Análisis Matemático I
Clase 2: Clasificación de funciones (continuación), operaciones con funciones y razones de cambio.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2023

Objetivos de la clase 2:

Continuamos con el objetivo anterior:
Se espera que el estudiante comprenda la noción de función y comience a describir y analizar distintas funciones elementales desde enfoques geométricos y analíticos.
Además,
Se espera que el estudiante comience a entender la noción de límite y la utilidad del Análisis Matemático para estudiar funciones o modelos.

Valor absoluto, continuación

Propiedades de valor absoluto (hacer gráficos en $\mathbb{R}$):
Sea $a \geq 0$, entonces

1. $|x| \leq a$ si y solo si $-a \leq x$ y $x \leq a$.
2. $|x| \geq a$ si y solo si $x \geq a$ o $x \leq -a$.

Valor absoluto, continuación

Propiedades de valor absoluto (hacer gráficos en $\mathbb{R}$):
Sea $a \geq 0$, entonces

1. $|x| \leq a$ si y solo si $-a \leq x$ y $x \leq a$.
2. $|x| \geq a$ si y solo si $x \geq a$ o $x \leq -a$.

En las desigualdades anteriores se pueden reemplazar $\geq$ y $\leq$ por desigualdades estrictas $>$ y $<$.

Valor absoluto, continuación

Determine y grafique el conjunto solución de las siguientes desigualdades (hacer dos):

1. $|x| < 2$,
2. $|x| \leq 3$,
3. $|x| > 1$,
4. $|x - 3| < 5$,
5. $|x + 2| \leq 3$,
6. $|x + 1| > 6$.

Valor absoluto, continuación

Determine y grafique el conjunto solución de las siguientes desigualdades (hacer dos):

1. $|x| < 2$,
2. $|x| \leq 3$,
3. $|x| > 1$,
4. $|x - 3| < 5$,
5. $|x + 2| \leq 3$,
6. $|x + 1| > 6$.

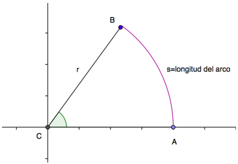
Las propiedades de valor absolutos serán utilizadas en la parte de series, al final del cuatrimestre.

Medición de ángulos mediante **radianes** y orientación positiva y negativa.

Medida en radianes

Sea ACB el ángulo que se desea medir. Sea r el radio de la circunferencia y s la longitud del arco determinado por el ángulo sobre la circunferencia. La medida del ángulo ACB en radianes es el cociente:

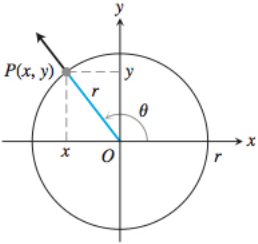
$$\frac{s}{r}.$$



Ejemplos: ángulos de un giro, de medio giro, etc. Recordar signos de ángulos (sentido horario y antihorario).

Funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas: suponemos $x \neq 0$ y $y \neq 0$.



seno: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$ **cosecante:** $\csc\theta = \dfrac{r}{y}$

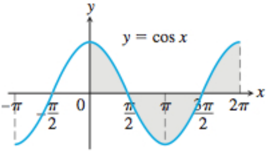
coseno: $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ **secante:** $\sec\theta = \dfrac{r}{x}$

tangente: $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ **cotangente:** $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

Tarea: repasar páginas 25, 26, 27 y 28 del libro de texto (identidades trigonométricas y transformaciones de funciones trigonométricas.)

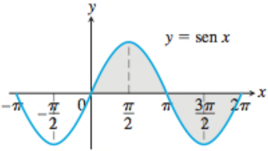
Gráficas de funciones trigonométricas

Funciones trigonométricas



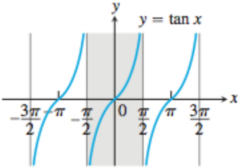
Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $-1 \leq y \leq 1$
Periodo: 2π

(a)



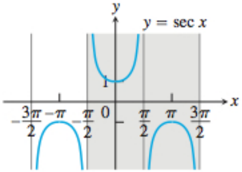
Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $-1 \leq y \leq 1$
Periodo: 2π

(b)



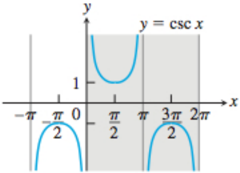
Dominio: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Rango: $-\infty < y < \infty$
Periodo: π

(c)



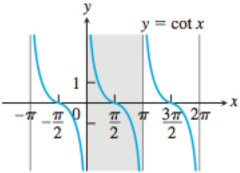
Dominio: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Rango: $y \leq -1$ o $y \geq 1$
Periodo: 2π

(d)



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Rango: $y \leq -1$ o $y \geq 1$
Periodo: 2π

(e)



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Rango: $-\infty < y < \infty$
Periodo: π

(f)

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ **y** $g : D(g) \to \mathbb{R}$ **dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:**

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

Operaciones con funciones.

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ **y** $g : D(g) \to \mathbb{R}$ **dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:**

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

$$f - g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{(función diferencia)}$$

Operaciones con funciones.

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ **y** $g : D(g) \to \mathbb{R}$ **dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:**

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

$$f - g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{(función diferencia)}$$

$$f.g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f.g)(x) = f(x).g(x) \quad \text{(función multiplicación)}$$

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $g : D(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

$$f - g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{(función diferencia)}$$

$$f.g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f.g)(x) = f(x).g(x) \quad \text{(función multiplicación)}$$

La función división f/g tiene por dominio el conjunto:

$$D(f/g) = \{x \in D(f) \cap D(g) : g(x) \neq 0\}$$

y se obtiene mediante división:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad x \in D(f/g).$$

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$. Determine el dominio de $f+g$ y f/g.
Solución: para determinar el dominio de $f+g$, primero determinamos el dominio $D(f)$ de f y el de g, $D(g)$.

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$. Determine el dominio de $f+g$ y f/g.
Solución: para determinar el dominio de $f+g$, primero determinamos el dominio $D(f)$ de f y el de g, $D(g)$. El dominio de f es:

$$D(f) = [0, +\infty)$$

y el de g:

$$D(g) = (-\infty, 1].$$

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$. Determine el dominio de $f+g$ y f/g.
Solución: para determinar el dominio de $f+g$, primero determinamos el dominio $D(f)$ de f y el de g, $D(g)$. El dominio de f es:

$$D(f) = [0, +\infty)$$

y el de g:

$$D(g) = (-\infty, 1].$$

Luego:

$$D(f+g) = D(f) \cap D(g) = [0, 1].$$

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$. Determine el dominio de $f+g$ y f/g.

Solución: para determinar el dominio de $f+g$, primero determinamos el dominio $D(f)$ de f y el de g, $D(g)$. El dominio de f es:

$$D(f) = [0, +\infty)$$

y el de g:

$$D(g) = (-\infty, 1].$$

Luego:

$$D(f+g) = D(f) \cap D(g) = [0, 1].$$

Por otro lado, para determinar el dominio de f/g se deben excluir de $D(f) \cap D(g)$ los puntos donde el denominador se anula (en este caso $x = 1$):

$$D(f/g) = [0, 1).$$

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, determine $D(f/g)$ y escriba la fórmula para $(f/g)(x)$.

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, determine $D(f/g)$ y escriba la fórmula para $(f/g)(x)$.

Solución: primero tenemos

$$D(f) = (-\infty, 1]$$

y:

$$D(g) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, determine $D(f/g)$ y escriba la fórmula para $(f/g)(x)$.

Solución: primero tenemos

$$D(f) = (-\infty, 1]$$

y:

$$D(g) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Entonces $D(f) \cap D(g) = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$ y debemos excluir de esta intersección los puntos donde el denominador, es decir g, se anula.

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, determine $D(f/g)$ y escriba la fórmula para $(f/g)(x)$.

Solución: primero tenemos

$$D(f) = (-\infty, 1]$$

y:

$$D(g) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Entonces $D(f) \cap D(g) = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$ y debemos excluir de esta intersección los puntos donde el denominador, es decir g, se anula. Como g es siempre distinta de cero, se tiene:

$$D(f/g) = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$$

y:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\dfrac{1}{x^2}} = x^2\sqrt{1-x}.$$

Advertencia: próxima diapositiva.

Operaciones con funciones, ejemplos.

Advertencia: para determinar el dominio de $f+g$, $f.g$ o f/g no se debe mirar la fórmula:

$$(f+g)(x), \quad (f.g)(x) \quad \text{o} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

sino que se deben analizar los dominios aplicando la definición de cada operación como en los ejemplos anteriores. Por ejemplo, en el último caso:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x^2\sqrt{1-x},$$

con dominio:

$$D(f/g) = (-\infty, 0) \cup (0, 1].$$

Sin embargo, si hubiésemos mirado la fórmula final, habríamos dicho que el dominio es:

$$(-\infty, 1]$$

lo cual es erróneo, ya que g no está definida en 0 y por lo tanto no es posible hacer la división.

Composición de funciones.

Composición de funciones

Sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $g : D(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Definimos la composición de f con g como la función $f \circ g : D(f \circ g) \to \mathbb{R}$ con dominio:

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\}$$

y cuyas imágenes se obtienen mediante la fórmula:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad x \in D(f \circ g).$$

Hacer diagramas de Venn para ilustrar el dominio de la composición.

Composición de funciones.

Ejemplo: determine el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$ siendo $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Además, escriba la expresión de $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

Ejemplo: determine el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$ siendo $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Además, escriba la expresión de $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.
Solución: vamos a determinar el dominio de $f \circ g$. Por definición, un número x pertenece al dominio de $f \circ g$ si y solo si x pertenece al dominio de g y $g(x)$ está en el dominio de f. El dominio de g es:

$$D(g) = [0, +\infty)$$

y el dominio de f es:

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

Así, cualquier $x \in [0, +\infty)$ cumple $g(x) \in D(f)$. Luego:

$$D(f \circ g) = [0, +\infty).$$

Finalmente:

$$(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad x \in [0, +\infty).$$

Obsrevación: la función $f \circ g$ difiere de la función identidad $h(x) = x$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$, pues g exige que x sea no negativa.

¿Qué es el Cálculo?

Primera respuesta: El Cálculo es una herramienta matemática que nos permite comprender cómo varían o cambian las funciones.

Tasa de cambio promedio o rapidez promedio

Problema 1: se deja caer un objeto desde lo alto de un edificio. Determinar:

(1) La rapidez promedio durante los primeros 2 s

(2) La rapidez promedio durante el intervalo de tiempo de un segundo a dos segundos.

Tasa de cambio promedio o rapidez promedio

Problema 1: se deja caer un objeto desde lo alto de un edificio. Determinar:

(1) La rapidez promedio durante los primeros 2 s

(2) La rapidez promedio durante el intervalo de tiempo de un segundo a dos segundos.

Solución:

(1) Caida libre: la distancia recorrida por el objeto viene dada por:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2, \text{ donde } g \approx 32ft/s^2.$$

Entonces la rapidez promedio durante los primeros 2 segundos es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(0)}{2 - 0} = 32ft/s.$$

Tasa de cambio promedio

(2) Rapidez promedio en el intervalo $[1, 2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(1)}{2 - 1} = 48 ft/s.$$

(2) Rapidez promedio en el intervalo $[1, 2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(1)}{2 - 1} = 48 ft/s.$$

Problema 2: ¿Qué pasa si queremos calcular la rapidez promedio en un intervalo $[1, 1 + h]$?

Solución: longitud del intervalo: h. Entonces la rapidez promedio en el intervalo $[1, 1 + h]$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(1+h) - y(1)}{h} = \frac{16(1+h)^2 - 16(1)^2}{h}.$$

Tasa de cambio

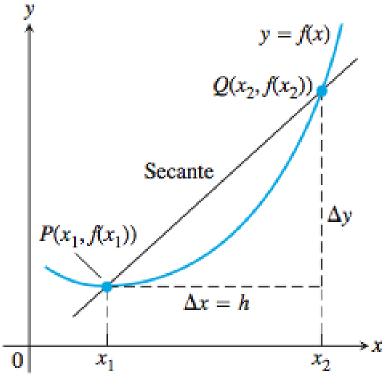
Tasa de cambio promedio

La tasa de cambio promedio de una función $y = f(x)$ con respecto a la variable x en el intervalo $[x_1, x_1 + h]$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

.

Interpretación geométrica de la tasa de cambio



Así, la tasa de cambio promedio de f en el intervalo $[x_1, x_2]$ es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos:

$$(x_1, f(x_1)) \quad \text{y} \quad (x_2, f(x_2)).$$

Introducción a la tasa de cambio instantánea

Recordar que la tasa de cambio promedio de $y = 16t^2$ en $[t_0, t_0 + h]$ es:

$$\frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}.$$

Observemos la siguiente situación:

•valor de h	tasa promedio de $y = 16t^2$ para $t_0 = 1$ en $[1, 1 + h]$
1	48
0.1	33.6
0.01	32.16
0.001	32.016
0.0001	32.0016

Introducción a la tasa de cambio instantánea

Recordar que la tasa de cambio promedio de $y = 16t^2$ en $[t_0, t_0 + h]$ es:

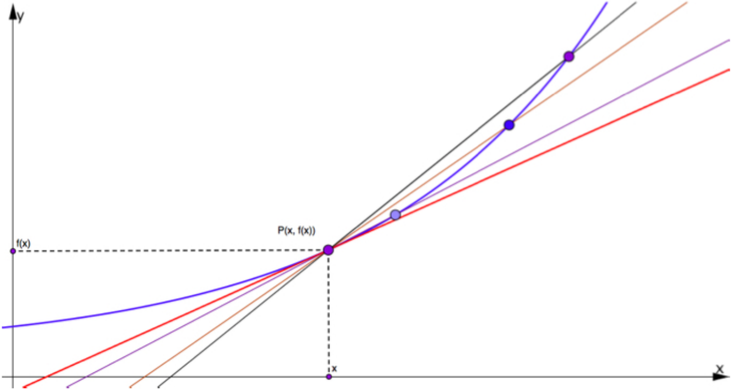
$$\frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}.$$

Observemos la siguiente situación:

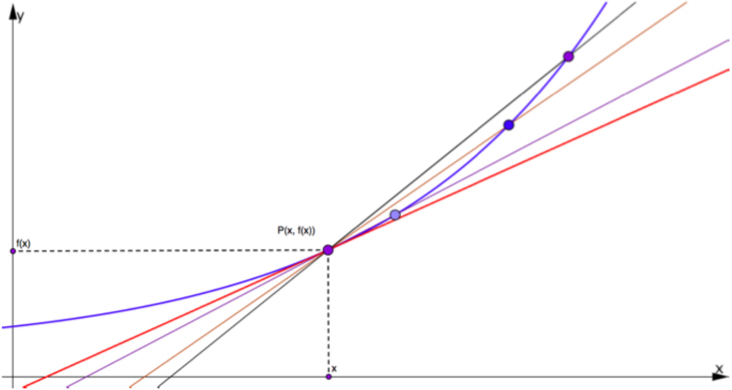
•valor de h	tasa promedio de $y = 16t^2$ para $t_0 = 1$ en $[1, 1 + h]$
1	48
0.1	33.6
0.01	32.16
0.001	32.016
0.0001	32.0016

Así, podemos decir que para $t_0 = 1$, la tasa de cambio promedio de y con respecto a t tiende al valor 32 a medida que la longitud del intervalo $[1, 1 + h]$ tiende a cero (es decir, a medida que h tiende a 0.) **Decimos que 32 (ft/s) es la tasa de cambio instantánea de y con respecto a t en $t_0 = 1$. Luego aprenderemos a calcular la rapidez instantánea en forma precisa.**

Interpretación geométrica de la tasa instantánea



Interpretación geométrica de la tasa instantánea



Conclusión

Tasa instantánea de f en t_0 = pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $(t_0, f(t_0))$.

¿Cómo determinar rigurosamente el comportamiento de una función alrededor de un punto de la recta real?

¿Cómo determinar rigurosamente el comportamiento de una función alrededor de un punto de la recta real?

La búsqueda de respuestas a esta pregunta nos lleva al concepto de *LÍMITE* de una función