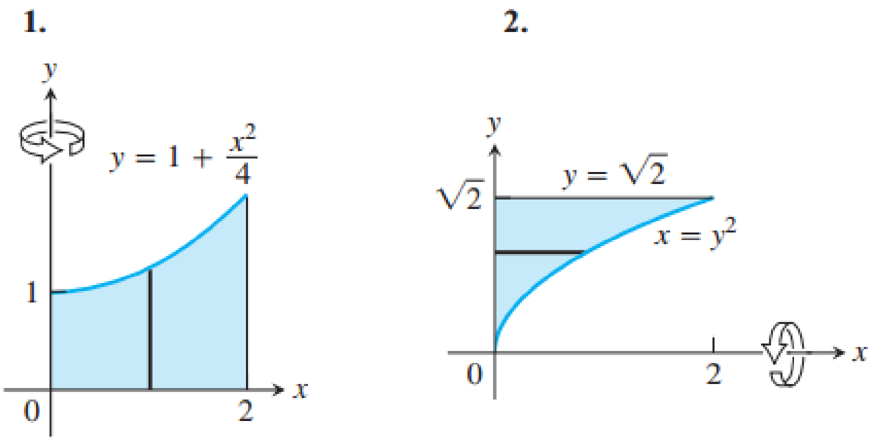
6-CÁLCULO DE VOLÚMENES POR MEDIO DE CASCARONES CILÍNDRICOS.

1. Utilice el método de los cascarones para determinar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar:

   a) alrededor del *eje y* la región acotada por $y = x^2$, $y = 2 - x$, $x = 0$ para $x \geq 0$

   b) alrededor del *eje x* la región acotada por $x = 2y - y^2$, $x = 0$

2. Utilice el método de los cascarones para determinar el volumen de los sólidos generados al hacer girar la región sombreada alrededor del eje indicado.



3. Utilice el método de los cascarones para determinar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región acotada por las curvas que se indican alrededor de las rectas dadas.

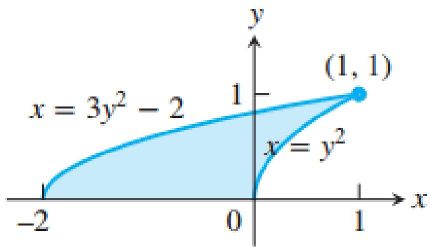
$$y = x^3,\ y = 8,\ x = 0$$

   a) El eje y

   b) La recta $x = -2$

   c) El eje x

   d) La recta $y = 8$



4. La región que se muestra arriba se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. ¿Cuál de los métodos (discos, arandelas, cascarones) podría utilizar para determinar el volumen del sólido más fácilmente? En cada caso plantee las integrales necesarias. Justifique.

7-LONGITUD DE ARCO

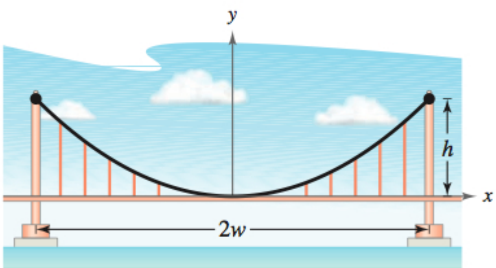
1. Determine la longitud de cada curva:

   a) $y = (1/3)(x^2+2)^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 3$

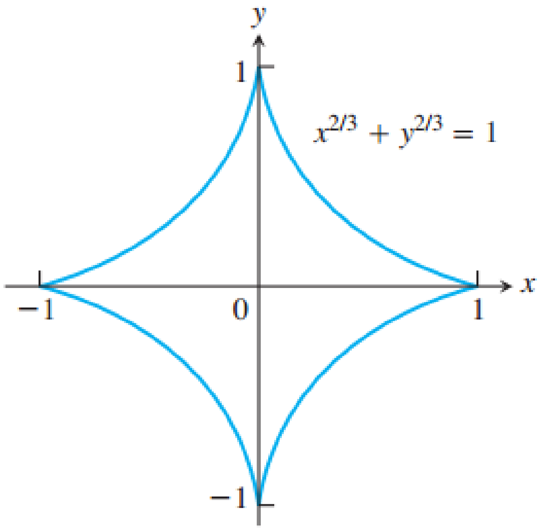
   b) $x = \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{1}{4y}$ de $y = 1$ a $y = 3$

   c) $x = \displaystyle\int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1}\,dt \quad -\pi/4 \leq y \leq \pi/4$

2. El cable de un puente suspendido tiene la forma de una parábola de ecuación $y = kx^2$. Supongamos que h representa la altura del cable desde su punto más bajo al más alto, y sea $2w$ la longitud del puente como se ilustra en la figura. Mostrar que la longitud del cable está dada por:
$$L = 2\int_0^w \sqrt{1 + (4h^2/w^4)x^2}dx.$$



3. La gráfica de la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ es una familia de curvas denominada *astroides*, en virtud de su apariencia de estrella. Determine la longitud de esta astroide particular, para ello, calcule la longitud de la mitad de la parte que está en el primer cuadrante, $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{4} \leq x \leq 1$ y multiplique por 8.



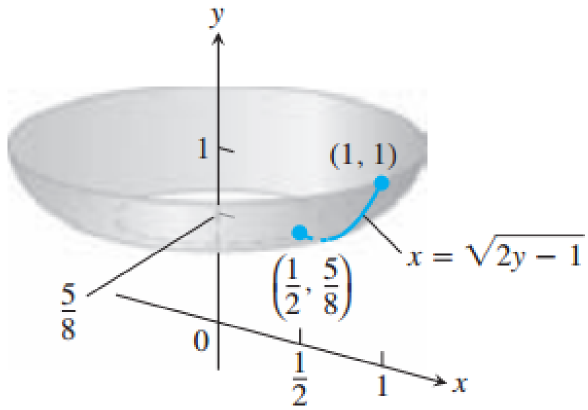
8-ÁREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

1. Determine el área de la superficie lateral del cono generado al hacer girar el segmento de recta $y = x/2$, $0 \leq x \leq 4$, alrededor del eje x.

2. Determine el área de cada superficie generada al hacer girar la curva alrededor del eje indicado.

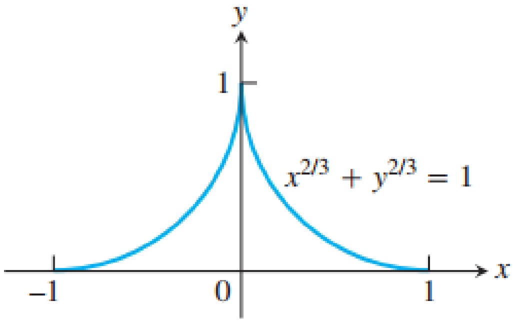
   a) $y = \sqrt{x}$, $3/4 \leq x \leq 15/4$; *eje* x

   b) $x = \sqrt{2y-1}$, $5/8 \leq y \leq 1$; *eje* y



3. Escriba una integral para el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = \cos x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, alrededor del eje x. Más adelante aprenderá a evaluar estas integrales.

4. Determine el área de la superficie al hacer girar alrededor del eje x, la parte de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$que se muestra en la figura. (*Sugerencia*: haga girar alrededor del eje x la parte en el primer cuadrante $y = (1-x^{2/3})^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$, y multiplique por 2 su resultado)

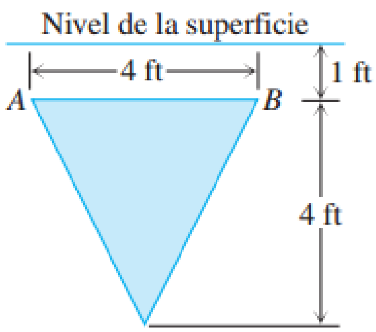


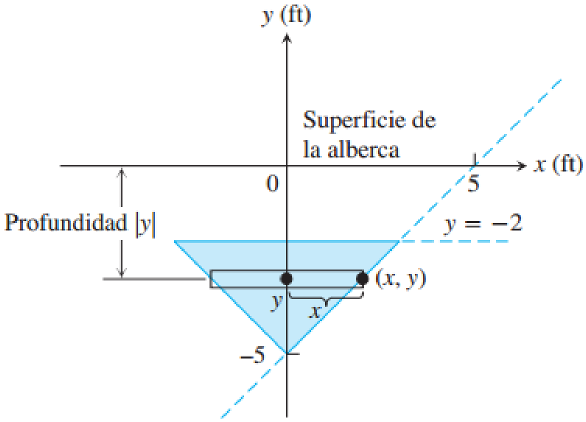
9-TRABAJO Y FUERZAS DE FLUIDOS.

1. Se requiere una fuerza de $210714N$ para comprimir un montaje de resortes en espiral en el tren subterráneo de la ciudad de New York desde su altura original de 15 m a 10 m. ¿Cuál es la constante del resorte? ¿Cuánto trabajo se requiere para comprimir el montaje el primer metro?

2. La fuerza del campo gravitacional de la Tierra varía con la distancia al centro de ésta. La magnitud de la fuerza gravitacional experimentada por un satélite de masa m durante y después del lanzamiento es:
$$F(r) = \frac{mGM}{r^2}$$
donde $M = 5,975 \times 10^{24} kg$ es la masa de la Tierra, $G = 6,6720 \times 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ es la constante de gravitación universal y r se mide en metros y es la distancia al centro de la Tierra. Por lo tanto, el trabajo requerido para elevar un satélite de 1000 kg desde la superficie de la Tierra hasta una órbita a 36780 kilométros del centro de la Tierra es:
$$W = \int_{6370000}^{35780000} \frac{1000MG}{r^2} dr \, (Joules)$$
donde el límite inferior de la integral es la distancia del punto de lanzamiento al centro de la Tierra en metros. Calcule el trabajo.

3. Calcule la fuerza del agua (w = 62,4) sobre un lado de una placa plana en forma de triángulo rectángulo isósceles con base de 6 ft y altura de 3 ft, que se sumerge verticalmente con la base hacia arriba, 2 ft por debajo de la superficie del recipiente.





a) Determine la fuerza del fluido contra una cara de la placa.

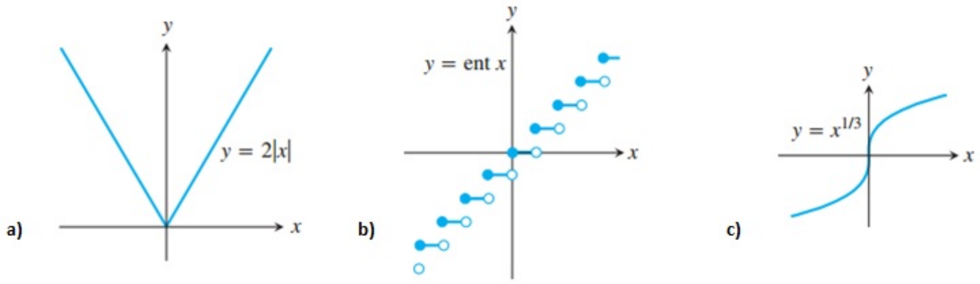
b) ¿Cuál será la fuerza del fluido sobre un lado de la placa si el agua fuera de mar en vez de agua dulce?

Trabajo Práctico N°5
Análisis Matemático 1-Facultad de Ingeniería

FUNCIONES INVERSAS Y SUS DERIVADAS. REGLA DE L'HOPITAL.

1-FUNCIONES INVERSAS.

1. ¿Cuales de las funciones cuyas gráficas se muestran son inyectivas?



2. Determine, a partir de las gráficas, si la función es inyectiva:

   a) $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2} & x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x+2} & x > 0 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$

3. Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$, para $x \geq 1$, determine una fórmula para f^{-1} y grafique ambas funciones.

4. Dada la función $y = f(x)$, determine f^{-1} e identifique el dominio y el rango de f^{-1}. Para comprobar demuestre que $fof^{-1} = f^{-1}of = x$:

   a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

   b) $f(x) = x^2 - 2x$, $x \leq 1$ (*Sugerencia*: complete el cuadrado)

5. Calcule las derivadas de las siguientes funciones inversas:

   a) $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, $x \in (-1, 1)$

   b) $y = \cos^{-1} x$, $x \in (-1, 1)$

   c) $y = cosh^{-1}x$, $x > 1$

   d) $y = senh^{-1}x$, $x \in \mathbb{R}$.

2-LOGARITMOS NATURALES

1. Determine la derivada de y *con respecto a* x:

   a) $y = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$

   b) $y = \ln \dfrac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1-x}}$

c) $y = \int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \ln \sqrt{t}\, dt$

2. Evalúe las siguientes integrales:

   a) $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t\, dt}{2 - \cos t}$

   b) $\int_2^4 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

   c) $\int_0^{\pi/2} \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx$

3. La región entre la curva $y = \sqrt{\cot x}$ y el eje x desde $x = \pi/6$ hasta $x = \pi/2$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

4. Determine la longitud de:

$$x = \left(\frac{y}{4}\right)^2 - 2\ln\left(\frac{y}{4}\right),\ 4 \le y \le 12$$

3-FUNCIONES EXPONENCIALES

1. **Ley de enfriamiento de Newton**. Esta ley nos dice que la rapidez con que la temperatura de un objeto cambia en cualquier instante t es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto en t y la temperatura del medio. Esta ecuación se puede escribir, de forma aproximada, de la siguiente manera:

$$T(t) - T_e = (T_0 - T_e)e^{-kt},$$

   donde $T(t)$ es la temperatura del objeto en el instante t, T_e la temperatura del medio, T_0 la temperatura inicial del objeto y k es la constante de proporcionalidad de la ley de Newton.

   Ahora bien, supongamos que una viga de aluminio expuesta al frío exterior, entra en un taller de troquelado donde la temperatura se mantiene a 65^{o}F. A los 10 minutos, la viga tiene una temperatura de 35^{o}F, y en otros 10 minutos llega a 50^{o}F. Estime la temperatura inicial de la viga.

2. **Agotamiento del petróleo**. Suponga que la cantidad de petróleo bombeado en un pozo de Neuquén disminuye a una razón de 10 porciento anual. ¿Cuándo disminuirá la producción a un quinto de la producción actual?

3. Determine la derivada de y con respecto a la variable independiente que corresponda:

   a) $y = \ln(2e^{-x} \operatorname{sen} x)$

   b) $y = e^{\cos t + \ln t}$

   c) $y = \int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\, dt$

4. Evalúe las siguientes integrales:

   a) $\int_0^{\pi/4} (1 + e^{\tan\theta}) \sec^2\theta\, d\theta$

   b) $\int \frac{e^y}{1 + e^y}\, dy$

5. Determine la derivada de y con respecto a la variable independiente dada.

   a) $y = (\ln 7)7^{\sec t}$
   b) $y = \log_2(5\theta)$
   c) $y = \log_3\left[\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\ln 3}\right]$
   d) $y = \log_2(8t^{\ln 2})$

6. Evalúe las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x2^{x^2}\,dx$
   b) $\displaystyle\int_0^9 \frac{2\log_{10}(x+1)}{x+1}\,dx$

7. Determine los valores máximos y mínimos absolutos de:

$$f(x) = e^x - 2x \,\text{en}\; [0,1]$$

8. Determine los valores extremos absolutos y puntos de inflexión para: $f(x) = xe^{-x}$

9. Determine el área de la región en el primer cuadrante que está acotada arriba por la curva $y = e^{2x}$, abajo por la curva $y = e^x$ y a la derecha por la recta $x = \ln 3$

4-FORMAS INDETERMINADAS Y REGLA DE L'HOPITAL

1. Utilice la regla de L'Hôpital para evaluar el límite. Luego evalúe el límite usando algún otro método estudiado anteriormente.

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$
   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
   c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$

2. Utilice la regla de L'Hôpital para determinar los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{t\to -3} \frac{t^3-4t+15}{t^2-t-12}$
   b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x-8x^2}{12x^2+5x}$
   c) $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi/2} \frac{2\theta-\pi}{\cos(2\pi-\theta)}$
   d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x - \operatorname{sen}\pi x}$
   e) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{3^{\operatorname{sen}\theta}-1}{\theta}$
   f) $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^-} (x-\frac{\pi}{2})\sec x$
   g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\log_2 x}$
   h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\ln x - \ln\operatorname{sen} x)$

i) $\lim\limits_{x\to 1^+} (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x})$

j) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

k) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-1/\ln x}$

l) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\tan(\frac{\pi}{2} - x)$

5-FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.

1. Determine el valor de $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

2. Determine el valor de la derivada de y con respecto a la variable apropiada. Indique el dominio en donde y sea derivable.

   a) $y = \cos^{-1}(1/x)$

   b) $y = \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{2}t)$

3. Evalúe las siguientes integrales:

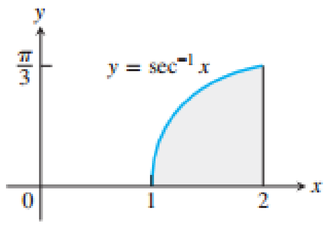
   a) $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{2}/4} \frac{ds}{\sqrt{9-4s^2}}$

   b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dt}{4+3t^2}$

   c) $\displaystyle\int_{-2/3}^{-\sqrt{2}/3} \frac{dy}{y\sqrt{9y^2-1}}$

4. Determine el siguiente límite, aplicando la regla de L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to\infty} x.tan^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$

5. La región ilustrada en la figura, se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido.



   Determine el volumen del sólido.

6-FUNCIONES HIPERBÓLICAS.

1. Determine la derivada de y con respecto a la variable apropiada.

   a) $y = 2\sqrt{t}\tanh(\sqrt{t})$

   b) $y = \ln(\operatorname{senh} z)$

2. Una región del primer cuadrante está acotada por arriba por la curva $y = \cosh x$, abajo por la curva $y = \operatorname{senh} x$, y por la izquierda y la derecha por el *eje y* y la recta $x = 2$, respectivamente. Determine el volumen que esa región genera al girar sobre el *eje x*.

3. Determine la longitud del segmento de la curva $y = \frac{1}{2}\cosh 2x$ desde $x = 0$ hasta $x = \ln\sqrt{5}$.

7-RAZONES RELATIVAS DE CRECIMIENTO (ORDEN DE COMPLEJIDAD DE ALGORITMOS)

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que e^x cuando $x \to +\infty$? ¿Cuáles lo hacen a la misma razón? ¿Cuáles crecen más lentamente?

    a) $\sqrt{x}$

    b) 4^x

    c) $log_{10}x$

    d) $e^x/2$

2. Demuestre que la función $f(x) = e^x$ crece más rápidamente, cuando $x \to +\infty$, que cualquier polinomio de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

3. Determine si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsa. Justifique.

    a) $x = o(x)$ cuando $x \to \infty$

    b) $e^x = o(e^{2x})$

    c) $x + ln(x) = O(x)$

4. Suponga que tiene tres algoritmos diferentes para resolver un mismo problema y el número de pasos que requiere cada uno es del orden de estas funciones:

$$nlog_2(n), \quad n^{3/2}, \quad n(log_2(n))^2.$$

    ¿Cuál de los algoritmos es más eficiente?

5. Suponga que busca un elemento es una lista ordenada de un millón de ellos. Determine la cantidad de pasos necesarios para localizarlo en una búsqueda sequencial. ¿Cuántos pasos necesitará si la búsqueda es binaria?

Trabajo Práctico N°6
Análisis Matemático 1-Facultad de Ingeniería

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN.

1-INTEGRACIÓN POR PARTES

1. Evalúe las siguientes integrales mediante integración por partes:

   a) $\displaystyle\int x.\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)dx$

   b) $\displaystyle\int_1^2 x.\ln(x)dx$

   c) $\displaystyle\int x.\sec^2(x)dx$

   d) $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(x)dx$

   e) $\displaystyle\int xe^{3x}dx$

   f) $\displaystyle\int x^5e^xdx$

   g) $\displaystyle\int e^{2x}\cos(3x)dx$

   h) $\displaystyle\int \sec^3(x)dx$ (ayuda: utilice $u=\sec(x)$, $dv=\sec^2(x)dx$).

2. En las siguientes integrales, utilice primero una sustitución apropiada y luego aplique integración por partes:

   a) $\displaystyle\int e^{\sqrt{3x+9}}dx$

   b) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$

   c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln(x))dx$

   d) $\displaystyle\int \ln(x+x^2)dx$

2-INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

1. Evalúe las siguientes integrales trigonométricas:

   a) $\displaystyle\int \cos(3x)\operatorname{sen}(2x)\,dx$

   b) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x)\cos(7x)\,dx$

   c) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(7x)\,dx$

   d) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos(2x)}\,dx$

2. Determine el volumen generado al hacer girar el arco de curva $y = \operatorname{sen}(x)$, $x \in (0, \pi)$, alrededor del eje x.

3. Determine la longitud de la curva $y = \ln(sec(x)), 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$.

4. Determine el área entre el eje x y la curva $y = \sqrt{1 + cos(4x)}$ para $x \in [0, \pi]$.

3-SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Evalúe las siguientes integrales, aplicando sustituciones trigonométricas:

   a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{8 + 2x^2}$

   b) $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{\sqrt{25x^2 - 9}}$

2. Evalúe la siguiente integral:

$$\int \sqrt{\frac{4-x}{x}}\, dx.$$

   Se sugiere hacer $x = u^2$.

3. Determine el área encerrada por la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4-APLICACIONES GEOMÉTRICAS

1. Determine el área de la región encerrada por la curva $y = x \operatorname{sen}(x)$ y el eje x para:

   a) $0 \leq x \leq \pi$

   b) $\pi \leq x \leq 2\pi$

   c) $2\pi \leq x \leq 3\pi$.

   En todos los casos, grafique la región considerada.

2. Determine el área de la región encerrada por la curva $y = x \cos(x)$ y el eje x para:

   a) $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$

   b) $3\pi/2 \leq x \leq 5\pi/2$

   c) $5\pi/2 \leq x \leq 7\pi/2$.

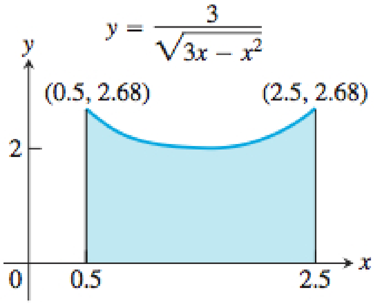
   En todos los casos, grafique la región considerada.

3. Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región acotada por el gráfico de $y = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)}$ y $1 \leq x \leq 10$ alrededor del eje x.

4. Determine el volumen del sólido obtenido al hacer girar alrededor de la recta $x = \ln(2)$, la región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la curva $y = e^x$ y la recta $x = \ln(2)$.

5. Determine el área de la región en el primer cuadrante que está encerrada por los ejes coordenados y la curva $y = \sqrt{9 - x^2}/3$.

6. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región sombreada alrededor del eje x:



5-INTEGRALES IMPROPIAS

1. Evalúe las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$

   b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

   c) $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)dx$

   d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty 2xe^{-x^2}dx$

   e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4r}{\sqrt{1-r^4}}dr$

   f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{t^2-1}dt$

2. Utilice el método que prefiera para determinar la convergencia de las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

3. Determine el área de la región que está entre las curvas $y = \sec(x)$ y $y = \tan(x)$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$.

4. Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región acotada por el gráfico de $y = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)}$ y $1 \leq x$ alrededor del eje x.

Trabajo Práctico N°7
Análisis Matemático 1-Facultad de Ingeniería

SUCESIONES, SERIES Y SERIES DE POTENCIAS.

1-SUCESIONES

1. Halle una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión. Grafique los primeros 10 términos de la sucesión encontrada.

   a) $1, -1, 1, -1, ...$

   b) $1, -4, 9, -16, 25, ...$

   c) $2, 6, 10, 14, 18, ...$

   d) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$

   e) $\frac{5}{1}, \frac{8}{2}, \frac{11}{6}, \frac{14}{24}, \frac{17}{120}, ...$

2. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones convergen? Determine sus límites:

   a) $a_n = 2 + (0,1)^n$

   b) $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$

   c) $a_n = 1 + (-1)^n$

   d) $a_n = \frac{sen(n)}{n}$

   e) $a_n = (1 + \frac{7}{n})^n$

   f) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

   g) $a_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

   h) $a_n = \ln(n) - \ln(n+1)$

   i) $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

   j) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$, $p > 1$.

2-SERIES NUMÉRICAS

1. Encuentre la sucesión de sumas parciales y úsela para determinar si la serie converge:

   a) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + ... + \frac{2}{3^{n-1}} + ...$

   b) $\frac{9}{100} + \frac{9}{100^2} + \frac{9}{100^3} + ... + \frac{9}{100^n} + ...$

2. Encuentre los primeros términos de cada serie geométrica y luego encuentre la suma de la serie:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right)$

3. Determine si la serie geométrica converge, de ser así encuentre su suma:

   a) $\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^3 + \left(\frac{-2}{3}\right)^4 + ...$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2})^n$

4. Utilice el criterio del n-ésimo término con la finalidad de demostrar la divergencia de la serie:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+10}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)$

5. Escriba algunos términos de las siguientes series geométricas. Determine **a** y **r**. Calcule la suma de la serie y determine los valores de **x** para los cuales la serie converge:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

   b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x+1)^n$

6. Utilice el **criterio de la integral** para determinar si las siguientes series convergen. Asegúrese de verificar que se cumplen las condiciones del criterio mencionado.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{1+e^{2n}}$

7. ¿Cuál serie converge y cuál diverge? Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{8^n}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\left(\frac{1}{n}\right)$

8. Utilice el **criterio de comparación** para determinar si cada serie converge o diverge.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+30}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n)}$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n^2+2}}$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$

9. ¿Cuál serie converge y cuál diverge? Justifique.

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{5^n}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\ln(n)}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n-1}$

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{5^n}$

   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

10. Utilice el **criterio de la razón** para determinar si cada serie converge o diverge.

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(n+1)^2}$

    b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$

11. Utilice el **criterio de la raíz** para determinar si cada serie converge o diverge.

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(3n)^n}$

    b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(e^2+\frac{1}{n}\right)\right)^{(n+1)}$

12. Utilice algún criterio para determinar si la serie converge o diverge.

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!e^{-n}$

    b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

    c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}$

13. ¿Cuál de las siguientes **series alternantes** converge? ¿Y cuál diverge?

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{10^n}{(n+1)!}$

    b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

14. ¿Cuál de las siguientes series converge absolutamente? Justifique.

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$

    b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

15. Ni el criterio de la razón ni el de la raíz ayudan con las series p. Intente aplicarlos a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

y pruebe que ambos criterios no brindan información sobre la convergencia o divergencia de la serie.

3- SERIES DE POTENCIAS

1. Determine los polinomios de Taylor de orden 0, 1, 2 y 3 generados por $f(x) = \ln(1 + x)$ en *a=0.* Grafique f y los polinomios encontrados en un mismo gráfico.

2. Determine la serie de Taylor en *x= 0* generada por las siguientes funciones:

   a) $y = e^{-x}$
   b) $y = \operatorname{sen}(3x)$

3. Determine la serie de Taylor generada por $f(x) = 2^x$ en $a = 1$.

4. Determine la linealización (polinomio de Taylor de orden 1) y la aproximación cuadrática de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en $x = 0$. Grafique la función f y los polinomios encontrados. ¿Cuál de ellos es una mejor aproximación de f cerca de $x = 0$?

5. Utilice alguna sustitución para determinar la serie de Taylor en$x = 0$ de las funciones:

   a) $y = e^{-5x}$
   b) $y = 5\operatorname{sen}(-x)$
   c) $y = \arctan(3x^4)$
   d) $y = \dfrac{1}{2 - x}$

6. Desarrolle en serie de Taylor centrada en 0 las siguientes funciones. Indique intervalo de convergencia y analice, en caso de que sea posible, si la serie obtenida converge en los extremos de dicho intervalo.

   a) $y = \operatorname{sen}(x)$
   b) $y = \cos(x)$
   c) $y = \ln(1 + x)$
   d) $y = \arctan(x)$
   e) $y = \operatorname{senh}(x)$
   f) $y = \cosh$
   g) $y = \dfrac{1}{1 + x}$
   h) $y = (1 + x)^k, k \in \mathbb{N}$

7. Utilice la fórmula de Taylor con $a = 0$ y $n = 3$ para determinar una aproximación cúbica de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en $x = 0$. Grafique f y el polinomio encontrado. Estime el error que se comete cuando se aproxima el valor de f en $x = 0{,}1$ con la aproximación cúbica.

8. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y suponga que la serie converge en $(-R, R)$. Pruebe que si f es par, entonces $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$. Es decir, la serie de Taylor de f contiene sólo potencias pares de x. ¿Qué sucedería si f fuese impar?

9. Suponga que f es una función derivable en un intervalo que contiene al cero. También, suponga que los primeros coeficientes de su serie de Taylor alrededor de cero son:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 1, ...$$

¿Tiene f un extremo local en x=0? Si es así, diga de qué tipo. Justifique su respuesta.