Análisis Matemático I
Clase 5: teorema del valor intermedio y asíntotas

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2023

Objetivo de la clase:
se espera que el estudiante complete la comprensión de las propiedades básicas de límites y continuidad y las aplique al análisis de algunos aspectos de las funciones.

Límites laterales

La siguiente es una propiedas que vincula los conceptos de límite lateral y límite:

Teorema

El límite:

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

existe si y solo si los límites laterales

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

existen y son iguales a L.

Propiedades de las funciones continuas: Teorema del Valor Intermedio

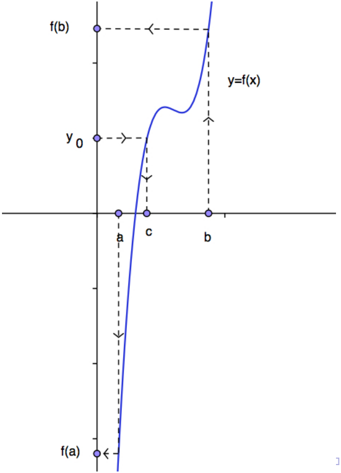
Motivación:

- ¿Existe x tal que:
$$x^5 - 10x^2 + 3x - 1 = 0?$$
- ¿Existe x tal que la ecuación:
$$\sqrt{2x+5} = 4 - x^2$$
se satisface?

Teorema del valor intermedio

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Sea y_0 un número real entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$f(c) = y_0.$$



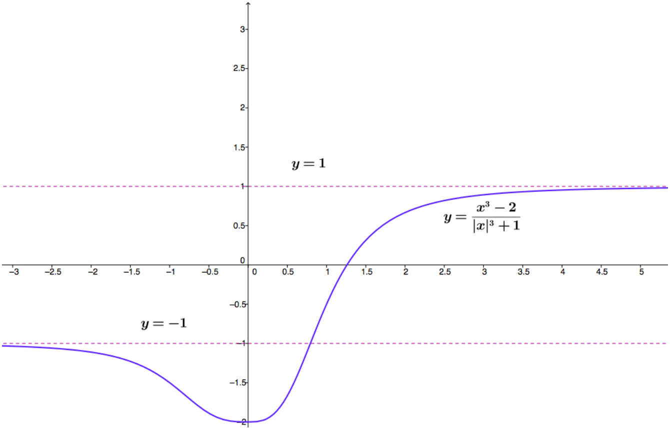
Teorema del valor intermedio

Ahora podemos aplicar el Teorema del Valor Intemedio para la resolución de las preguntas de motivación. Más adelante veremos otras aplicaciones del teorema.

- ¿Existe x tal que:
$$x^5 - 10x^2 + 3x - 1 = 0?$$
Introducimos la función:
$$f(x) = x^5 - 10x^2 + 3x - 1$$
que es continua en $\mathbb{R}$. Observar que:
$$f(0) < 0 \quad \text{y} \quad f(3) > 0.$$
Tomando $y_0 = 0$ en el teorema del valor intermedio, se tiene la existencia de $c \in [0, 3]$ tal que:
$$f(c) = 0.$$
Así, $x = c$ resuelve la ecuación:
$$x^5 - 10x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Asíntotas horizontales

Considere el siguiente gráfico:



La distancia (vertical) entre las imágenes de $y = \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$ **y de la recta** $y = 1$ **tiende a cero a medida que** x **se hace cada vez mayor.**

Asíntotas horizontales

Definición de Asíntota Horizontal

Decimos que la recta horizontal $y = b$ es una asíntota horizontal de la función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b,$$

o:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Observación: los dos límites anteriores se pueden escrbir como:

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x) - b| = 0,$$

o:

$$\lim_{x \to -\infty} |f(x) - b| = 0.$$

Así, la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de $y = f(x)$ si la distancia entre b y los valores de la función $f(x)$ tiende a cero cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

Asíntotas horizontales

Ejemplo: determine las asíntotas horizontales de:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}.$$

Solución: cuando se desea obtener un límite de la forma:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios, entonces se divide el numerador y el denominador por x elevada al grado del denominador. Este procedimiento permite eliminar potencias y simplificar los términos. Apliquemos lo anterior para calcular el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}.$$

Asíntotas horizontales

Primero observe que como $x \to +\infty$, se tiene que $|x| = x$ y entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{x^3 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x^3 - 2}{x^3}}{\dfrac{x^3 + 1}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \dfrac{2}{x^3}}{1 + \dfrac{1}{x^3}}.$$

Cuando x tiende a $+\infty$, los cocientes:

$$\frac{1}{x^3} \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{x^3}$$

tienden a cero. Así:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = 1.$$

Por lo tanto, $y = 1$ es una asíntota horizontal de f.

Asíntotas horizontales

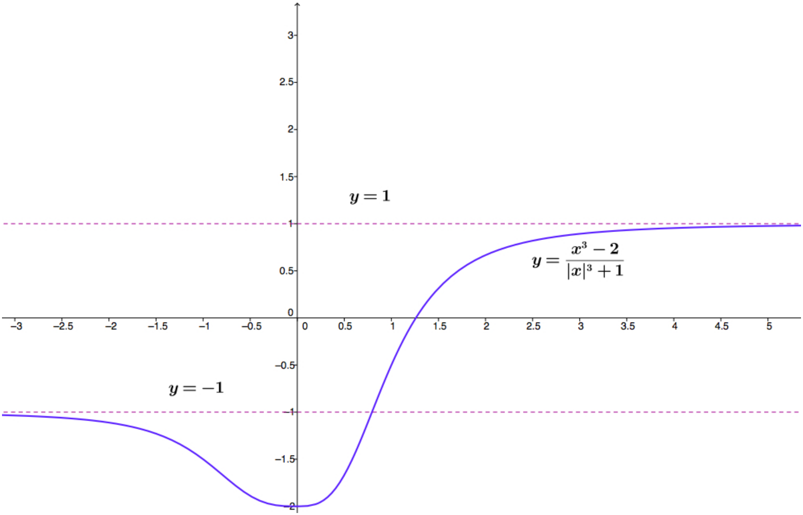
En forma similar y observando que cuando $x \to -\infty$ el valor absoluto de x es $-x$, se obtiene:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{|x|^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{(-x)^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{-x^3+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\dfrac{2}{x^3}}{-1+\dfrac{1}{x^3}} = \frac{1-0}{-1+0} = -1.$$

Así, $y=-1$ es otra asíntota horizontal de f.

Asíntotas horizontales



Observar que la gráfica de una función puede cortar a la asíntota.

Asíntotas verticales

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

- $$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} =$$

Asíntotas verticales

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

- $$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Asíntotas verticales

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

- $$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

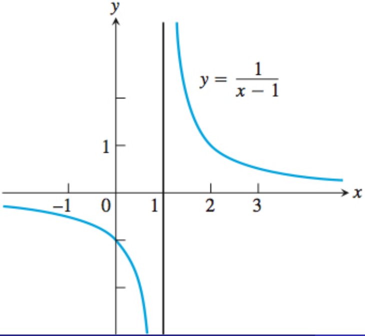
- $$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} =$$

Asíntotas verticales

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

- $$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

- $$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$



Asíntotas verticales

Definición de Asíntota Vertical

Decimos que $x = a$ es una asíntota vertical de la función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty (\text{ o } -\infty)$$

o:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty (\text{ o } -\infty).$$

Así, la función:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 1$.

Ejemplo. Encontrar las asíntotas verticales de:

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}.$$

Solución. Primero buscamos los puntos de discontinuidad de la función. Como f es una función racional, los puntos de discontinuidad se dan donde el denominador en la expresión de f se anula. En este caso:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Ahora vamos a estudiar que pasa con los límites laterales en $x = 1$ y $x = 2$. Comenzamos con $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2}{(x - 1)(x - 2)}.$$

Cuando $x \to 1^-$, el producto $(x - 1)(x - 2)$ es positivo y tiende a cero. Luego, si dividimos 2 por $(x - 1)(x - 2)$, el resultado es positivo pero cada vez más grande.

Asíntota vertical

Así:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{(x-1)(x-2)} = +\infty.$$

Por lo tanto, $x = 1$ es una asíntota vertical. No es necesario ver que el otro límite lateral cuando $x \to 1^+$ tambien es infinito, ya que en la definición de asíntota vertical tenemos disyunciones.
Para $x = 2$ tenemos:

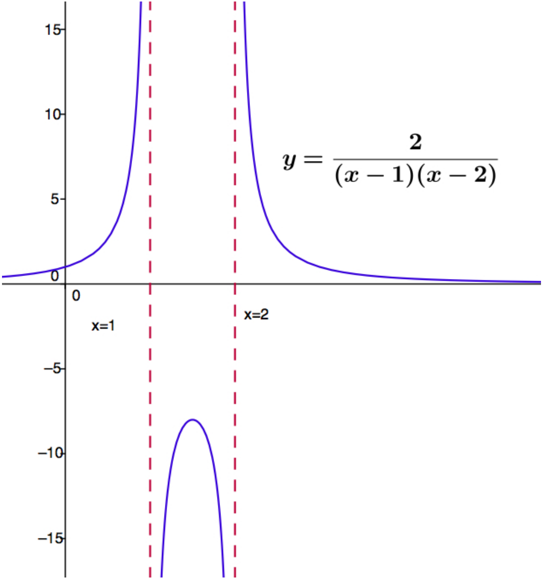
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2}{(x-1)(x-2)}.$$

Razonando como en el caso anterior, se concluye que:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x^2-3x+2} = -\infty.$$

Así, $x = 2$ es asíntota vertical de f.

Asíntota vertical



Asíntota oblicua

Asíntota oblicua

Una recta $y = ax + b$, con $a \neq 0$, es una asíntota oblicua de la función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

o:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Ejemplo: determine la asíntota oblicua de:

$$y = \frac{x^2 - 3}{2x - 4} \qquad \text{(aplicar división de polinomios)}$$

Asíntota oblicua

Para determinar la asíntota oblicua de:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

aplicamos división de polinomios.

Asíntota oblicua

Para determinar la asíntota oblicua de:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

aplicamos división de polinomios.
Recordar que si P y Q son polinomios, entonces:

$$P(x) = C(x)Q(x) + R(x),$$

donde R es el resto y C el cociente de la división. Dividiendo por $Q(x)$, se obtiene:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Asíntota oblicua

Volviendo a:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4},$$

tenemos:

$$R(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad C(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

Por lo tanto:

$$\frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

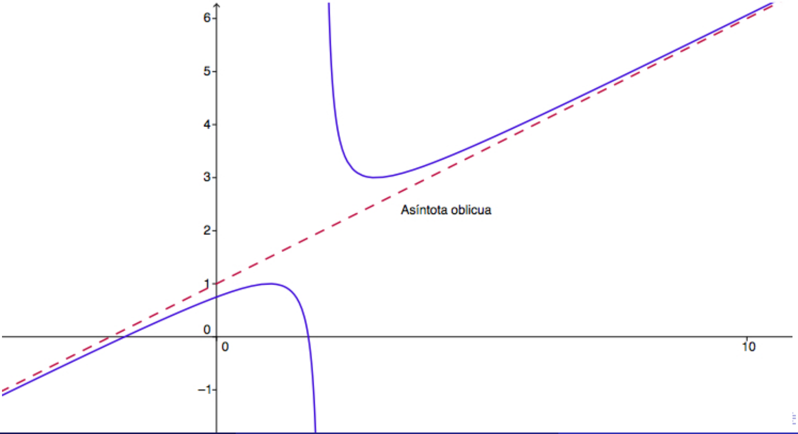
$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2x - 4}.$$

Asíntota oblicua

Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x-4}=0$$

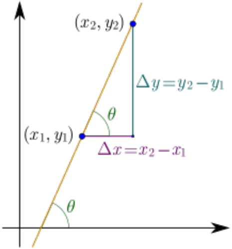
por lo que la recta $y=1/2x+1$ cumple la definición de asíntota oblicua.



Introducción al concepto de derivada (sólo turno tarde)

Pendiente de una recta

Recordar:



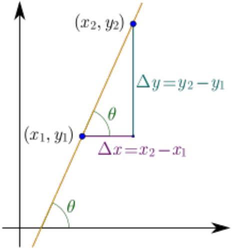
Pendiente de la recta:

$$m = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observar que la pendiente de una recta es la misma en cada punto de la misma.

Pendiente de una recta

Recordar:



Pendiente de la recta:

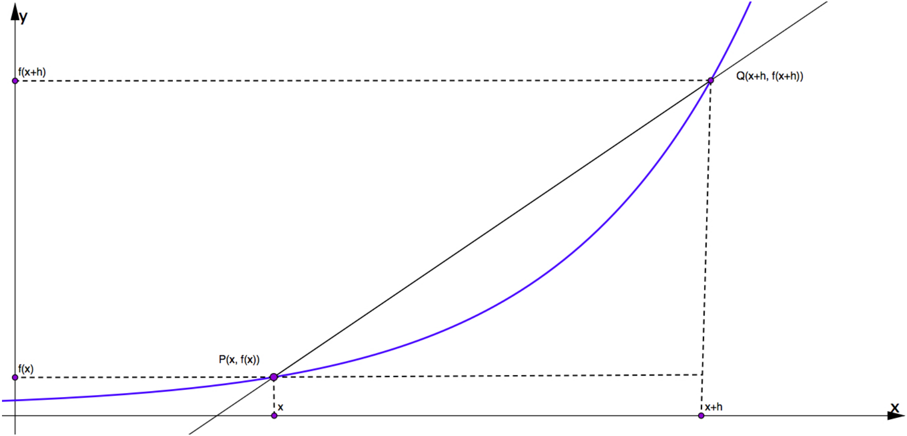
$$m = \tan\,\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observar que la pendiente de una recta es la misma en cada punto de la misma.

Ahora, ¿cómo se determina la pendiente de una curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ de dicha curva?

Ahora bien, dada una curva suave $y = f(x)$, queremos definir el concepto de pendiente en cualquier punto $P(x, f(x))$ de dicha curva. Para ello, realizamos el siguiente procedimiento.

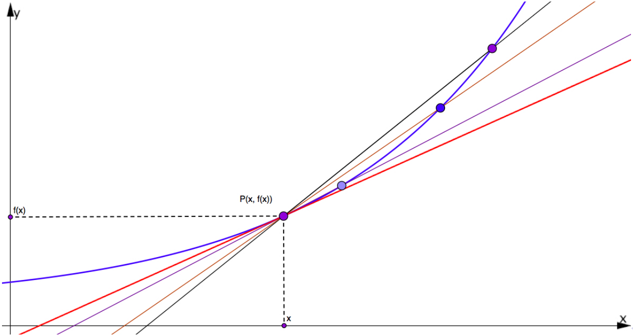
Primer paso: se escoge un punto $Q(x + h, f(x + h))$ cercano a $P(x, f(x))$ y se traza la recta que une a dichos puntos. Esta recta se llama recta secante.



Segundo paso: calcular la pendiente de la recta secante. Dicha pendiente m es:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

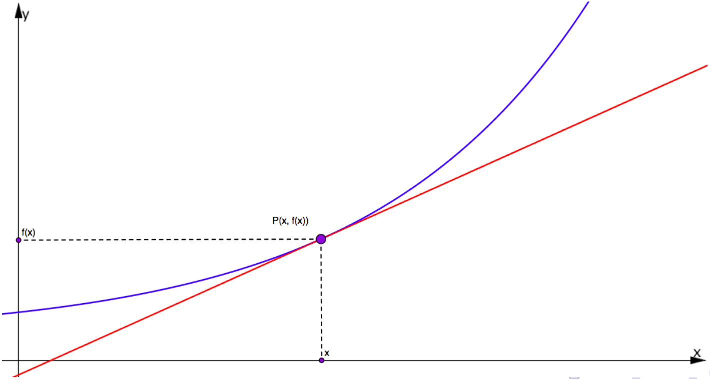
Tercer paso: como lo indica la siguiente figura, a medida que el punto Q se acerca al punto P, es decir, cuando $h \to 0$, las rectas secantes parecen tender a la recta roja (recta tangente).



La pendiente m de la recta roja será el límite de las pendientes de las rectas secantes cuando $h \to 0$, siempre y cuando dicho límite exista. Es decir:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

En el siguiente gráfico se ilustra sólo la recta roja:



Pendiente de una curva en un punto

Pendiente de una curva en un punto

La pendiente de una curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ se define como sigue:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Pendiente de una curva en un punto

Pendiente de una curva en un punto

La pendiente de una curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ se define como sigue:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Observar que el cociente:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

es la pendiente de la recta secante que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ **y** $(x_0 + h, f(x_0 + h))$**.**

Pendiente de una curva, ejemplo.

Ejemplo: Determine la pendiente de la curva $y = \frac{1}{x}$ cuando $x = -1$.

Pendiente de una curva, ejemplo.

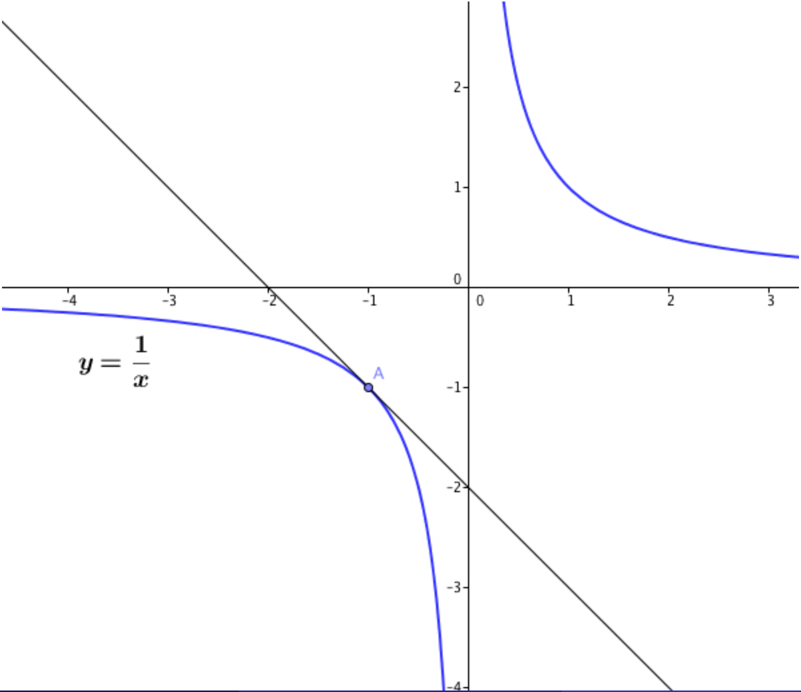
Ejemplo: Determine la pendiente de la curva $y = \frac{1}{x}$ cuando $x = -1$.
Solución: observar que:

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{-1+h} - \dfrac{1}{-1}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{(-1+h)(-1)}}{h} = \frac{-1}{(-1+h)(-1)}.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(-1+h)(-1)} = -1.$$

Luego, la pendiente de la curva en $x = -1$ es -1.



2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
$y = \dfrac{1}{x}$
A

Pendiente de la recta tangente

Recordar:

Definición de recta tangente

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ **en el punto** $(x_0, f(x_0))$ **es aquella recta que tiene pendiente:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(siempre que el límite exista)}$$

y pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Pendiente de la recta tangente

Recordar:

Definición de recta tangente

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ **en el punto** $(x_0, f(x_0))$ **es aquella recta que tiene pendiente:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(siempre que el límite exista)}$$

y pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Dado que el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

aparece con mucha frecuencia, recibe un nombre especial.

Derivada de una función

La derivada de una función f en un punto $x = x_0$ se simboliza como $f'(x_0)$ y se obtiene como:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Así:

En resumen

[Derivada de f en x_0]= [Pendiente de la curva $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$]= [Pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$] = [Tasa de cambio instantánea de f en x_0]