

I FUNDAMENTOS DE LA SIMULACION NUMERICA DE RESERVORIOS

RESERVORIOS III

2023

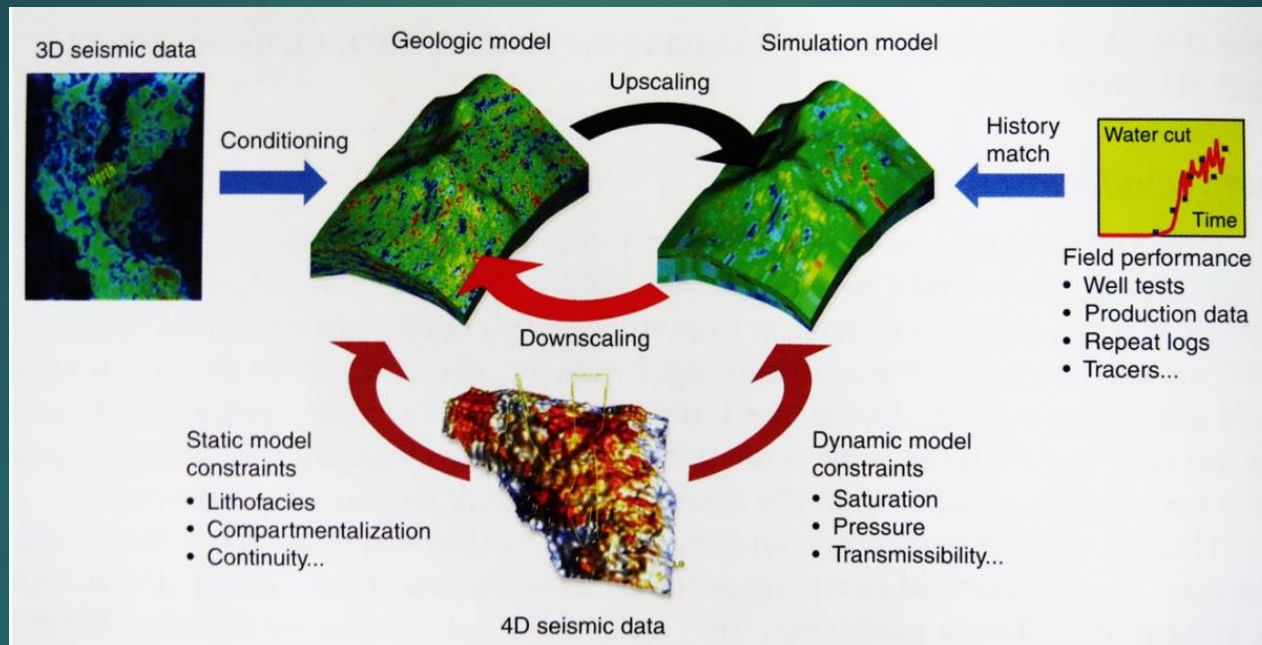
Agenda

2

- ✓ Gestión del reservorio (Reservoir Management)
- ✓ Simulación de reservorios
- ✓ Modelo numérico
- ✓ Modelo estático
- ✓ Modelo dinámico
- ✓ Ajuste histórico (history matching)
- ✓ Predicciones
- ✓ Modelo matemático-Modelo numérico

Gestión de reservorios (Reservoir Management)

3



- ✓ Determinar las condiciones óptimas para maximizar la recuperación económica de los hidrocarburos mediante una operación racional del reservorio.
- ✓ La modelización de reservorios es una de las herramientas más sofisticadas para alcanzar este objetivo principal.

Simulación de reservorios

4

Coordinar actividades de gestión del reservorio

Evaluar Performance del proyecto

- Interpretar /Entender el comportamiento del reservorio

Análisis de sensibilidad de los datos estimados

- Determinar necesidad de datos adicionales

Estimar la vida del proyecto

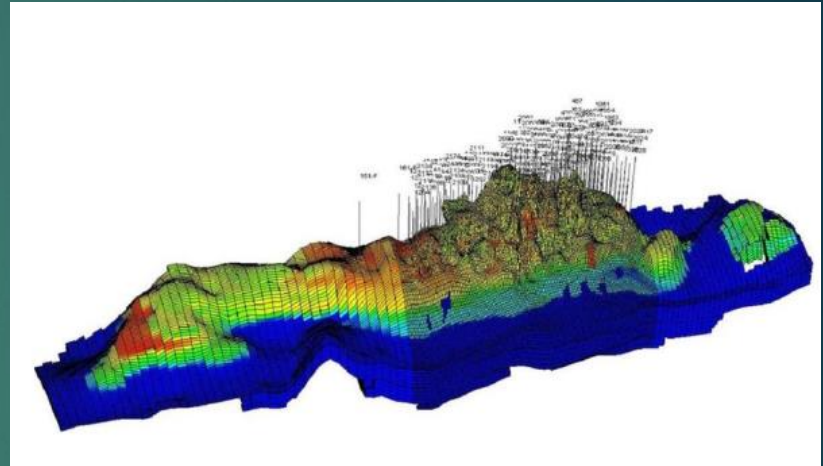
Predecir Recuperación vs Tiempo

Comparar diferentes procesos de recuperación

Planificar desarrollos o cambios operacionales

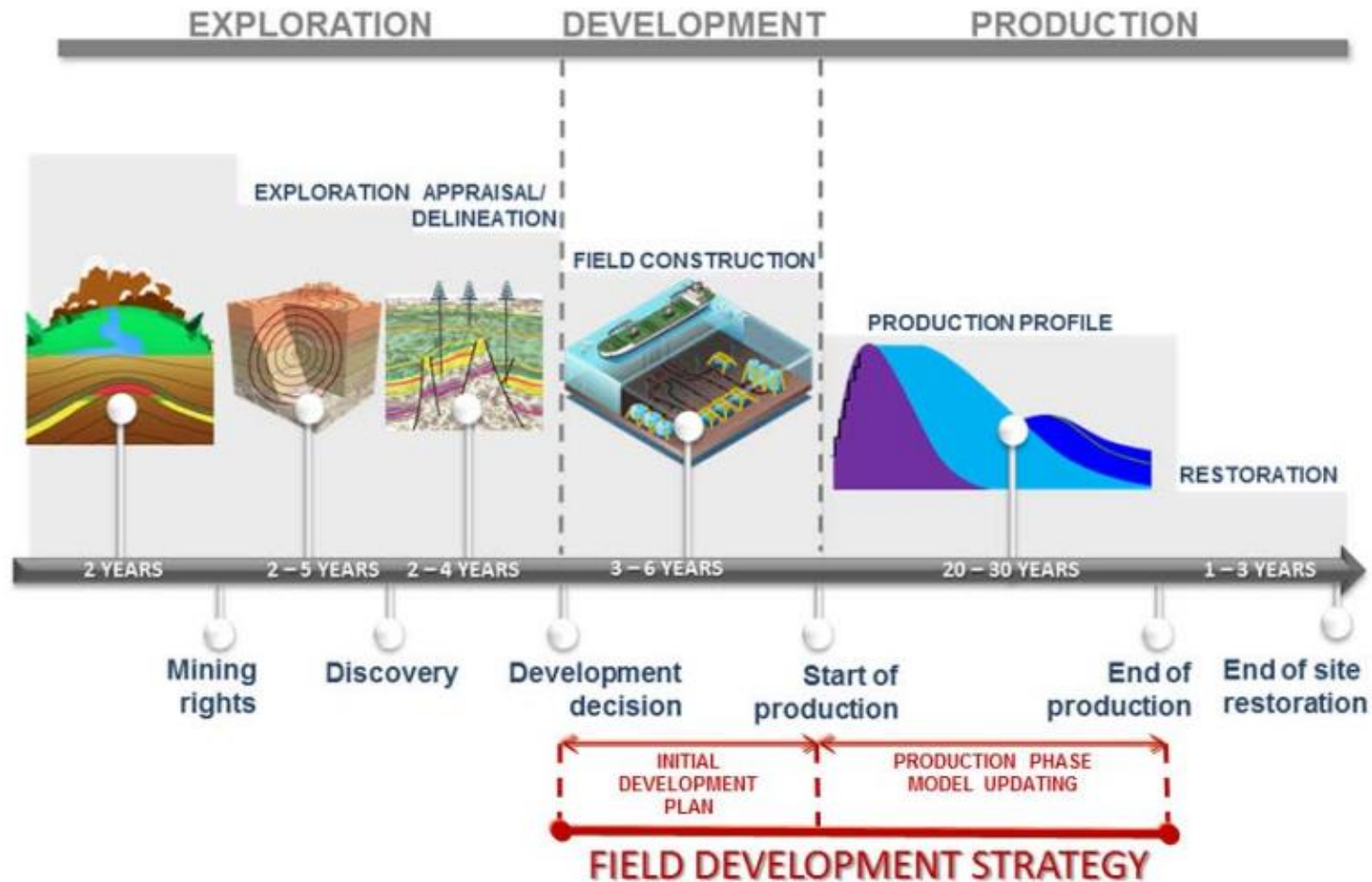
Seleccionar y optimizar el diseño del proyecto

- Maximizar la recuperación económica



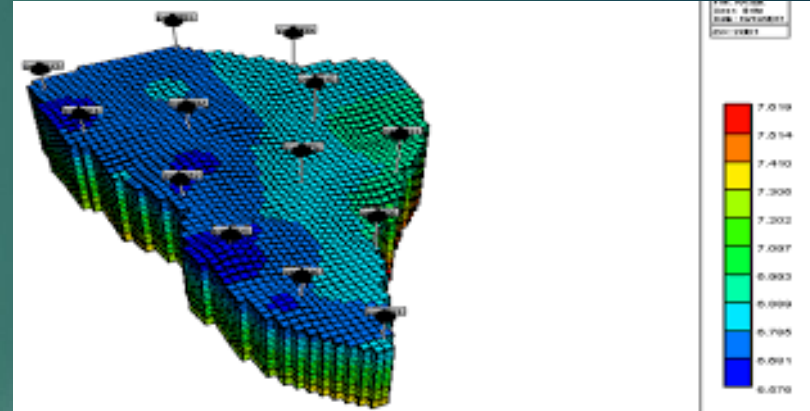
Estrategia de desarrollo

5



Modelo de simulación numérica

6

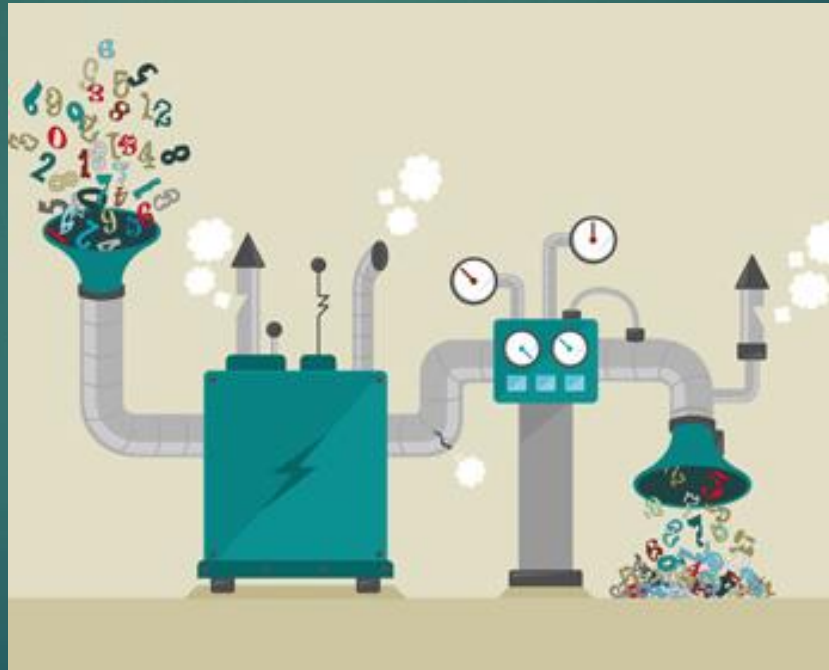


Datos de entrada

Un programa de computación basado en modelos matemáticos necesita datos.

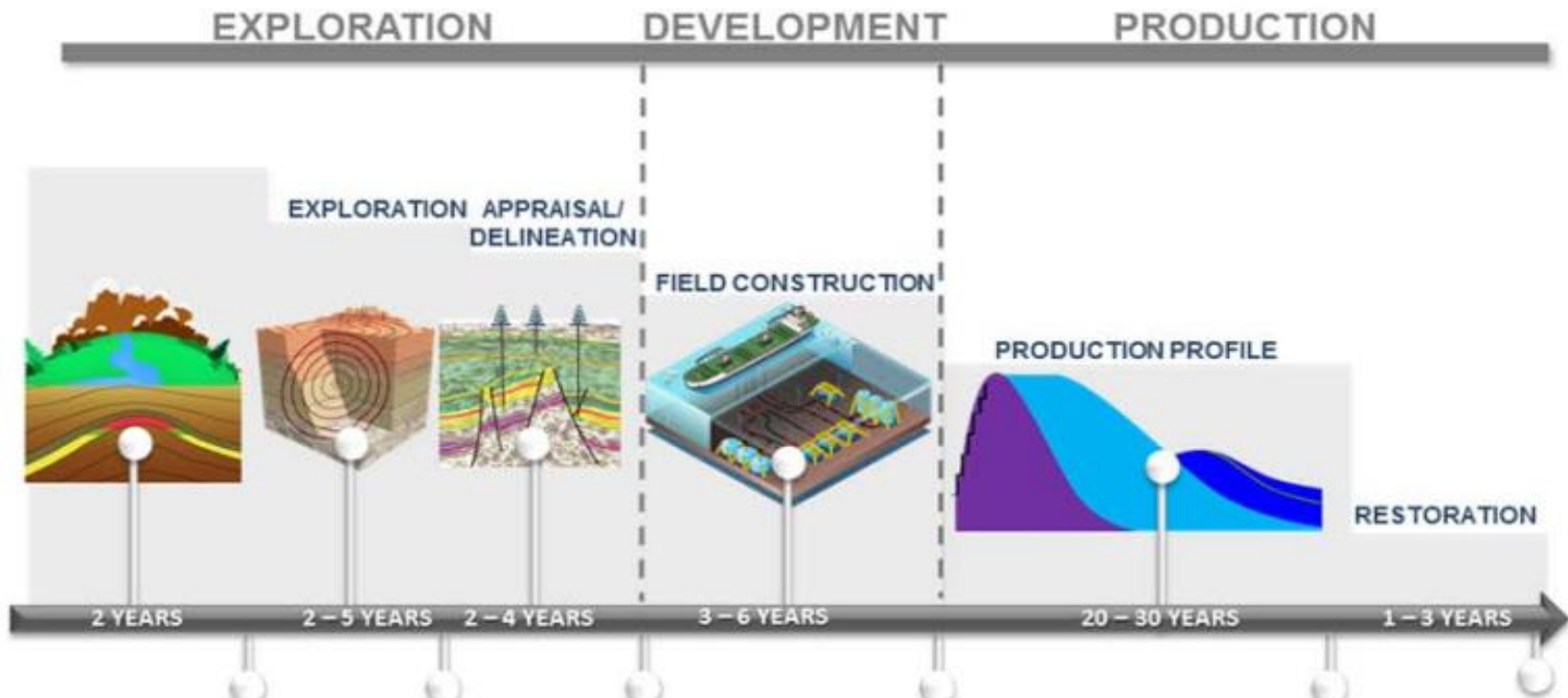
Se requieren datos confiables.

Garbage in Garbage out (GIGO)



Fuente de datos

8



Modelo estático y Modelo dinámico

9

Modelo estático

Comprende datos geológicos, geofísicos, petrofísicos, geomecánicos, geoquímicos y de fluidos

Modelo dinámico

Está constituido por datos de inyección-producción, modelo roca-fluido, análisis PVT y modelo de presiones.

Los modelos estáticos y dinámicos son elementos claves para evaluar y seleccionar opciones futuras de recuperación (pozos infill, IOR, EOR)

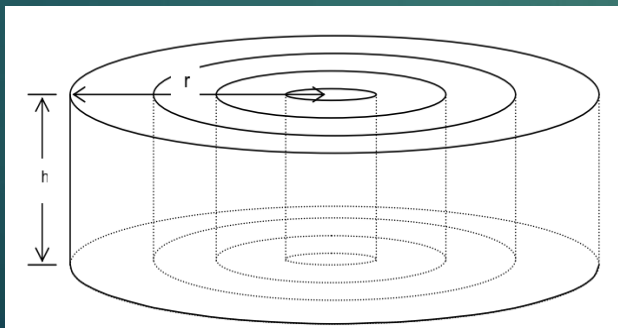
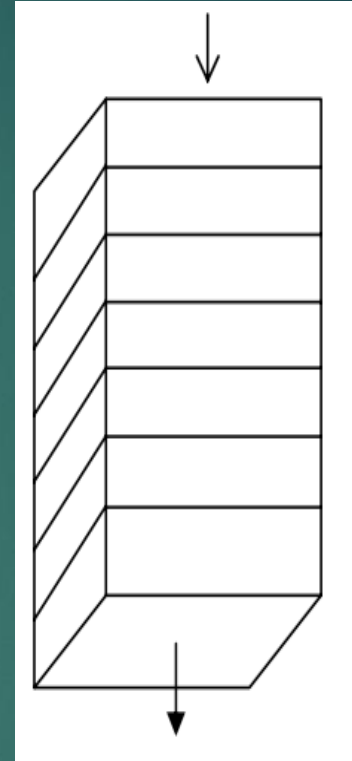
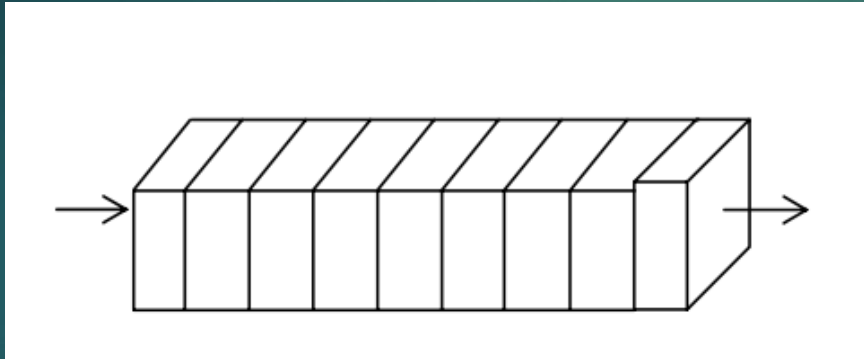
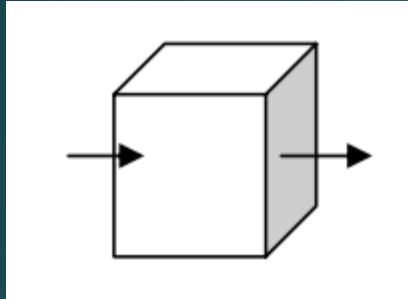
Tipo de simuladores numéricos

10

- ✓ Número de dimensiones
- ✓ Tipo de yacimiento
- ✓ Proceso de recuperación

Malla y número de dimensiones

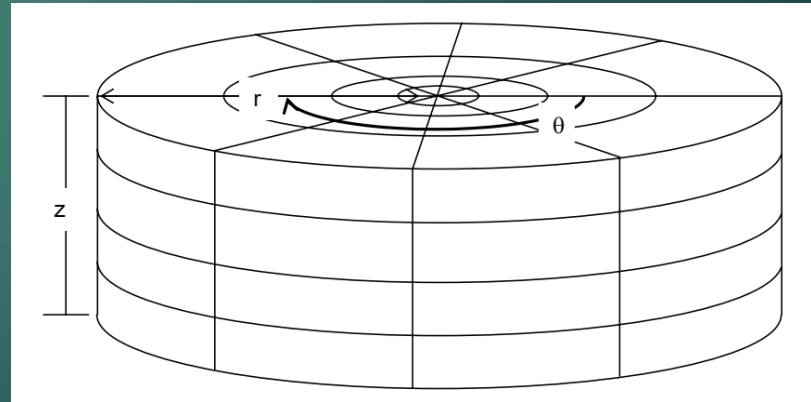
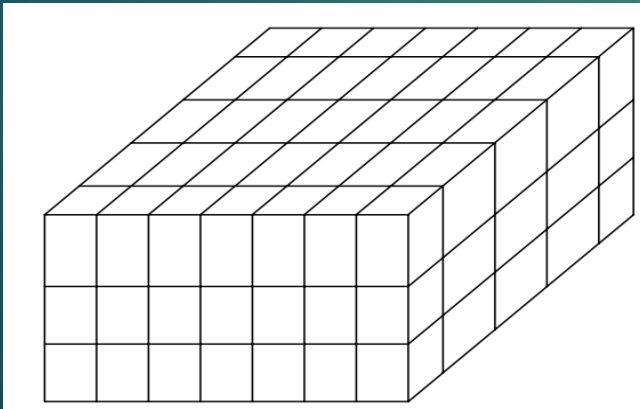
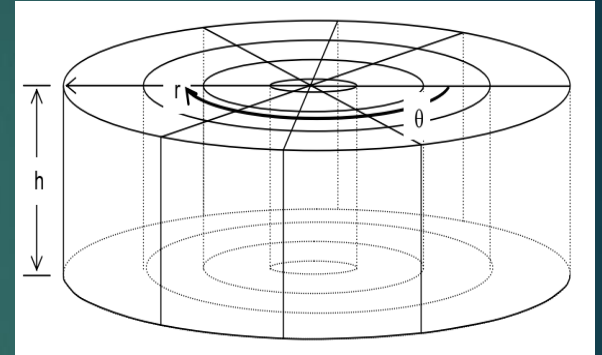
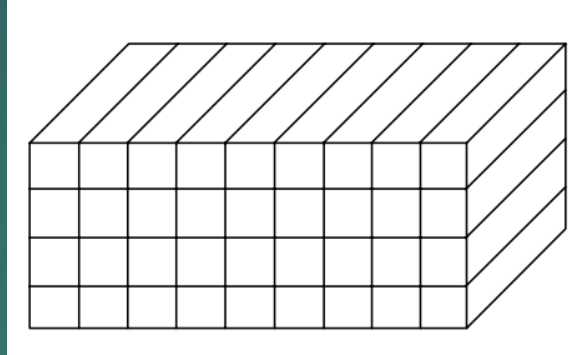
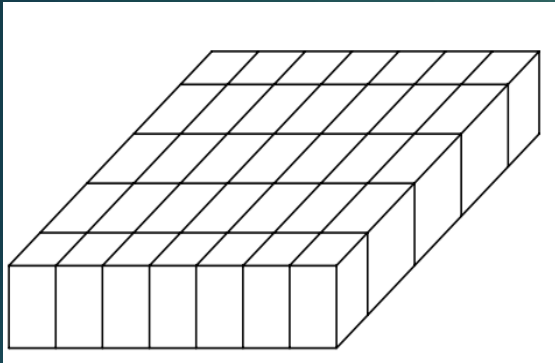
11



- ✓ Modelo tanque 0 dimensiones
- ✓ Modelo 1D horizontal-vertical-radial

Malla y número de dimensiones

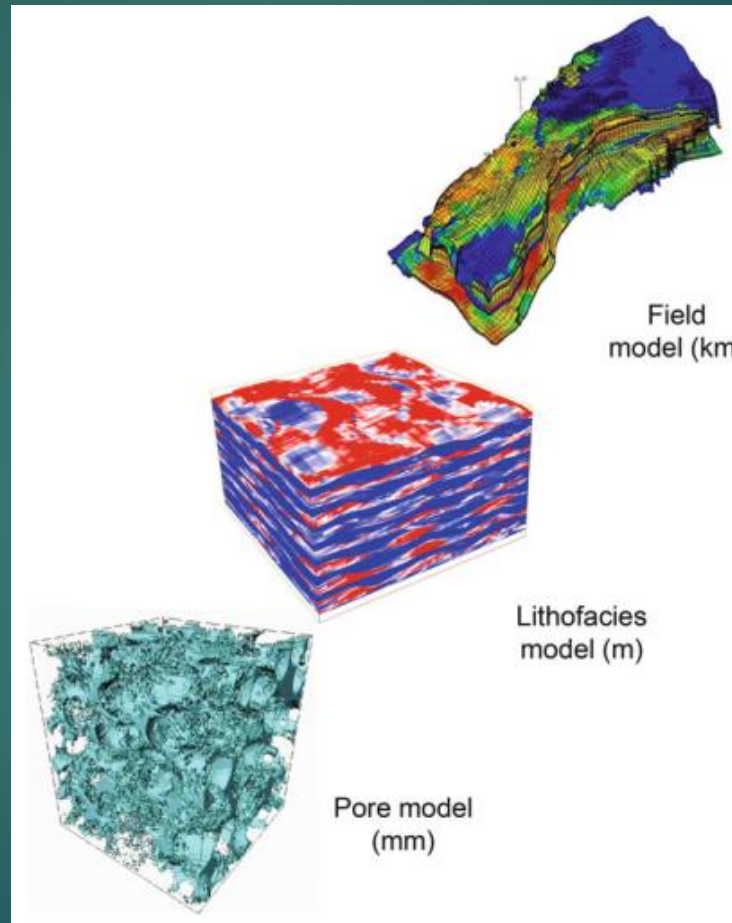
12



✓ Modelos 2D lineales radiales-3D cartesianos-cilíndricos

Modelo de reservorio en diferentes escalas

13



Tipo de yacimiento

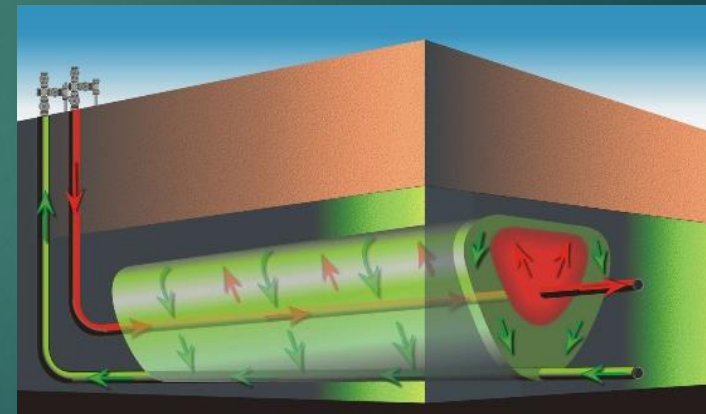
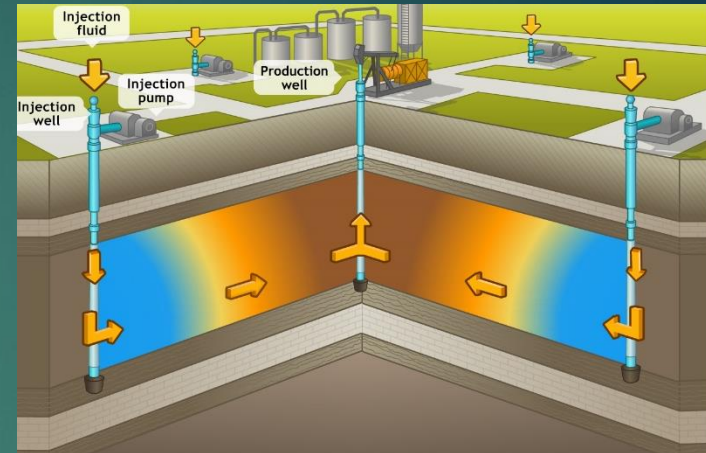
15

- ✓ Yacimiento petróleo negro (Black oil)
- ✓ Yacimiento de gas
- ✓ Yacimiento petróleo volátil y gas condensado (composicional)

Proceso de recuperación

16

- ✓ Recuperación primaria
- ✓ Recuperación secundaria
- ✓ Recuperación asistida
- ✓ No convencionales



Datos de entrada: reservorio

17

- ✓ Distribución de Porosidad y Permeabilidad. Espesores.
- ✓ Profundidad.
- ✓ Distribución de presión y saturación inicial.
- ✓ Número y tamaño de grillas.
- ✓ Compresibilidad de la roca.



Datos de entrada: fluidos

18

✓ B_o, B_w, B_g

✓ μ_o, μ_g, μ_w

✓ ρ_o, ρ_g, ρ_w

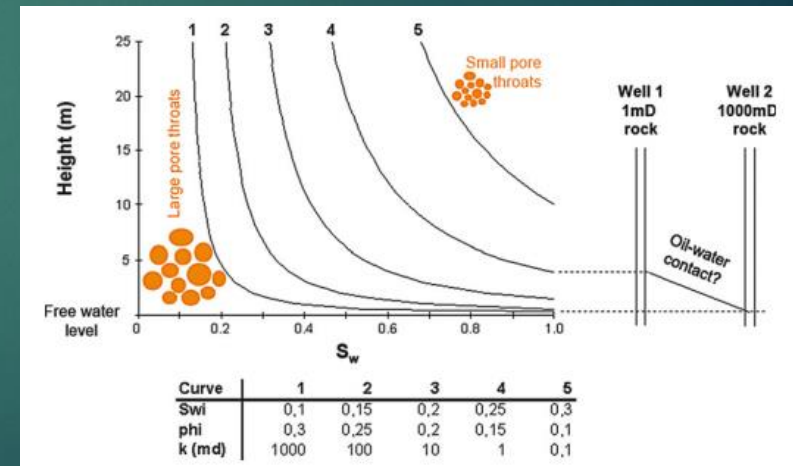
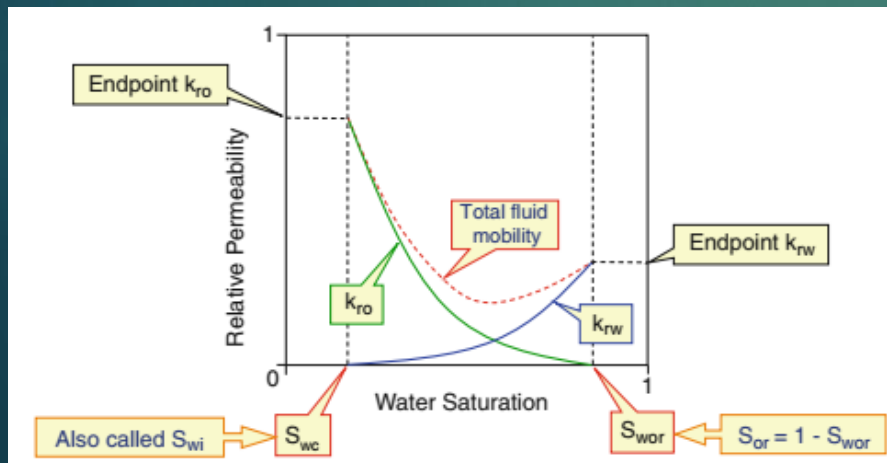


Datos de entrada: roca -fluido

19



- ✓ Curvas de permeabilidades relativas
- ✓ Curvas de Presión capilar



Datos de entrada: pozos

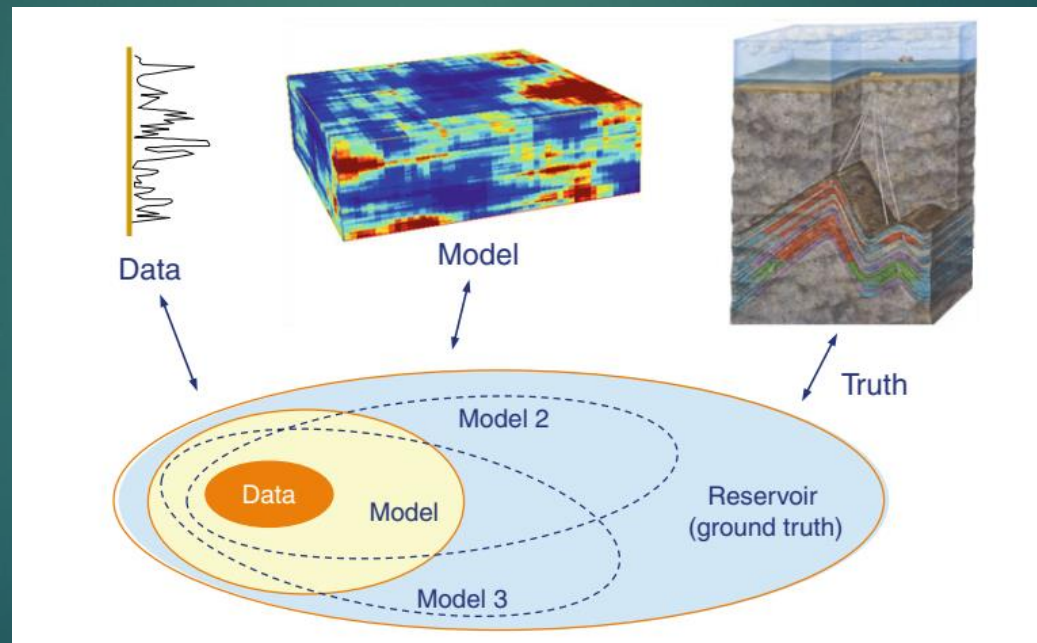
- ✓ Localización y estado del pozo
- ✓ Historia de completación
- ✓ Historia de producción



Limitaciones

21

- ✓ Soluciones aproximadas
- ✓ Calidad y cantidad de datos



Etapas del modelo de simulación

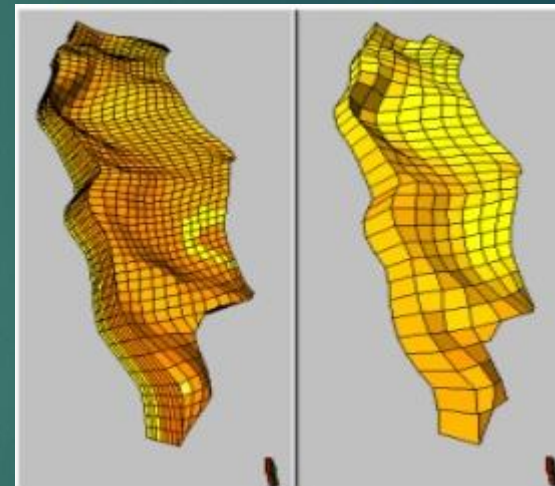
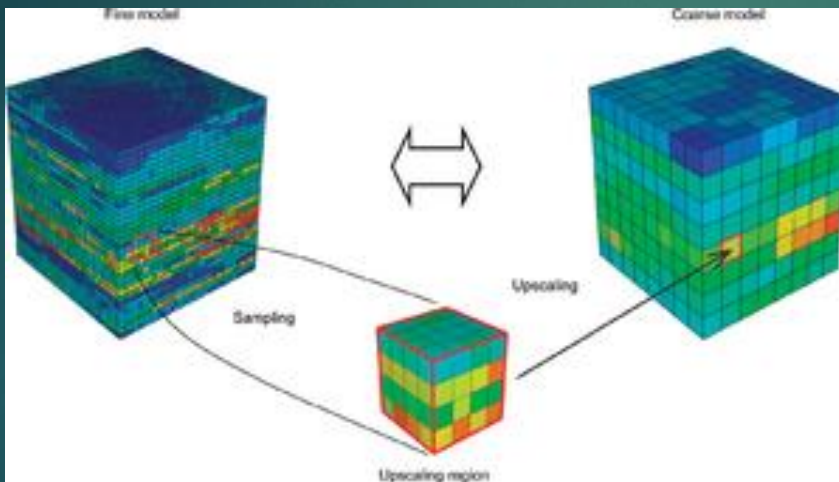
22

- ✓ Revisión del modelo estático
- ✓ Escalamiento
- ✓ Modelo de producción-modelo de presiones
- ✓ Modelo de fluidos-modelo roca-fluidos
- ✓ Inicialización
- ✓ Ajuste histórico (History matching)
- ✓ Predicciones

Etapas del modelo de simulación

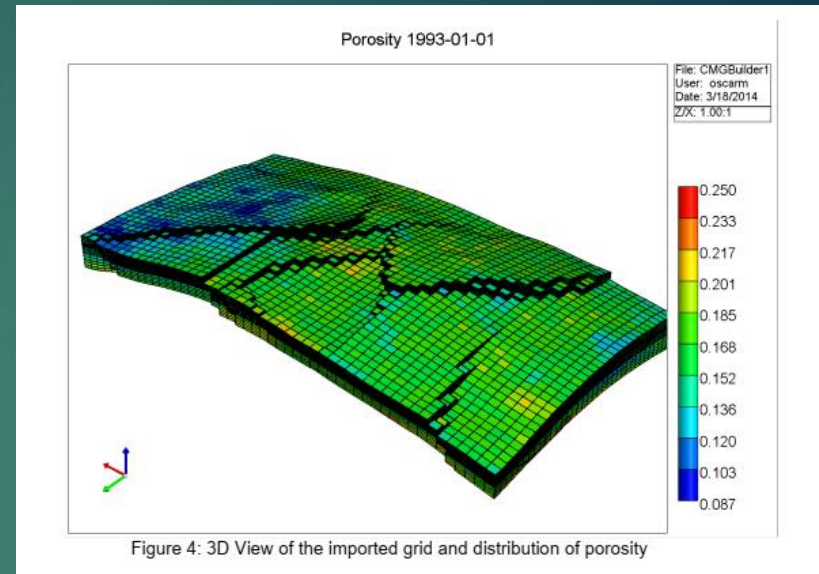
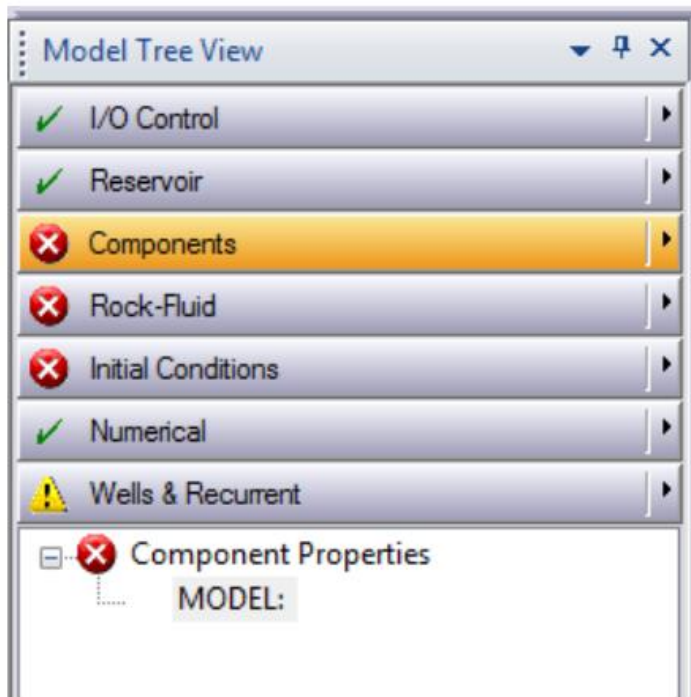
23

✓ Escalamiento



Modelo estático

24

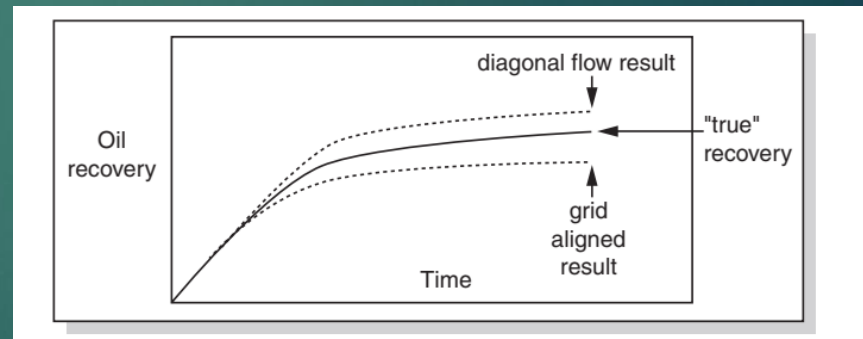
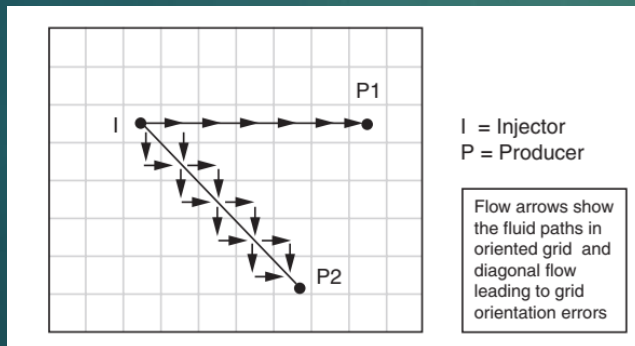
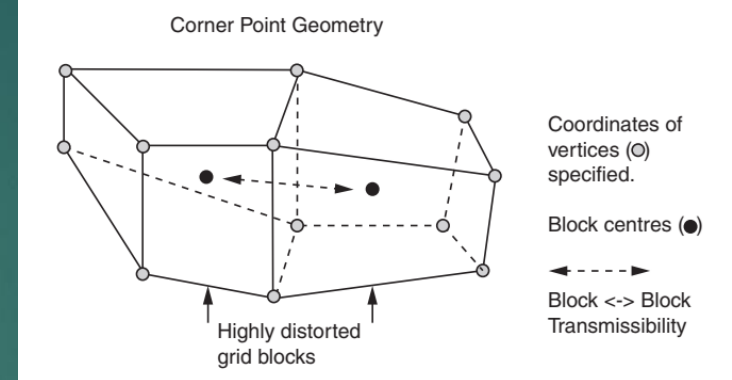
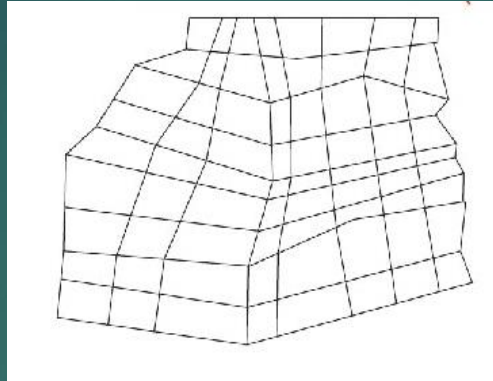
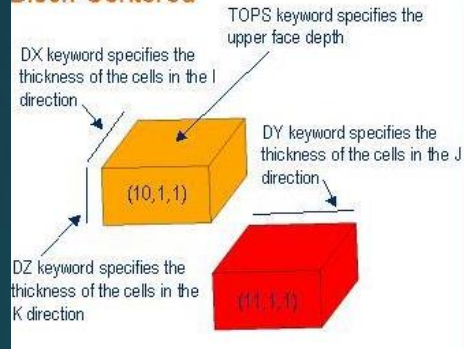


- ✓ Grillado
- ✓ Fallas
- ✓ Porosidad-Permeabilidad

Tipos de mallas

25

Block-Centered



Modelo estático

26

General Property Specification

Edit Specification

Go To Property: Grid Top Use Regions / Sectors

	Grid Top	Grid Thickness	Porosity	Permeability I	Permeability J
UNITS:	ft	ft		md	
SPECIFIED:					
HAS VALUES:					
Whole Grid					
Layer 1					
Layer 2					
Layer 3					
Layer 4					

OK Cancel

Modelo de fluido

27

Type	Typical Form	Source	Usage
Density	$\rho = \rho (P)$	PVT Data	Hydrostatic Gradient Formation Volume Factor
Viscosity	$\mu = \mu (P)$	PVT Data	Transmissibility Terms
Compressibility	$c = c (P)$	PVT Data	Storage Terms Formation Volume Factor
Formation Volume Factor	$B = B (P)$	PVT Data	Transmissibility Terms Source/sink Terms
Solution Gas Ratio	$R_s = R_s (P)$	PVT Data	Transmissibility Terms in Gas Equation
Compressibility Factor	$Z = Z (P)$	PVT Data	Gas Formation Volume Factor

Modelo de fluidos

28

Imex PVT Regions

PVT Region: 1

PVT Table: General Undersaturated Data

PVT Table Type: Oil and gas (PVT) Table Uses: Gas expansion factor (EG)

☒ Include Oil Compressibility in PVT Table
☐ Include Gas-oil Interfacial Tension in PVT Table

Tools

Differential liberation table parameters

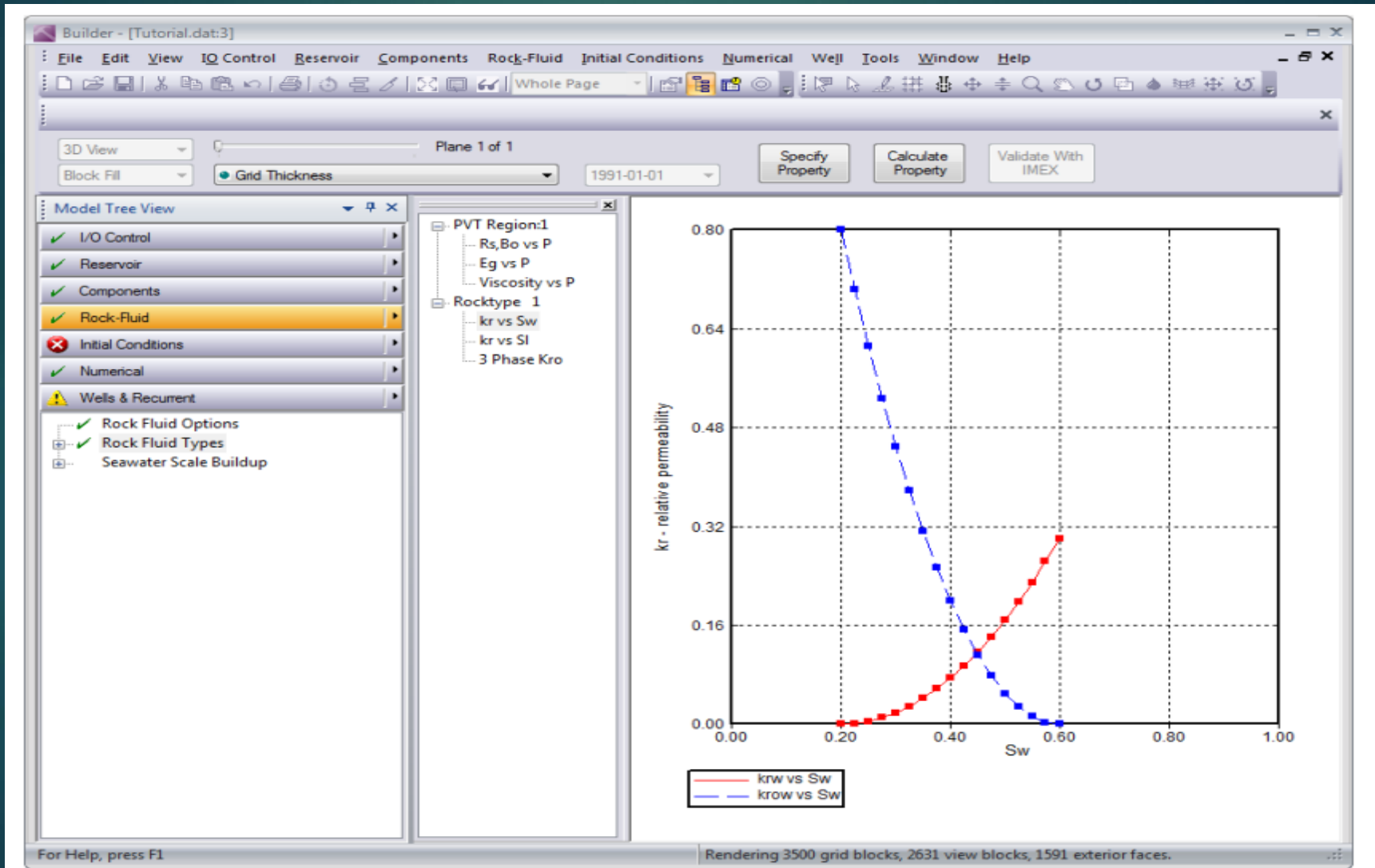
Bubble point pressure:
Oil formation vol. factor:
Solution gas-oil ratio:

#	p	Rs	Bo	Eg	viso	visg	co
	psi	ft3/bbl		ft3/bbl	cp	cp	1/psi
1	14.696	3.81175	1.0455	4.74719	2.54115	0.0124995	3e-005
2	76.5829	11.7208	1.04838	24.906	2.40802	0.0125406	3e-005
3	138.47	20.7473	1.0517	45.3375	2.27452	0.0125947	3e-005
4	200.357	30.5163	1.05532	66.0431	2.1481	0.0126575	3e-005
5	262.244	40.856	1.05918	87.0239	2.03095	0.0127276	3e-005
6	324.131	51.6648	1.06324	108.28	1.92341	0.0128041	3e-005
7	386.018	62.8745	1.06749	129.812	1.82511	0.0128867	3e-005
8	447.905	74.4362	1.07191	151.617	1.73535	0.0129748	3e-005
9	509.791	86.3124	1.07649	173.695	1.65337	0.0130685	3e-005
10	571.678	98.4738	1.08121	196.042	1.57839	0.0131676	3e-005

OK Cancel Apply Help

Modelo roca-fluido

29



Condiciones iniciales

30

Initial Conditions

Perform Gravity-Capillary Equilibrium of A Reservoir Initially Containing

☒ Water, Oil, Gas (VERTICAL DEPTH_AVE WATER_OIL_GAS EQUIL)

☐ Water, Oil (VERTICAL DEPTH_AVE WATER_OIL EQUIL)

☐ Water, Gas (VERTICAL DEPTH_AVE WATER_GAS EQUIL NOTRANZONE)

There will be no residual saturation in Gas Cap (GASZONE NOOIL)

Reference Pressure and Depth

Pressure (REFPRES) 4000 psi

Depth (REFDEPTH) 10007 ft

Phase Contact Depths

Water-Oil Contact (DWOC) 10105 ft

Gas-Oil Contact (DGOC) 6496 ft

Water-Gas Contact (DWGC)

Datum Depth for Output Pressure

Note: This item is optional.

Depth (DATUMDEPTH depth)

Pressure will be corrected using the initial equilibrium pressure distribution (DATUMDEPTH depth INITIAL)

Bubble Point Input Format

☐ Reservoir initially saturated (PB = P)

☒ Constant Bubble Point Pressure (PB) 943 psi

For more options use the Advanced Interface

Advanced

OK Cancel Apply Help

Modelo dinámico-Modelo de pozo

31

Trajectory Perforation Intervals

for selected wells
 export perforations for selected wells
 perforation options for selected wells
 MD values from existing model perforations

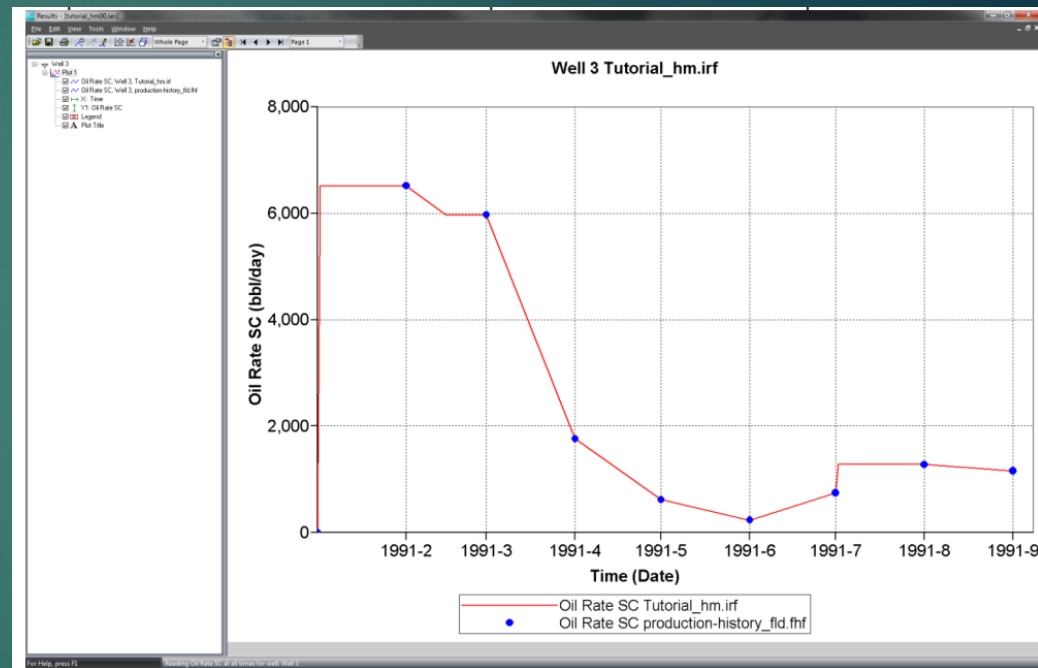
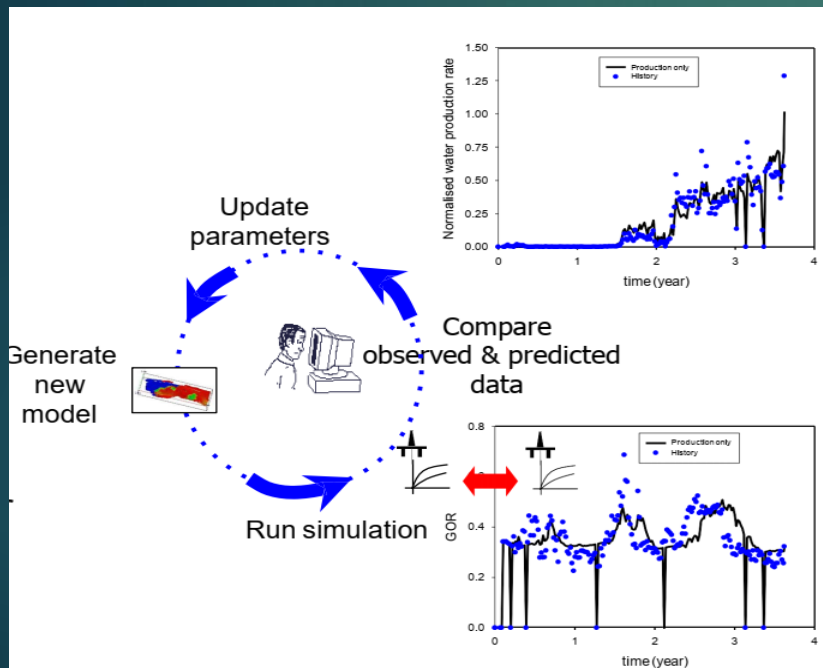
Create well completions from trajectory data

☐ Do not create
☐ Clear existing & create new for selected wells
☒ Preserve existing & create new for selected wells

	Trajectory	Select	Date	MD Start (ft)	MD End (ft)	Status	MD Correctio...	MD Length (ft)	TVD Start (ft)	TVD End (ft)
* 1	Well 1	☒	1991-01-01	9839.377	9922.376	Perforated	0.0	82.999	9839.377	9922.376
				9922.822	10006.66	Perforated	0.0	83.839	9922.822	10006.66
				10008.36	10088.845	Perforated	0.0	80.486	10008.36	10088.845
			1991-07-01	9990.971	10088.845	Cement Sque...	0.0	97.874	9990.971	10088.845
3	Well 10	☒	1991-01-01	9826.378	9911.057	Perforated	0.0	84.678	9826.378	9911.057
				9934.902	9998.327	Perforated	0.0	63.425	9934.902	9998.327
4	Well 2	☒	1991-01-01	9806.624	9895.21	Perforated	0.0	88.586	9806.624	9895.21
				9896.588	9987.894	Perforated	0.0	91.306	9896.588	9987.894
				9990.663	10076.51	Perforated	0.0	85.846	9990.663	10076.51
			1991-07-01	9990.663	10076.51	Cement Sque...	0.0	85.846	9990.663	10076.51
6	Well 3	☒	1991-01-01	9846.687	9912.172	Perforated	0.0	65.486	9846.687	9912.172
				9936.122	9983.596	Perforated	0.0	47.474	9936.122	9983.596
7	Well 4	☒	1991-01-01	9967.061	10012.041	Perforated	0.0	44.98	9967.061	10012.041
				10012.277	10057.71	Perforated	0.0	45.433	10012.277	10057.71
				10069.082	10091.798	Perforated	0.0	22.717	10069.082	10091.798

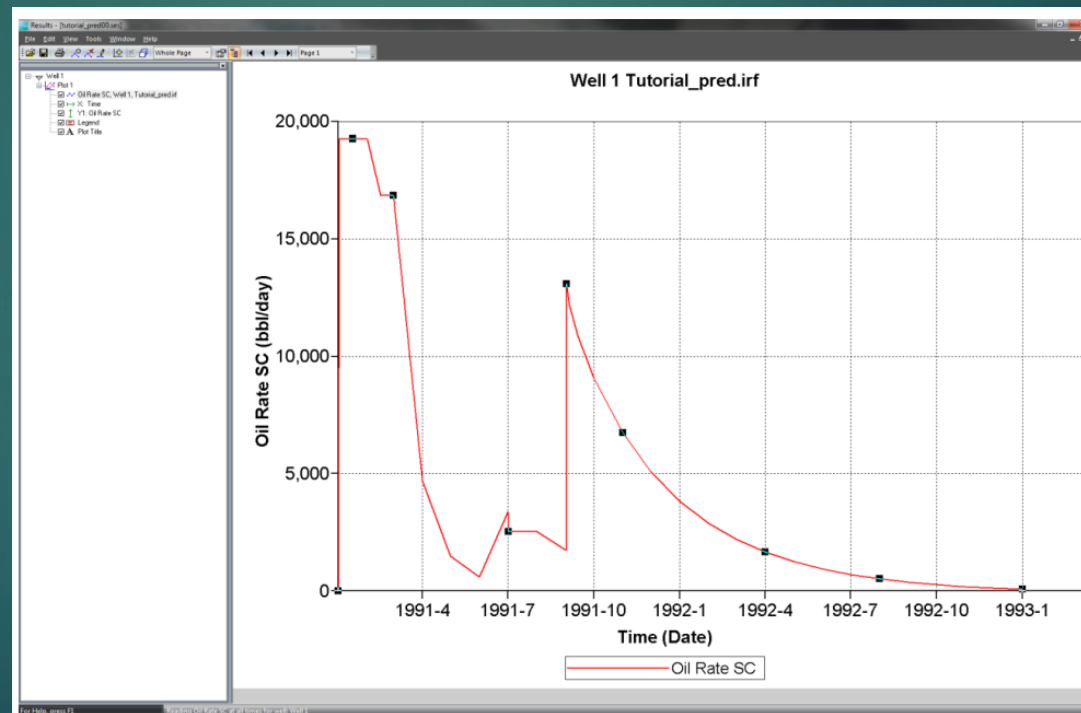
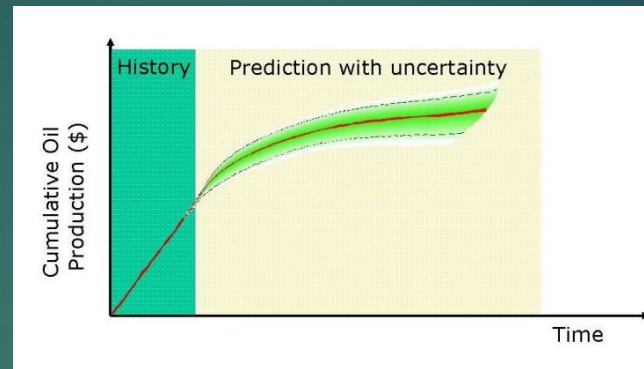
History matching

32



Predicciones

33

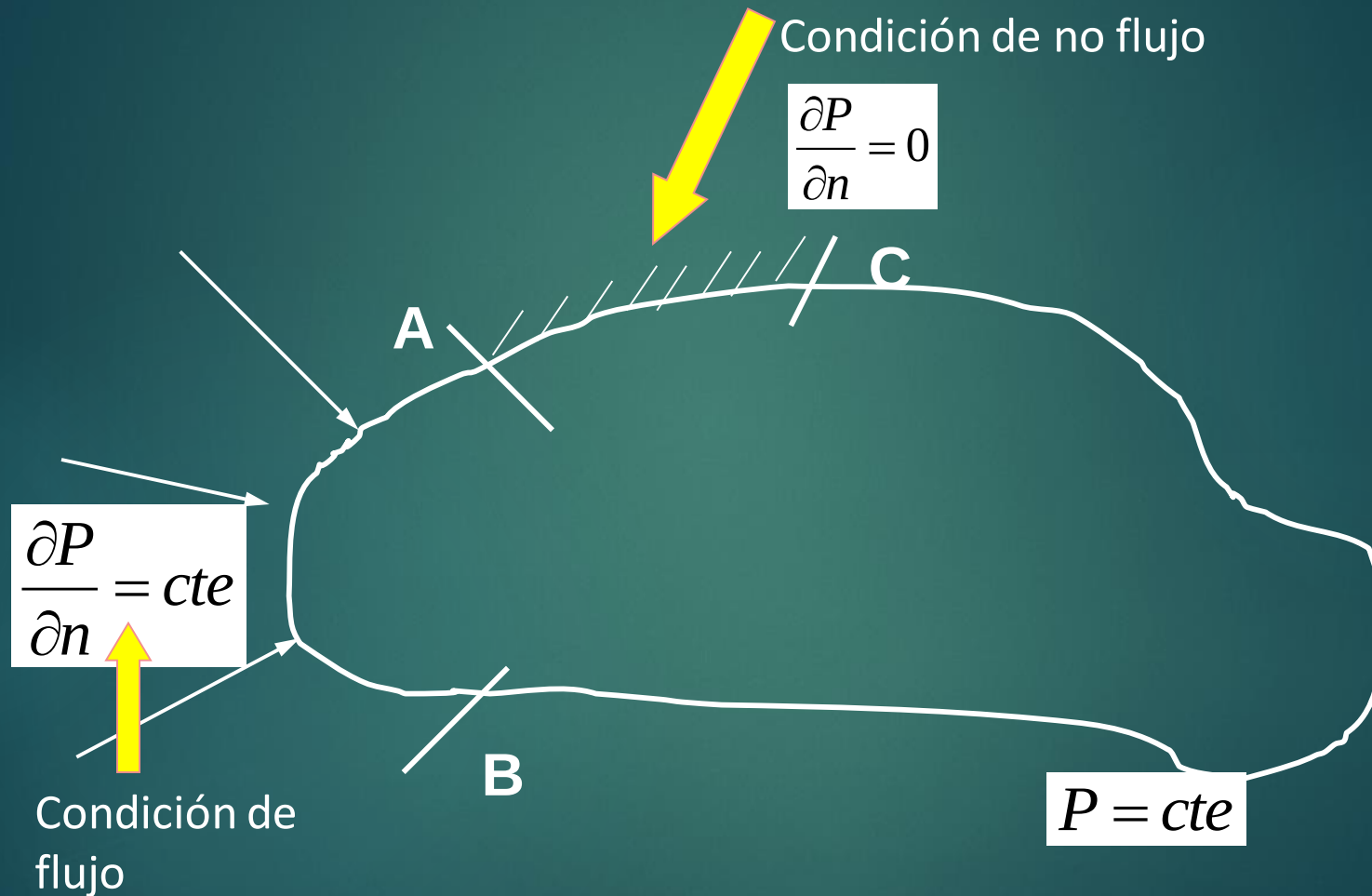


Modelo matemático

Ecuaciones de flujo en medios porosos

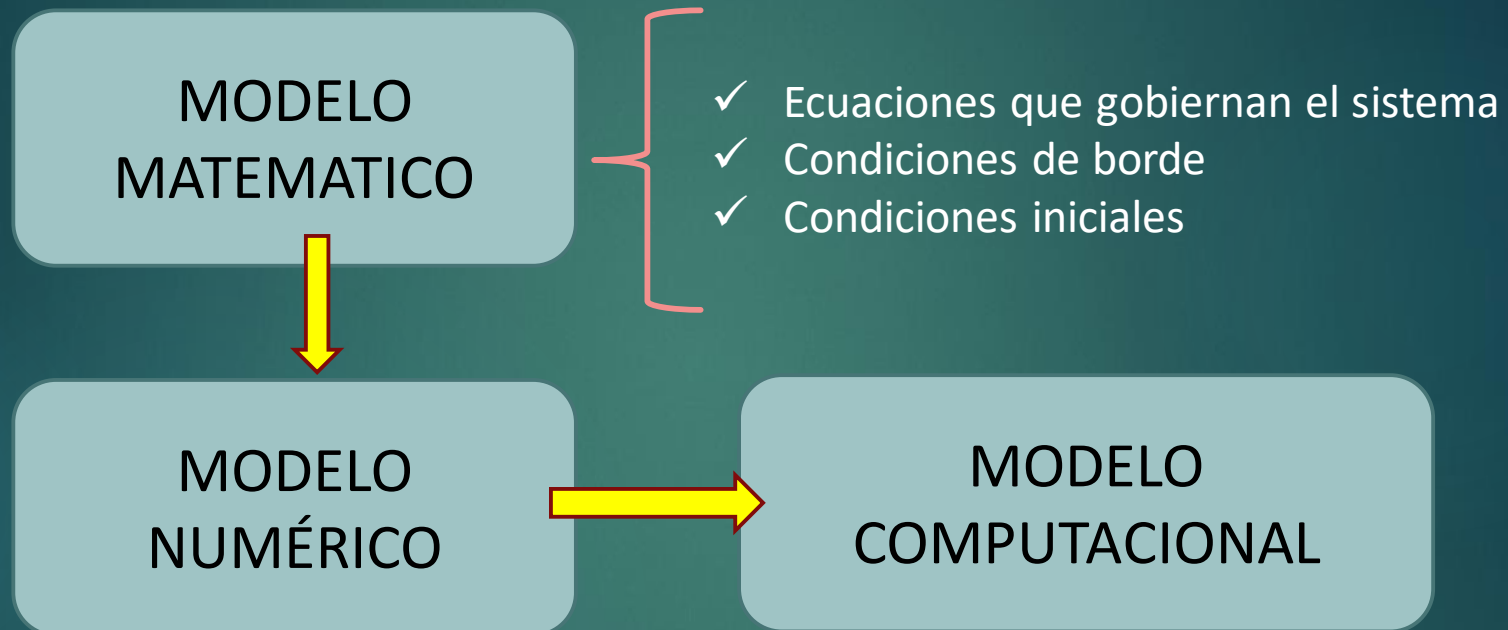
Modelo matemático

35



Modelo matemático

36



Modelo matemático

37

Descripción del
reservorio

Estrategias de
inyección/producción

EDP
CI
CB

Ecuaciones en
diferencias finitas

Ecuaciones
algebraicas

Presión,
Saturación,
Temperatura,
Composición,
etc

Discretización

Linealización

Solución lineal

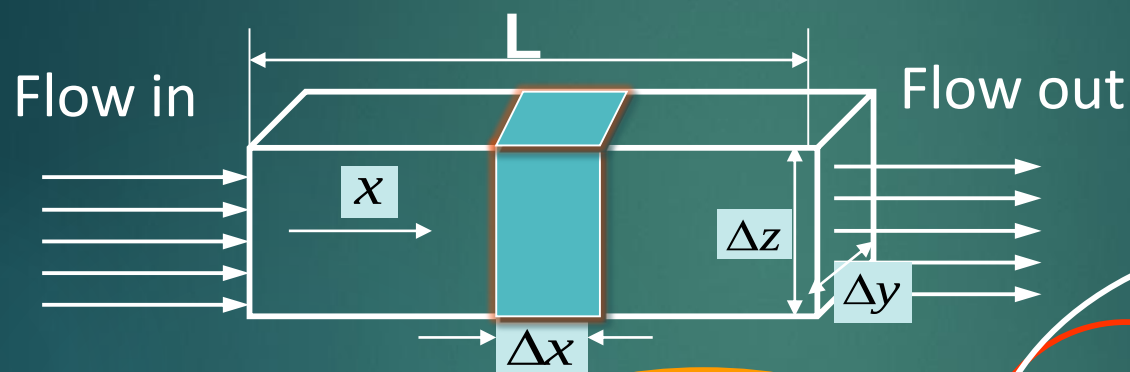
Ecuaciones diferenciales de flujo en medios porosos

38

- ✓ Ley de conservación de masa.
- ✓ Ley de conservación del momento.
- ✓ Ley de conservación de la energía.
- ✓ Ley de Darcy.
- ✓ Ecuaciones de estado.

Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

Caudal másico que entra – caudal másico que sale = caudal de acumulación másico



$$(v_x \rho_x \Delta y \Delta z) - (v_{x+\Delta x} \rho_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z) = \Delta y \Delta z \Delta x \phi \frac{(\rho_{t+\Delta t} - \rho_t)}{\Delta t}$$

Dividiendo por

$$\Delta y \Delta z \Delta x$$

Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

$$\frac{(v_x \rho_x \Delta y \Delta z)}{\Delta y \Delta z \Delta x} - \frac{(v_{x+\Delta x} \rho_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z)}{\Delta y \Delta z \Delta x} = \frac{\Delta y \Delta z \Delta x \phi}{\Delta y \Delta z \Delta x} \frac{(\rho_{t+\Delta t} - \rho_t)}{\Delta t}$$

$$-\frac{(v_{x+\Delta x} \rho_{x+\Delta x}) - (v_x \rho_x)}{\Delta x} = \phi \frac{(\rho_{t+\Delta t} - \rho_t)}{\Delta t}$$

✓ Tomando el límite para

$$\Delta x \text{ y } \Delta t \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{(v_{x+\Delta x} \rho_{x+\Delta x}) - (v_x \rho_x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \phi \frac{(\rho_{t+\Delta t} - \rho_t)}{\Delta t}$$

Ecuación de continuidad en un sistema lineal

$$\frac{\partial(v\rho)}{\partial x} = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

41

- ✓ Para un sistema tridimensional

$$\frac{\partial(v\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial y} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial z} = -\phi \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

42

- ✓ Recordando la ley de Darcy

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$
$$\frac{\partial(v\rho)}{\partial x} = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[- \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \rho \right] = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ecuación de estado

$$\rightarrow \rho = f(P)$$

$$\rho = \rho_0 e^{c(P-P_0)}$$

Fluido poco compresible

$$c = -\frac{1}{V} \left[\frac{dV}{dP} \right]_T$$

Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

44

$$\frac{\partial \left[-\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \rho \right]}{\partial x} = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$-\left[\frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \rho + \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$-\left[\frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \rho + \frac{k}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial P} \left[\frac{\partial P}{\partial x} \right]^2 \right] = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t}$$

Dividiendo ambos miembros por ρ y diferenciando la ecuación de la compresibilidad

Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

$$\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right] = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t}$$



Ecuación de difusividad

Ecuaciones básicas de flujo monofásico. (Modelo Black oil)

- ✓ En coordenadas radiales

$$\left[\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right] = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t}$$

- ✓ En tres dimensiones

$$\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right] = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t}$$

Ecuaciones básicas de flujo multifásico

- ✓ Para el petróleo
 - ✓ Ecuación de continuidad
 - ✓ Ecuación de estado
 - ✓ Ley de Darcy

Ecuaciones básicas de flujo multifásico

Caudal másico que entra –caudal másico que sale= caudal de acumulación másico

$$\left(-\left(A \frac{k_o}{\mu_o B_o} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_x - \left(-\left(A \frac{k_o}{\mu_o B_o} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \right) = V \left[\frac{\left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^{n+1} - \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^n}{\Delta t} \right]$$

Ecuaciones básicas de flujo multifásico

- ✓ Para el gas
 - ✓ Libre
 - ✓ Disuelto en el petróleo
 - ✓ Disuelto en el agua

Ecuaciones básicas de flujo multifásico

50

Caudal másico que entra –caudal másico que sale= caudal de acumulación másico

✓ Gas que entra

$$\left(-A \left(\frac{k_g}{\mu_g B_g} + \frac{R_{so} k_o}{\mu_o B_o} + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \right)_x$$

✓ Gas que sale

$$\left(-A \left(\frac{k_g}{\mu_g B_g} + \frac{R_{so} k_o}{\mu_o B_o} + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

Ecuaciones básicas de flujo multifásico

51

- ✓ Acumulación másica de gas

$$V \left[\frac{\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} \right)^{n+1} - \phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} \right)^n}{\Delta t} \right]$$

- ✓ Al aplicar el balance y pasando al límite

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{k_g}{\mu_g B_g} + \frac{R_{so} k_o}{\mu_o B_o} + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} \right) \right)$$

- ✓ En coordenadas radiales

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{k_g}{\mu_g B_g} + \frac{R_{so} k_o}{\mu_o B_o} + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} \right) \right)$$

Ecuaciones básicas de flujo multifásico

52

✓ Para el agua

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_w}{\mu_w B_w} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)$$

✓ Para coordenadas radiales

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_w}{\mu_w B_w} \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)$$

Ecuación general de flujo multifásico

53

$$S_o + S_w + S_g = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (S_o + S_w + S_g) = 0$$

$$P_{C_{ow}} = P_o - P_w$$

$$P_{C_{og}} = P_g - P_o$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)^2 \approx 0$$

Ecuación general de flujo multifásico

54

$$Ax \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_o \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) + Ax \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_g \frac{\partial P_{cg}}{\partial x} - \lambda_w \frac{\partial P_{cw}}{\partial x} \right) +$$
$$Ax \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_g \frac{(\rho_g gh)}{\partial x} + \lambda_o \frac{(\rho_o gh)}{\partial x} + \lambda_w \frac{(\rho_w gh)}{\partial x} \right) = \beta_1 \frac{\partial P_o}{\partial t} + \beta_2$$

Propiedades PVT

Producción

Modelo numérico

Ecuaciones de flujo en medios porosos

Discretización en espacio y tiempo

56

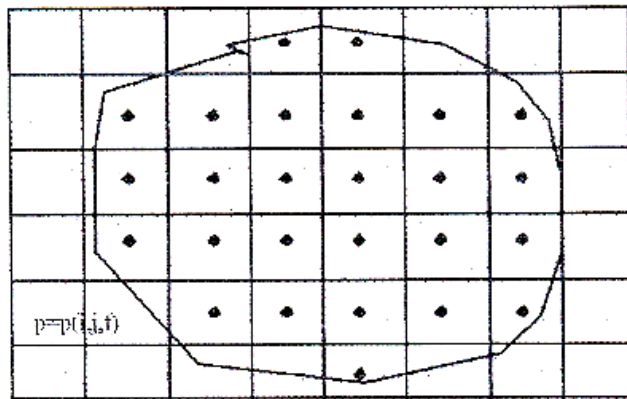


Fig.1:Sistema discreto

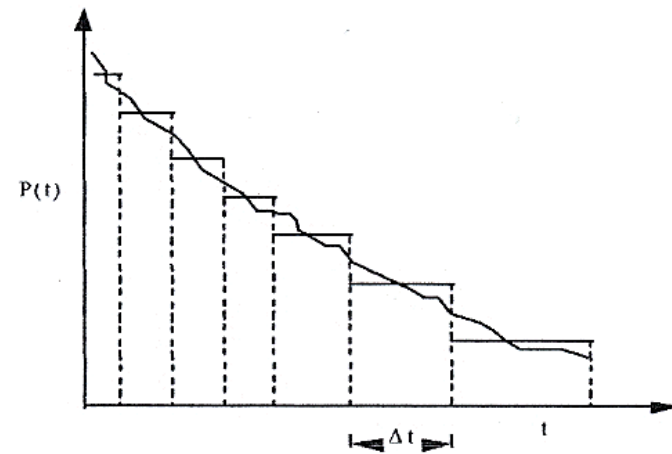


Fig.2:Discretización en el tiempo

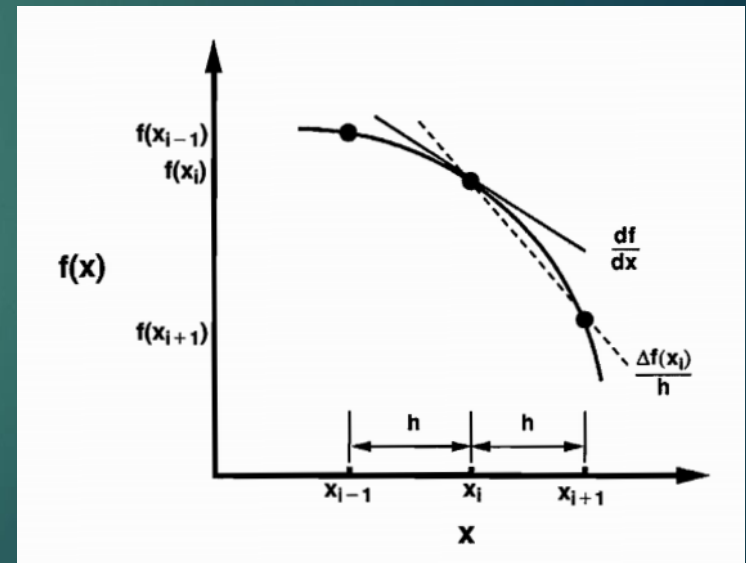
Cociente de diferencias de primer orden

57

$$P(x + \Delta x) = P(x) + \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) + \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$



$$P' = \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} + r(\Delta x)$$



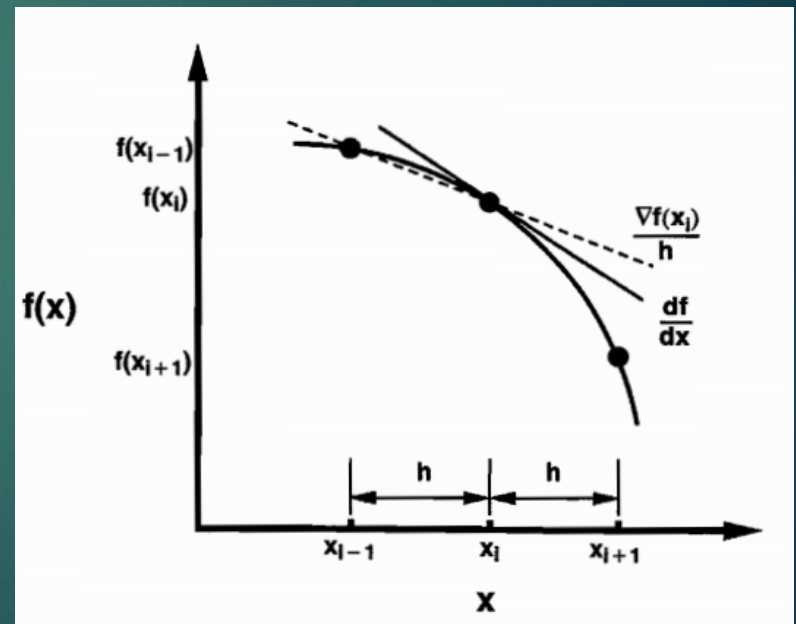
Cociente de diferencias de primer orden

58

$$P(x - \Delta x) = P(x) - \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) - \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$



$$P' = \frac{P(x) - P(x - \Delta x)}{\Delta x} + r(\Delta x)$$

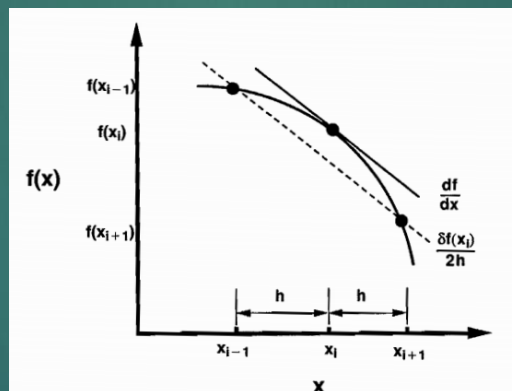


Diferencias centrales

✓ Restando

$$P(x + \Delta x) = P(x) + \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) + \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$

$$P(x - \Delta x) = P(x) - \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) - \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$



$$P' = \frac{P(x + \Delta x) - P(x - \Delta x)}{2\Delta x} + r(\Delta x^2)$$

Cociente de diferencias de segundo orden

✓ Sumando

$$P(x + \Delta x) = P(x) + \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) + \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$

$$P(x - \Delta x) = P(x) - \Delta x P'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 P''(x) - \frac{1}{6} \Delta x^3 P'''(x) + \dots$$

$$P'' = \frac{P(x + \Delta x) - 2P(x) + P(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + r(\Delta x^2)$$

Ejemplo

61

$$\frac{d \operatorname{sen}(\pi / 4)}{dx}$$

i	x_i	(deg)	sen	$\cos$
1	0	0	0	
2	$\pi / 12$	15	0.2588	
3	$\pi / 6$	30	0.5000	
4	$\pi / 4$	45	0.7071	0.7071
5	$\pi / 3$	60	0.8660	
6	$5\pi / 12$	75	0.9654	
7	$\pi / 2$	90	1.0000	

EJEMPLO

62

Diferencia hacia adelante

$$\left. \frac{d \sin(\pi / 4)}{dx} \right|_i = \frac{0.8660 - 0.7071}{\pi / 3 - \pi / 4} = 0.6070 \quad \varepsilon = 14.2\%$$

Diferencia hacia atrás

$$\left. \frac{d \sin(\pi / 4)}{dx} \right|_i = \frac{0.7071 - 0.5000}{\pi / 4 - \pi / 6} = 0.7911 \quad \varepsilon = 11.9\%$$

Diferencia central

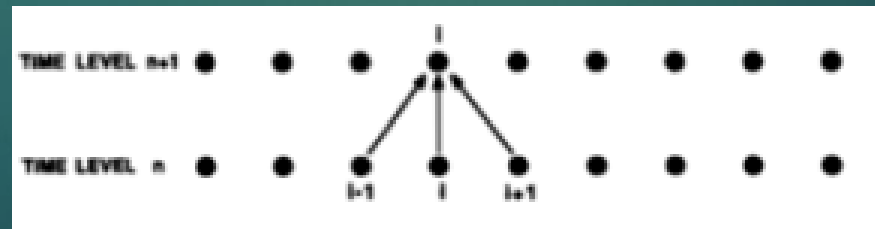
$$\left. \frac{d \sin(\pi / 4)}{dx} \right|_i = \frac{0.8660 - 0.5000}{\pi / 3 - \pi / 6} = 0.6990 \quad \varepsilon = 1.15\%$$

Soluciones explícitas e implícitas

63

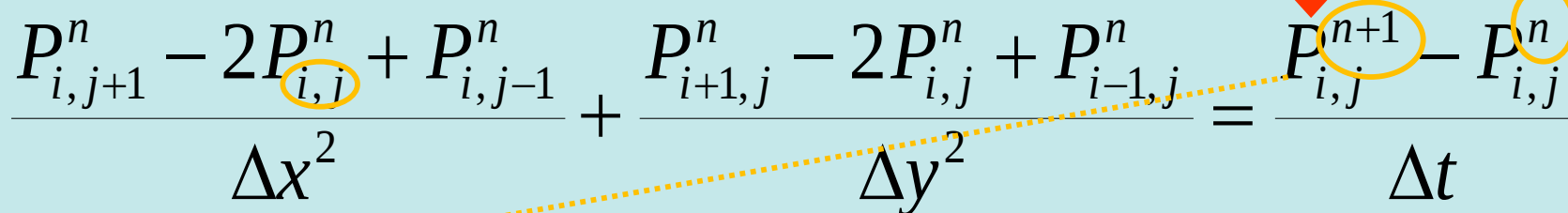
$$t_1 \longrightarrow t_2$$

- ✓ Esquema explícito: los nuevos valores pueden calcularse “individualmente” para cada x .
- ✓ Esquema implícito: Se calculan simultáneamente todos los valores de x .



Método explícito

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial t}$$



$$\frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} = \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t}$$

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + \Delta t \left[\frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} \right]$$

Método explícito

65

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + \Delta t \left[\frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} \right]$$

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + \alpha [P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n] + \beta [P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n]$$

$$\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\beta = \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$$

Método implícito

66

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{P_{i+1}^{n+1} - 2P_i^{n+1} + P_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t}$$

Método implícito

67

$$P_{i-1}^{n+1} - \left(2 + \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \right) P_i^{n+1} + P_{i+1}^{n+1} = \frac{\Delta x^2}{\Delta t} P_i^n$$

$$a_i P_{i-1} + b_i P_i + c_i P_{i+1} = d_i$$

Método implícito

68

$$1 \quad a_1 P_0 - b_1 P_1 + c_1 P_2 = d_1$$

$$2 \quad a_2 P_1 - b_2 P_2 + c_2 P_3 = d_2$$

$$3 \quad a_3 P_2 - b_3 P_3 + c_3 P_4 = d_3$$

.....

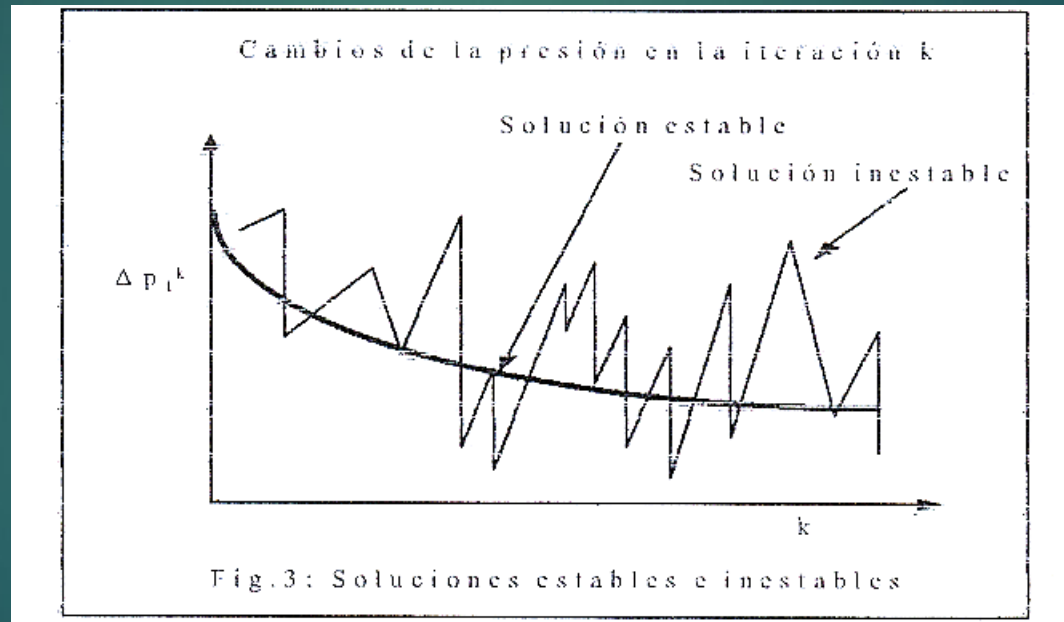
$$N \quad a_N P_{N-1} - b_N P_N + c_N P_{N+1} = d_N$$

Estabilidad

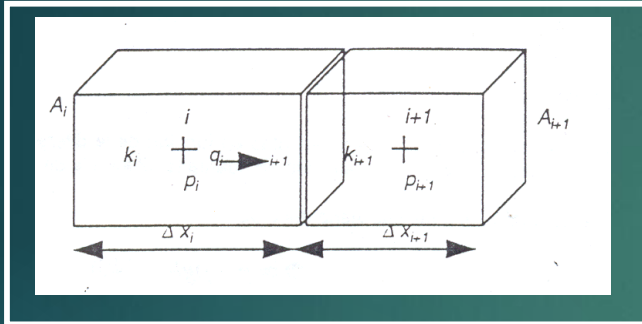
69

$$\mu_{\max} = \frac{|\varepsilon^{n+1}|}{|\varepsilon^n|} \leq 1 \Rightarrow \text{sol. estable}$$

$$\mu_{\max} = \frac{|\varepsilon^{n+1}|}{|\varepsilon^n|} \geq 1 \Rightarrow \text{sol. inestable}$$



Flujo entre dos bloques contiguos 70



$$q_i \rightarrow_{i+1} = \frac{A_i k_i}{\mu_i} \frac{(p_i - p_{i+1/2})}{\Delta x_i / 2}$$

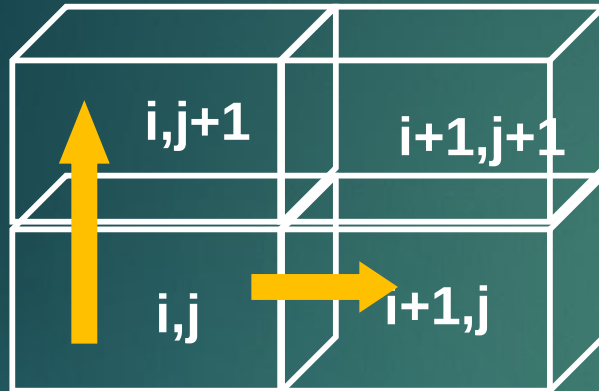
$$q_i \rightarrow_{i+1} = \frac{A_{i+1} k_{i+1}}{\mu_{i+1}} \frac{(p_{i+1/2} - p_{i+1})}{\Delta x_{i+1} / 2}$$

$$q_i \rightarrow_{i+1} = T_{i+1/2} (p_i - p_{i+1})$$

$$T_{i+1/2} = \frac{2 A_i A_{i+1} k_i k_{i+1}}{A_i k_i \Delta x_{i+1} + A_{i+1} k_{i+1} \Delta x_i} \cdot \frac{1}{\mu}$$

Flujo entre dos bloques contiguos

71



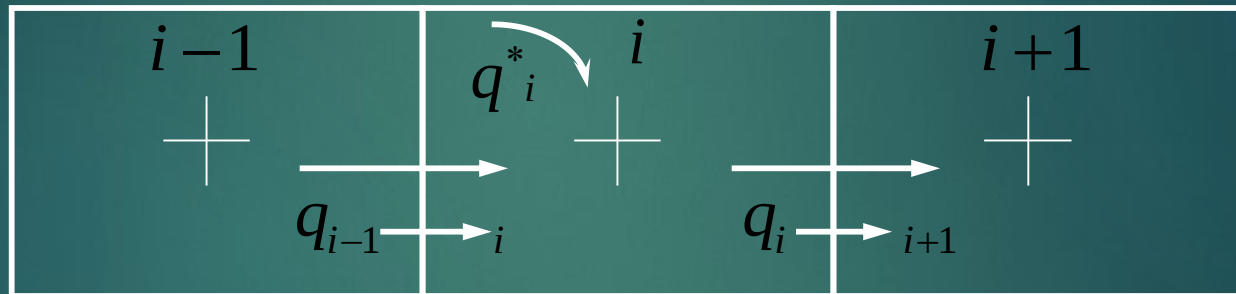
$$T_{i+1/2,j} = \frac{2A_{i,j}A_{i+1,j}k_{i,j}k_{i+1,j}}{A_{i,j}k_{i,j}\Delta x_{i+1,j} + A_{i+1,j}k_{i+1,j}\Delta x_{i,j}} \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$q_{i,j} \rightarrow_{i,j+1} = T_{i,j+1/2}(p_{i,j} - p_{i,j+1})$$

$$T_{i,j+1/2} = \frac{2A_{i,j}A_{i,j+1}k_{i,j}k_{i,j+1}}{A_{i,j}k_{i,j}\Delta x_{i,j+1} + A_{i,j+1}k_{i,j+1}\Delta x_{i,j}} \cdot \frac{1}{\mu}$$

Ecuación de flujo para fluido incompresible unidimensional

Caudal másico que entra – caudal másico que sale = caudal de acumulación másico



Por ser un fluido incompresible no hay cambio neto de masa en el tiempo

➡ Caudal másico que entra - caudal másico que sale = 0

Ecuación de flujo para fluido incompresible unidimensional

$$\rho_{sc} q_{i \rightarrow i+1} - \rho_{sc} (q_{i-1 \rightarrow i} + q_i^*) = 0$$

$$\Phi = p - \rho g h$$

$$T_{i+1/2}(\Phi_i - \Phi_{i+1}) - T_{i-1/2}(\Phi_{i-1} - \Phi_i) - q_i^* = 0$$

$$T_{i+1/2}(\Phi_{i+1} - \Phi_i) - T_{i-1/2}(\Phi_i - \Phi_{i-1}) + q_i^* = 0$$

FIN