Análisis Matemático I
Clase 3: concepto de límite, cálculo de límites y teorema de la compresión

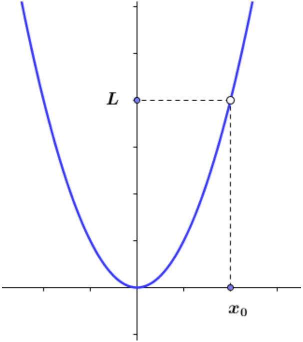
Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2023

Objetivo de la clase 3:
se espera que el estudiante comience a familiarizarse con la idea intuitiva de límite y que aplique técnicas analílicas (factorización, racionalización, teorema de la compresión, etc.) para el cálculo de límites.

Observar que en algunas situaciones, podemos responder los interrogantes sobre el comportamiento de una función a través de su gráfica. Por ejemplo:



Entonces, si nos preguntamos cuál es la tendencia de f cuando x se acerca cada vez más a x_0, diríamos que los valores de f tienden a L. En símbolos, vamos a escribir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

y leemos: el límite (es decir, la tendencia) de f cuando x tiende a x_0 es L.

Concepto intuitivo de límite

Por otro lado, cuando disponemos de la fórmula de la función es posible intentar obtener el comportamiento de la función cerca de x_0 dándole valores a la variable independiente x cada vez más cercanos a x_0 y evaluándolos en la función. Por ejemplo, consideremos la función:

$$f : (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Supongamos que queremos saber cuál es la tendencia de f cuando x tiende a $x_0 = 1$. Observar que no podemos evaluar f directamente en 1 pues este número no pertenece al dominio de f. Lo que haremos es construir una tabla de valores apropiada.

Concepto intuitivo de límite

x	$f(x)$
0,9	1.9
0,99	1.99
0,999	1.999
1,1	2.1
1,01	2.01
1,001	2.001
1,0001	2.0001

Tabla: Valores de f cuando x tiende a 1.

Observar que los valores que se eligen deben estar cada vez más cerca de $x_0 = 1$, tanto por derecha como por izquierda. Además, excluímos el punto $x_0 = 1$ de la tabla.

Concepto intuitivo de límite

En conclusión, diríamos que la tendencia de f cuando x se acerca cada vez más a $x_0 = 1$ es 2. En símbolos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

Sin embargo, tanto el enfoque gráfico como el numérico (tabla) presentan limitaciones para calcular límites. En el primer caso, cuando la función a analizar presenta un gráfico complejo o que no se puede determinar con claridad, resulta difícil encontrar el límite con este método. En el caso de la tabla de valores, darle solamente algunos valores a la variable independiente, cercanos al punto de análisis, no garantiza que el límite sea la tendencia observada en la tabla. Por ende, es necesario recurrir a herramientas analíticas que nos permitan obtener respuestas exactas.

Concepto intuitivo de límite

Comenzaremos con la definición informal de límite:

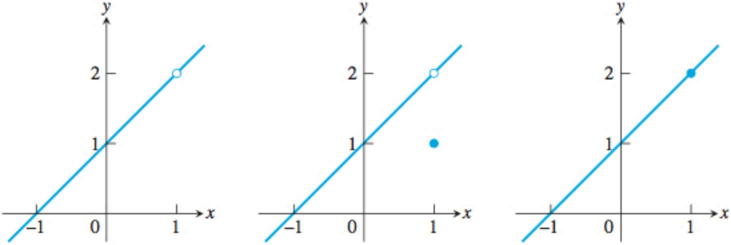
Definición informal de límite

Supongamos que f está definida en un intervalo abierto alrededor de x_0, excepto posiblemente en el punto x_0. Si los valores $f(x)$ de la función f están arbitrariamente cercanos a un número L, para toda x suficientemente cercana al punto x_0, decimos que f tiende a L cuando x tiende a x_0, y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Concepto intuitivo de límite: ejemplos

Estudiar el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a 1.



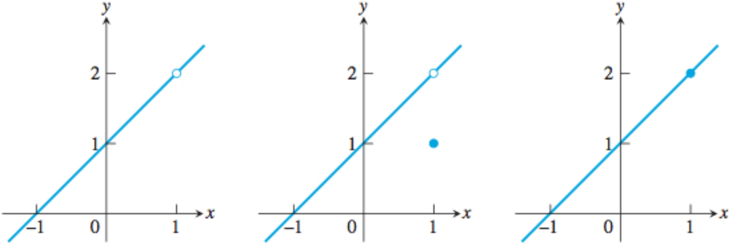
(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = x + 1$

Concepto intuitivo de límite: ejemplos

Estudiar el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a 1.



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

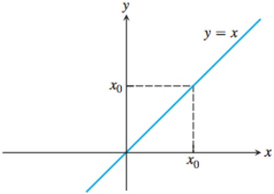
(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = x + 1$

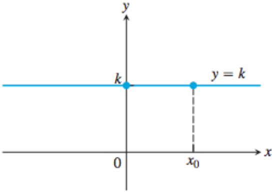
¡En todos los ejemplos, el límite considerado es 2!

Observación importante: el límite de una función cuando la variable independiente tiende a un valor x_0 puede existir sin que la función esté definida en el punto x_0. Es decir, para calcular límites, no es relavante si la función está definida o no en el punto de interés!!!.

Funciones identidad y constante

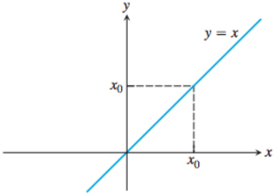


(a) Función identidad

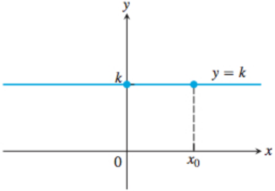


(b) Función constante

Funciones identidad y constante



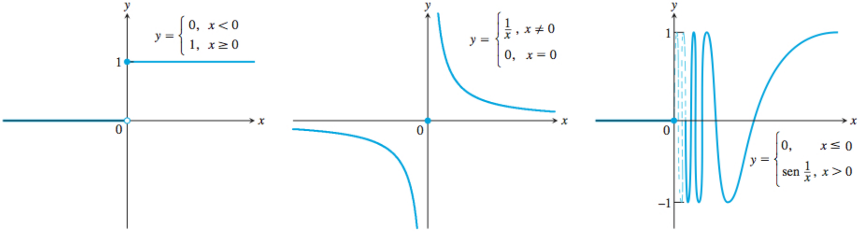
(a) Función identidad



(b) Función constante

En el primer caso $\lim_{x \to x_0} x = x_0$ y en el segundo $\lim_{x \to x_0} k = k$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

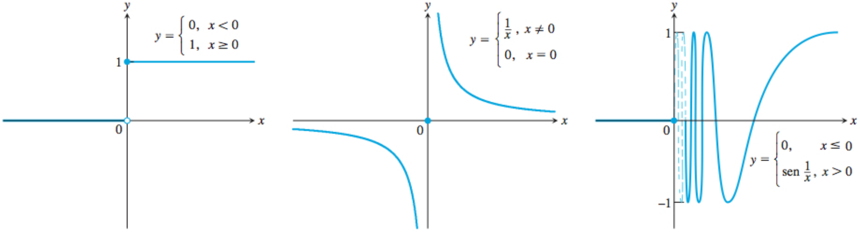
Más ejemplos: analizar si existe o no el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a 0.



(a) Función escalón unitario $U(x)$ (b) $g(x)$ (c) $f(x)$

Concepto intuitivo de límite

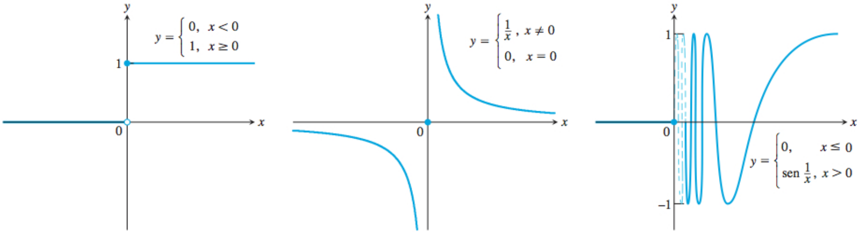
Más ejemplos: analizar si existe o no el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a 0.



(a) Función escalón unitario $U(x)$ (b) $g(x)$ (c) $f(x)$

(a) El límite $\lim_{x \to 0} U(x)$ no existe pues cuando x se acerca a 0 por la izquierda (valores negativos), la función $U(x)$ vale siempre 0, mientras que cuando x se acerca a 0 por la derecha (valores positivos), la función $U(x)$ vale siempre 1. Como los valores de la función U no se acercan a un número para todo x suficientemente cercano a 0, el límite estuadiado no existe.

Concepto intuitivo de límite



(a) Función escalón unitario $U(x)$ (b) $g(x)$ (c) $f(x)$

(b) El límite $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe pues cuando x tiende a 0 por la derecha los valores de la función $y = g(x)$ se hacen arbitrariamente grandes. Así, los valores de g no se acercan a un determinado valor cuando x tiende a 0.

(c) Las oscilaciones de la función f cuando x tiende a 0 por la derecha hacen que los valores de la función no se acerquen a un determinado valor. Luego, $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

Propiedades de los límites

Teorema

Supongamos que los límites:

$$\lim_{x\to c} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to c} g(x), \text{ existen.}$$

Entonces:

- $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$.
- $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$.
- Si $k \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to c}(k \cdot f(x)) = k \lim_{x\to c} f(x)$.
- $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$.
- Si $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$.
- $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$, n es un entero positivo.
- $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, n es un entero positivo. Cuando n es par, se pide que el límite de f sea no negativo.

Consecuencias: cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$$

Además, si P y Q son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Propiedades de los límites

Consecuencias: cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$$

Además, si P y Q son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Pregunta. ¿Qué sucede si $Q(c) = 0$?

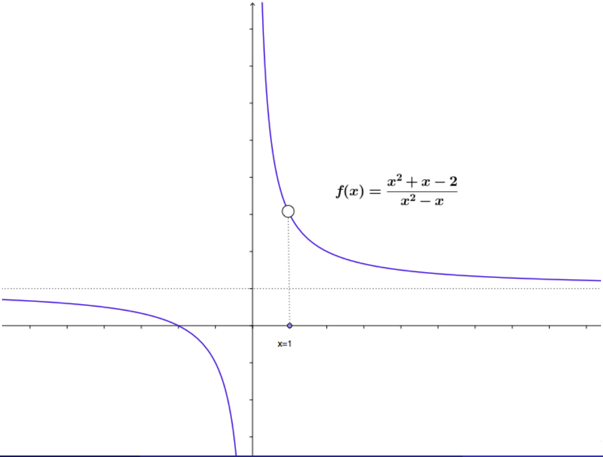
Ejemplo: calcular

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}.$$

Ejemplo: calcular

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}.$$

Observar que la función no está definida ni en 0 ni en 1:



Observar que el denominador:

$$x^2 - x$$

se anula en $x = 1$ (el punto de análisis del límite). Por ende, para calcular el límite no se puede reemplazar directamente por $x = 1$ en el cociente. Sin embargo, se puede eliminar el problema mediante factorización:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x}.$$

Observar que en el último caso, el denominador no se anula en $x = 1$. Por ende podemos reemplazar en el último cociente x por 1 y obtener:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{1+2}{1} = 3.$$

Ejemplo (a desarrollar en la práctica): calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}.$$

Ejemplo (a desarrollar en la práctica): calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}.$$

Observar que el denominador se anula cuando $x = 0$. Luego, para resolver el límite no se puede reemplazar directamente x por 0. Vamos a racionalizar el numerador:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{(\sqrt{x^2+100}-10)}{x^2} \cdot \frac{(\sqrt{x^2+100}+10)}{(\sqrt{x^2+100}+10)} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10} = \frac{1}{20}.$$

Un límite trigonométrico útil

Teorema

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen }\theta}{\theta} = 1.$$

La demostración de este resultado se verá en el capítulo 7.

Un límite trigonométrico útil

Teorema

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\ \theta}{\theta} = 1.$$

La demostración de este resultado se verá en el capítulo 7.

Ejemplo 1: compruebe que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

Un límite trigonométrico útil

Teorema

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\ \theta}{\theta} = 1.$$

La demostración de este resultado se verá en el capítulo 7.

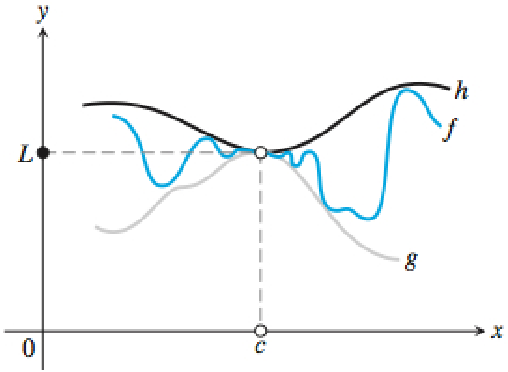
Ejemplo 1: compruebe que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

Ejemplo 2: determine el siguiente límite

$$\lim_{t \to 0} \frac{\tan\ t \sec\ 2t}{3t}.$$

Comencemos con la siguiente situación:



Teorema de la Compresión

Teorema de la compresión.

Sea I un intervalo abierto que contiene a un punto c. Supongamos que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq c$ en I. Si:

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Teorema de la compresión

Ejemplo: Utilizando la siguiente información:

$$-|x| \leq \ \text{sen } x \leq |x|,$$

compruebe que:

$$\lim_{x \to 0} \ \text{sen } x = 0.$$

Teorema de la compresión

Ejemplo: Utilizando la siguiente información:

$$-|x| \leq \text{ sen } x \leq |x|,$$

compruebe que:

$$\lim_{x \to 0} \text{ sen } x = 0.$$

Solución: Observar que:

$$\lim_{x \to 0} -|x| = 0 \quad \text{ y } \quad \lim_{x \to 0} |x| = 0,$$

Teorema de la compresión

Ejemplo: Utilizando la siguiente información:

$$-|x| \leq \text{ sen } x \leq |x|,$$

compruebe que:

$$\lim_{x \to 0} \text{ sen } x = 0.$$

Solución: Observar que:

$$\lim_{x \to 0} -|x| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} |x| = 0,$$

luego el teorema de la compresión implica:

$$\lim_{x \to 0} \text{ sen } x = 0.$$