EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

EMPUJE

Es la fuerza aplicada sobre un cuerpo debida a la presión del liquido sobre el mismo, ya sea que el mismo se encuentre **sumergido** o conteniendo el fluido.

PRINCIPO DE ARQUÍMEDES

"Todo cuerpo sumergido en una masa líquida recibe un empuje de abajo hacia arriba en dirección vertical y cuya intensidad es igual el peso del volumen de líquido desalojado".

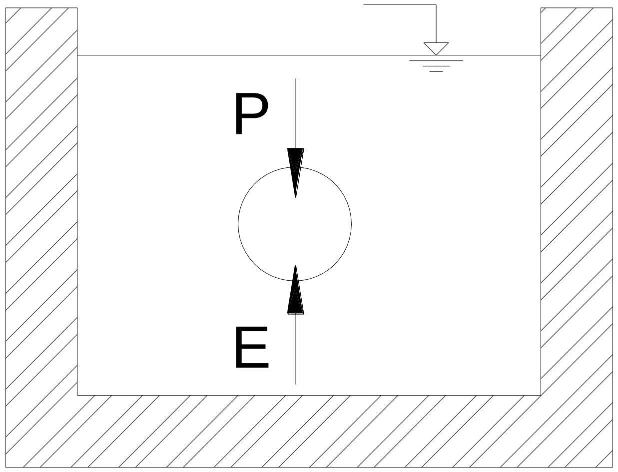
$$\boxed{E_V = \gamma . V}$$

Válido siempre y cuando se acepte que la capilaridad es despreciable y las presiones resultan normales a las superficies (como si el sólido no estuviera)

→ Las presiones son las mismas que si el sólido no existiera

El punto de aplicación es el centro de gravedad del volumen de líquido desalojado, ***"centro de carena"***, y a la superficie sumergida de los cuerpos flotantes se la denomina ***carena***. La intersección de la superficie del agua con el cuerpo es la ***superficie de flotación.***

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES



$$\left\{\begin{array}{l} P = \gamma_C \times V_{Cuerpo} \\ E = \gamma_L \times V_{Carena} \end{array}\right\}$$

Si el cuerpo esta totalmente sumergido.

$$\left\{\begin{array}{l} P = \gamma_C \times V_C \\ E = \gamma_L \times V_C \end{array}\right\} \frac{P}{E} = \frac{\gamma_C}{\gamma_L}$$

peso del cuerpo → centro de gravedad

empuje → centro de carena

COINCIDENCIA: cuerpo es homogéneo y totalmente sumergido.

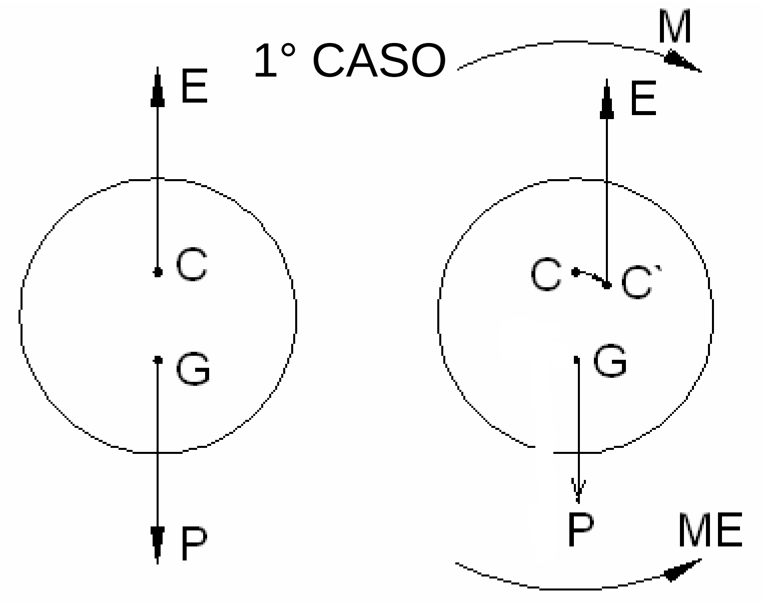
PRIMERA CONDICION DE EQUILIBRIO: centro de carena y de gravedad del cuerpo alineados sobre una misma vertical. No hay rotación.

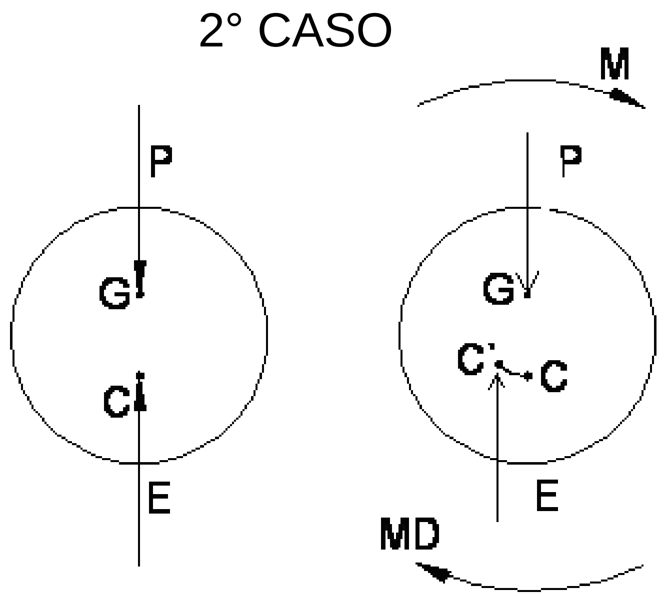
- **Cuando P>E $\Rightarrow \gamma_C > \gamma_L$ el cuerpo se hunde.**
- **Cuando P=E $\Rightarrow \gamma_C = \gamma_L$ se ubicará en cualquier punto de la masa líquida.**
- **Cuando P<E $\Rightarrow \gamma_C V_{cuerpo} < \gamma_L V_{carena}$ el cuerpo flota, dejando parte del mismo fuera del agua.**

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

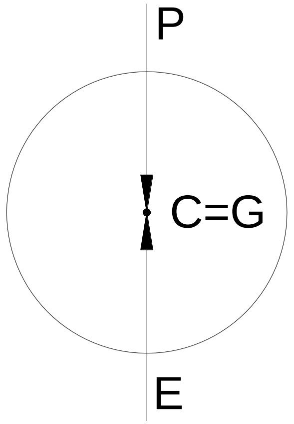
CUERPO TOTALMENTE SUMERGIDO

ESTABILIDAD: 3 TRASLACIONES 3 GIROS GIROS EJES X e Y





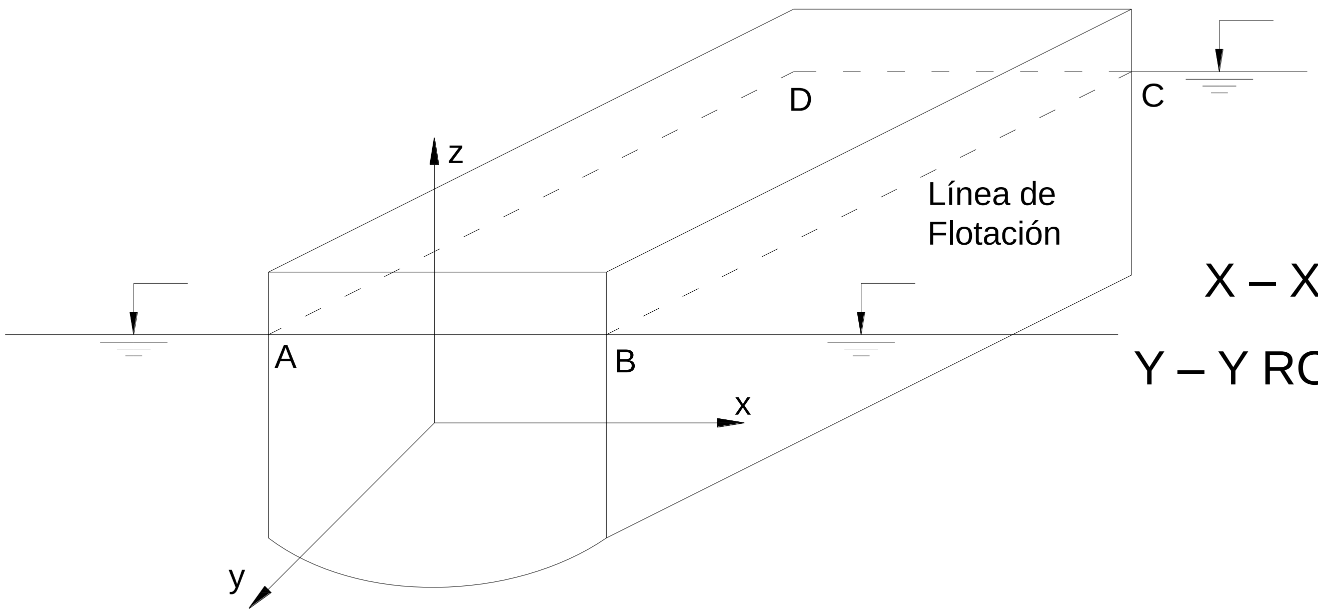
3° CASO



“PARA QUE EXISTA EQUILIBRIO ESTABLE, EL CENTRO DE CARENA DEBE UBICARSE POR ENCIMA DEL CENTRO DE GRAVEDAD DEL CUERPO”.

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

CUERPO PARCIALMENTE SUMERGIDO



EMBARCACIONES

G encima C

X – X CABECEO

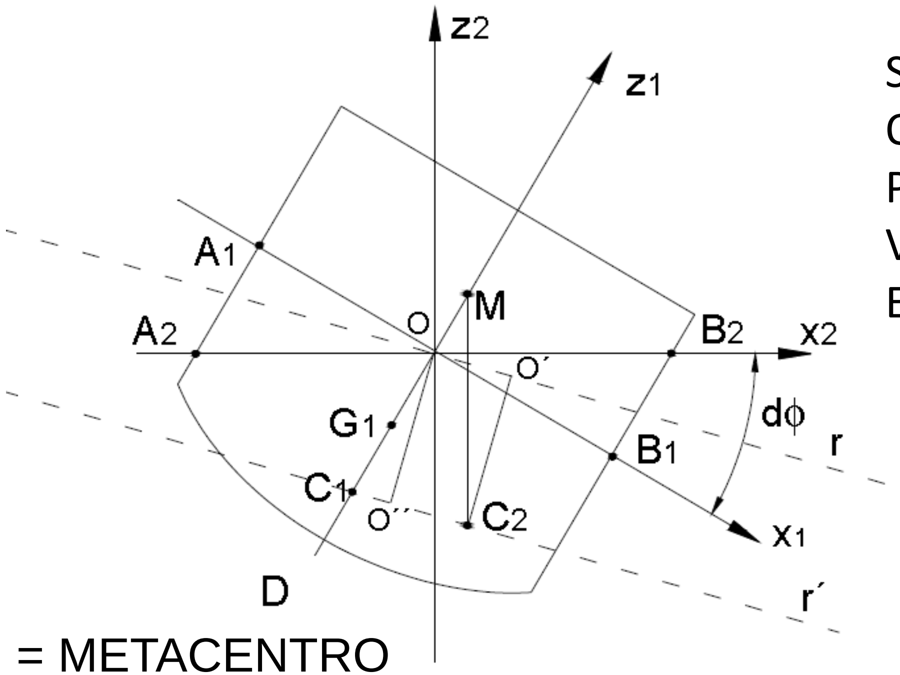
Y – Y ROLIDO + DESFAVORABLE

$$\omega_1 = A_1 B_1 D$$
$$\omega_2 = A_2 B_2 D$$

Los volúmenes V se transforman en superficies de carena ω

$$\omega_{h_1} = A_1 O A_2$$
$$\omega_{h_2} = B_1 O B_2$$

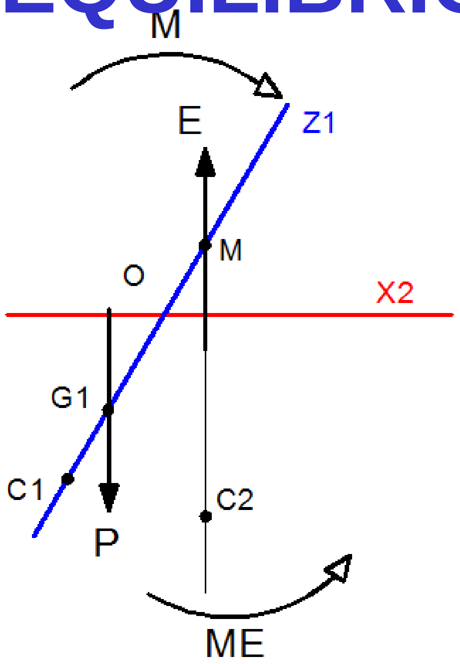
SUP DE HUSOS



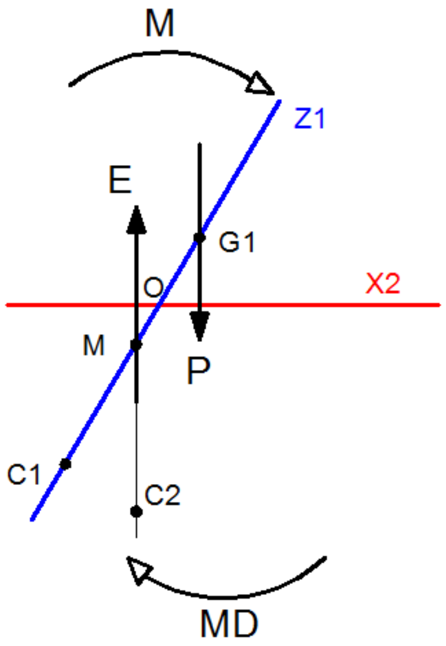
M = METACENTRO

SUPONEMOS QUE NO PRESENTA VARIACIONES EN EL EJE "Y"

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES



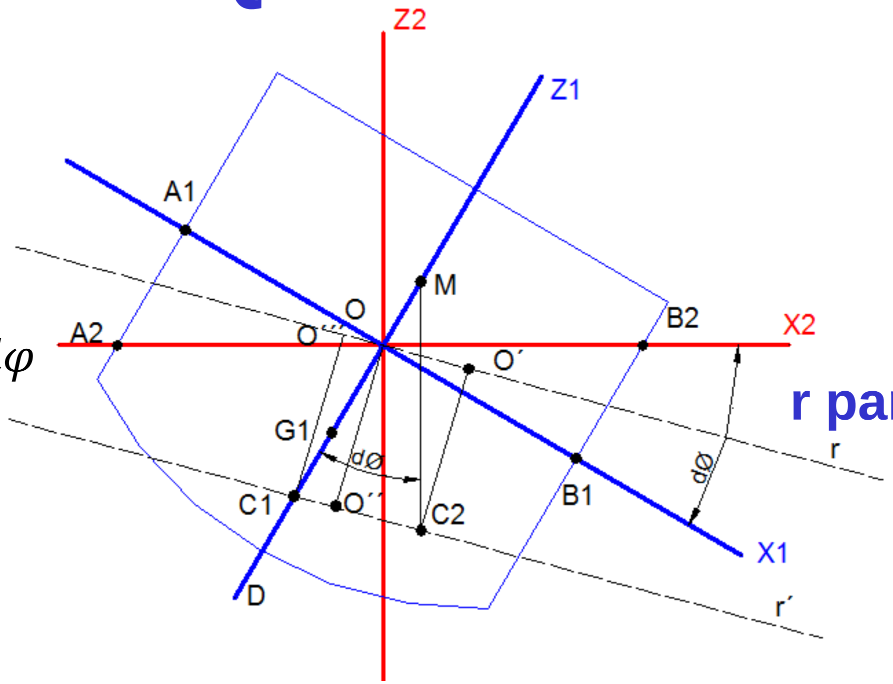
$C_1M > C_1G_1$, el equilibrio del cuerpo es ESTABLE



$C_1M < C_1G_1$, y por lo tanto el equilibrio del cuerpo es INESTABLE

Hay que calcular la "DISTANCIA METACÉNTRICA"

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES



$$\overline{C_1C_2} = \overline{C_1M}\,d\varphi$$

$$\overline{C_1M} = \frac{\overline{C_1C_2}}{d\varphi}$$

$$A_2DB_2 = A_1DB_1 - A_1OA_2 + B_1OB_2$$

$$\omega_2 = \omega_1 - \omega h_1 + \omega h_2$$

$\omega_{h1}=\omega_{h2}$ z simetría

Aplicamos momento estático

r paralelo r´

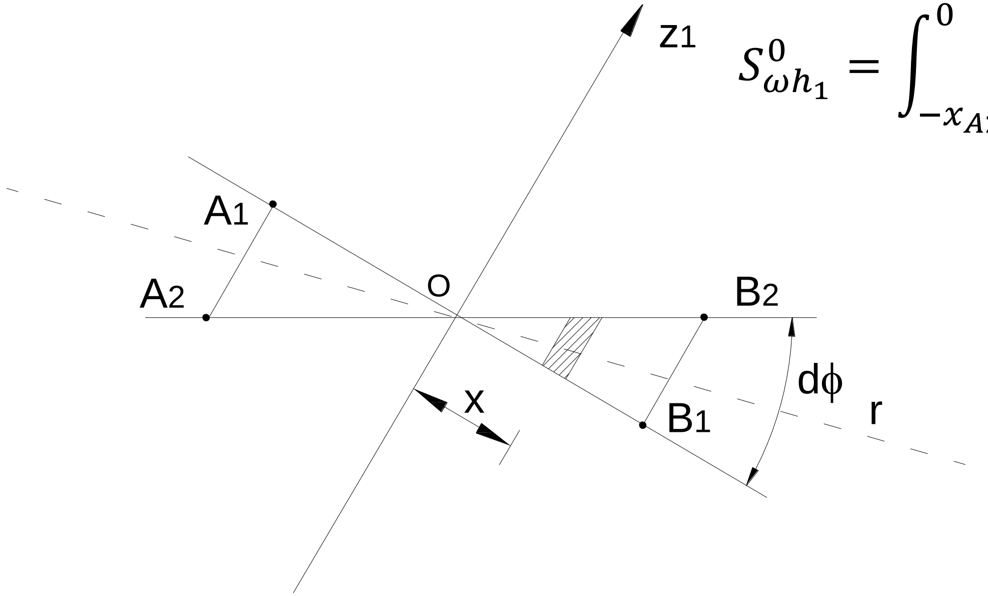
Momento respecto a r

$$\omega_2\overline{O'C_2} = \omega_1\overline{O'''C_1} - Mom.\,\omega h_1 + Mom.\,\omega h_2$$

$$\omega_2\overline{O'C_2} = \omega_1\overline{O'''C_1} \qquad \overline{O'C_2} = \overline{O'''C_1}$$

Momento respecto a O – O´´

$$\omega_2\overline{C_2O''} = -\omega_1\overline{C_1O''} + S^0_{\omega h_1} + S^0_{\omega h_2}$$



$$S^0_{\omega h_1} = \int_{-x_{A2}}^{0} \underbrace{x}_{}\,\underbrace{x\,d\varphi.\,dx}_{}$$

Altura; Base

$$S^0_{\omega h_1} = \int_{-x_{A2}}^{0} x^2\,d\varphi.\,dx$$

$$S^0_{\omega h_2} = \int_{0}^{x_{B2}} x^2\,d\varphi.\,dx$$

$$\int_{-x_{A2}}^{0} x^2\,d\varphi.\,dx + \int_{0}^{x_{B2}} x^2\,d\varphi.\,dx = \int_{-x_{A2}}^{x_{B2}} x^2\,d\varphi.\,dx$$

$$\omega_2\overline{C_2O''} = -\omega_1\overline{C_1O''} + \int_{-x_{A2}}^{x_{B2}} x^2\,d\varphi.\,dx$$

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

$$\omega_2\overline{C_2O''} + \omega_1\overline{C_1O''} = \int_{-x_{A2}}^{x_{B2}} x^2\, d\varphi . dx$$

Para $\omega = \omega_1 = \omega_2$

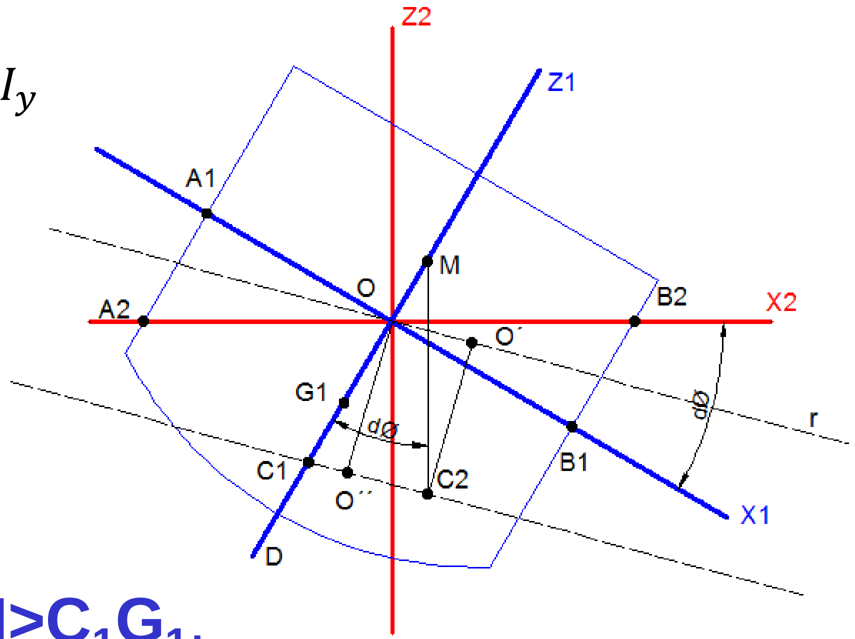
$$\omega\left(\overline{C_2O''} + \overline{C_1O''}\right) = \int_{-x_{A2}}^{x_{B2}} x^2\, d\varphi . dx$$

$$\omega\left(\overline{C_1C_2}\right) = \int_{-x_{A2}}^{x_{B2}} x^2\, d\varphi . dx$$

$$S_O^{Vh_1+Vh_2} = \int_{y_{D2}}^{y_{D1}} dy \int_{-x_A}^{x_B} x^2\, d\varphi . dx . dy = V.\overline{C_1C_2}$$

$$V.\overline{C_1C_2} = d\varphi \iint x^2\, dx.dy$$

$$V.\overline{C_1C_2} = d\varphi . I_y$$



$$\overline{C_1C_2} = \overline{C_1M_y} . d\varphi$$

$$\overline{C_1M_y} = \overline{C_1C_2}/d\varphi$$

$$V.\overline{C_1M_y} = I_y$$

$$\boxed{\overline{C_1M_y} = \frac{I_y}{V}}$$

Recordar que si $C_1M > C_1G_1$, EQUILIBRIO ESTABLE

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

1. Calcular el calado del cuerpo.
2. Ubicar el Centro de Carena “C”.
3. Ubicar el centro de gravedad del cuerpo “G”.
4. Calcular la distancia entre C y G.
5. Delimitar la superficie de flotación.
6. Calcular los momentos de inercia de la superficie de flotación.
7. Calcular las distancias metacéntricas CM.
8. Comparar la distancia CG con CM para saber si el equilibrio es estable o inestable.

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

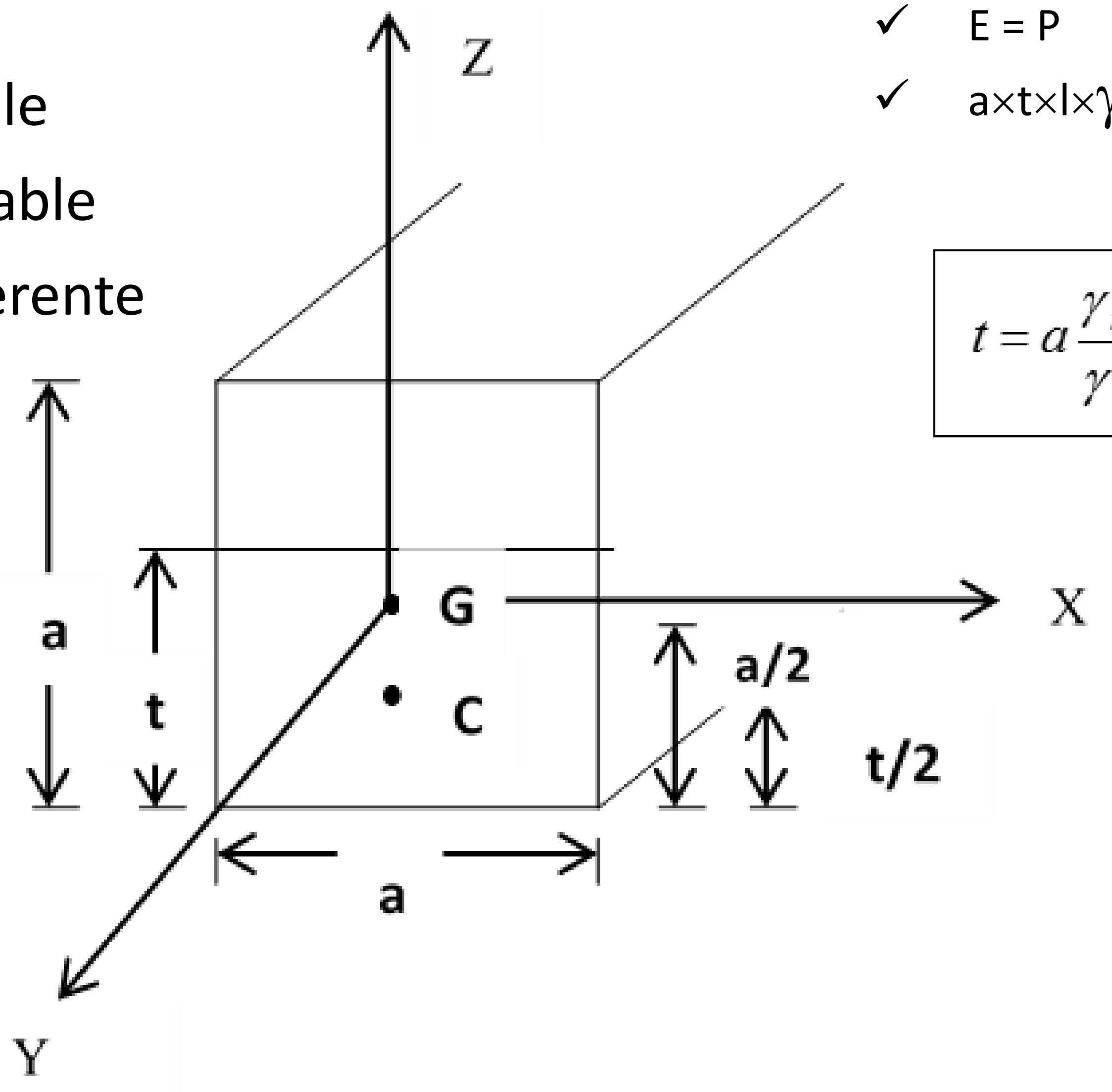
- ❑ $MC > GC \Rightarrow$ Equilibrio estable
- ❑ $MC < GC \Rightarrow$ Equilibrio inestable
- ❑ $MC = GC \Rightarrow$ Equilibrio indiferente

- ❑ M es el metacentro
- ❑ C es el centro de carena
- ❑ P es el peso del cuerpo

✓ $E = P$

✓ $a \times t \times l \times \gamma_a = a^2 \times l \times \gamma_m$

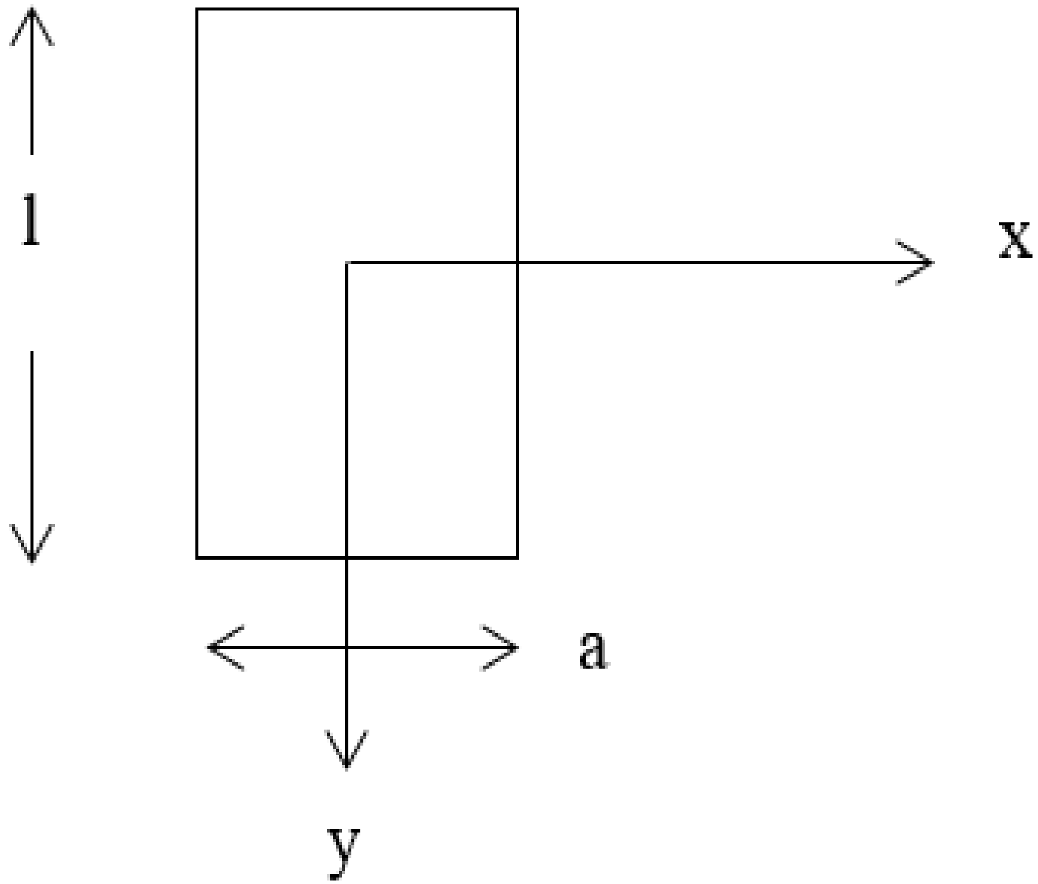
$$t = a\frac{\gamma_m}{\gamma_a}$$



EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

- La superficie de flotación (SF) es la de la figura.
- El momento de inercia de la superficie de flotación respecto de los ejes x e y nos permiten calcular la Distancia Metacéntrica MC.

$$CM = \frac{I_{SFY}}{V_C} = \frac{\frac{\cancel{a}^{\cancel{3}2} * \cancel{l}}{12}}{\cancel{a} * t * \cancel{l}} = \frac{a^2}{t} * \frac{1}{12} = \frac{a^2}{12a\frac{\gamma_m}{\gamma_a}} = \frac{a}{12}\frac{\gamma_a}{\gamma_m}$$



EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

- Si el equilibrio es indiferente: GC ≈ MC

$$GC = \frac{a}{2} - \frac{t}{2} = \frac{a}{2}\left(\frac{\gamma_m}{\gamma_a}\right)$$

$$\frac{a}{\cancel{2}}\left(1 - \frac{\gamma_m}{\gamma_a}\right) = \frac{a}{1\cancel{2}6}\frac{\gamma_a}{\gamma_m}$$

$$\frac{\gamma_m}{\gamma_a} = \gamma_R$$

$$1 - \gamma_R = \frac{1}{6\gamma_R}$$

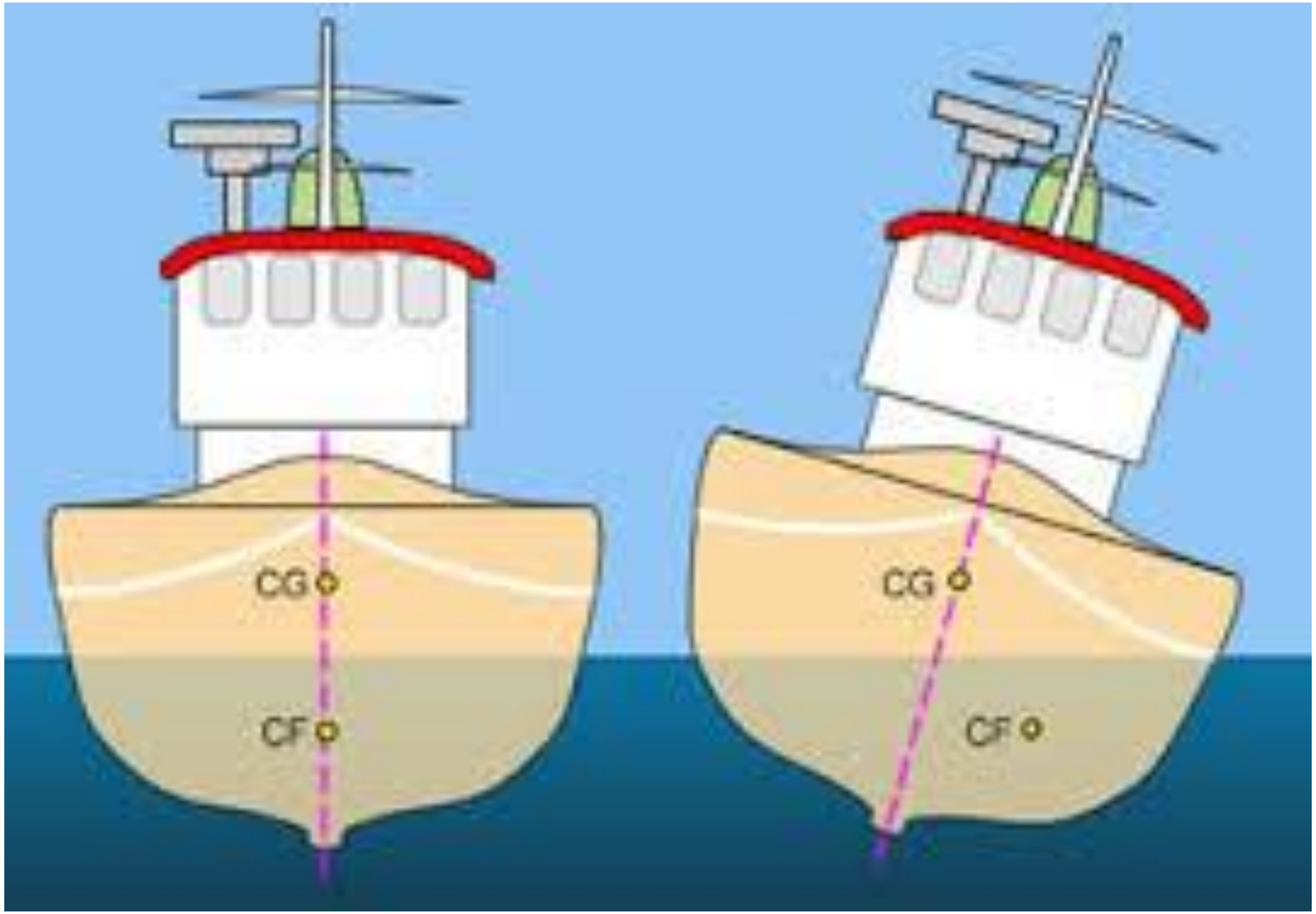
$$6\gamma_R - 6{\gamma_R}^2 = 1 \Rightarrow \cancel{6}{\gamma_R}^2 - \cancel{6}\gamma_R + \frac{1}{6} = 0$$

$${\gamma_R}^2 - \gamma_R + \frac{1}{6} = 0$$

$$\gamma_R = 0.787$$
$$\gamma_R = 0.211$$

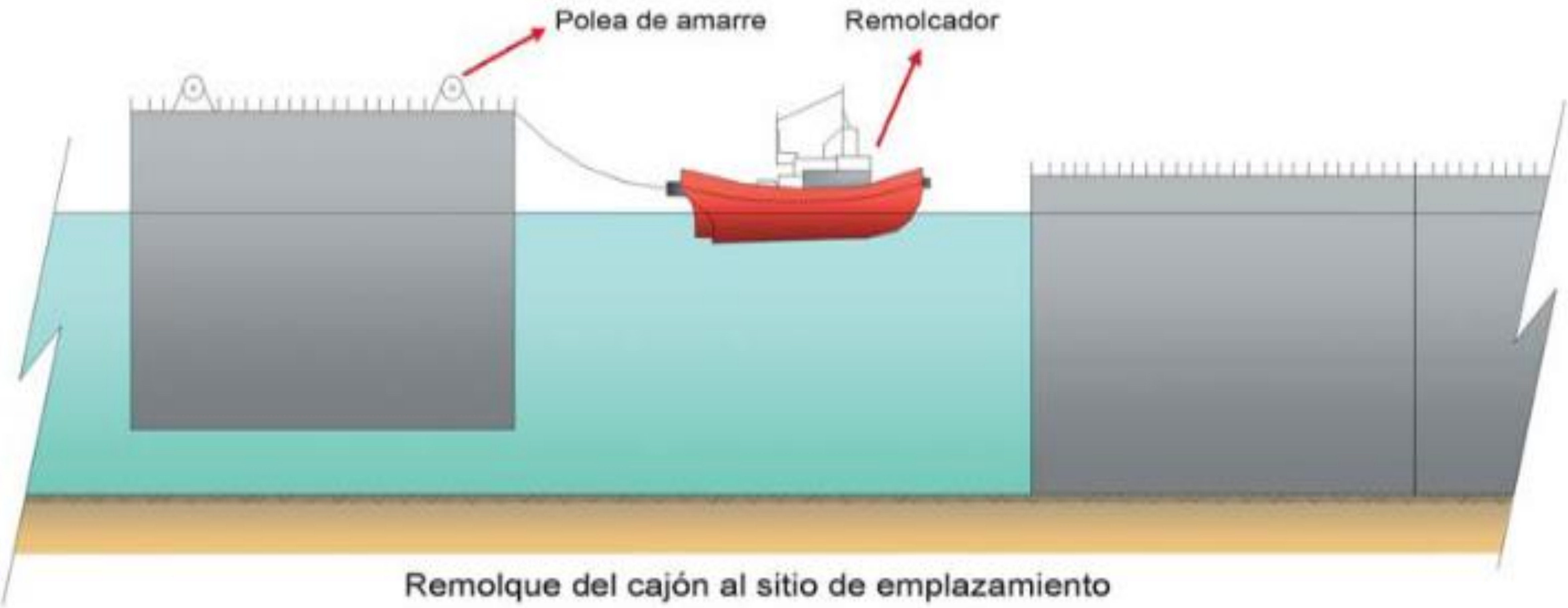
- Para esos dos valores de peso específico relativo se verifica equilibrio indiferente

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES



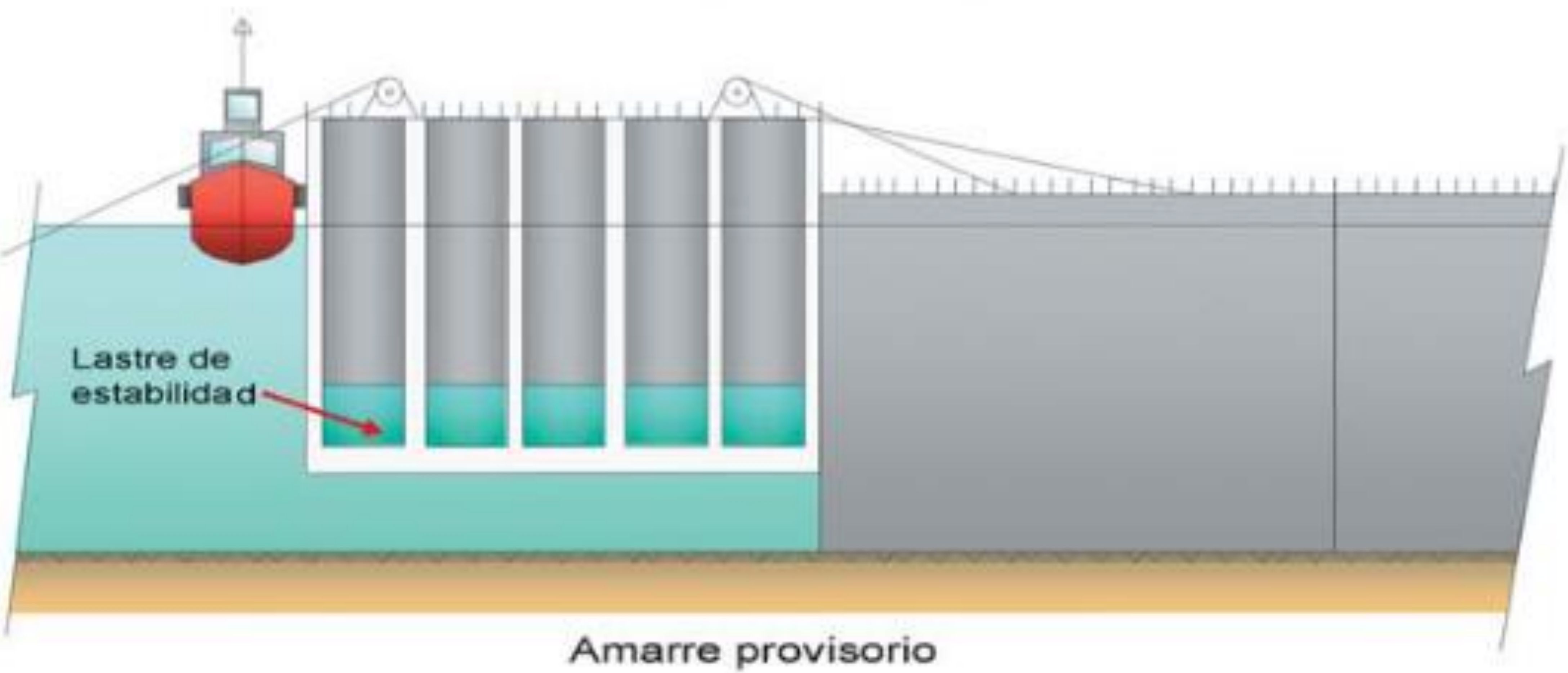
EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

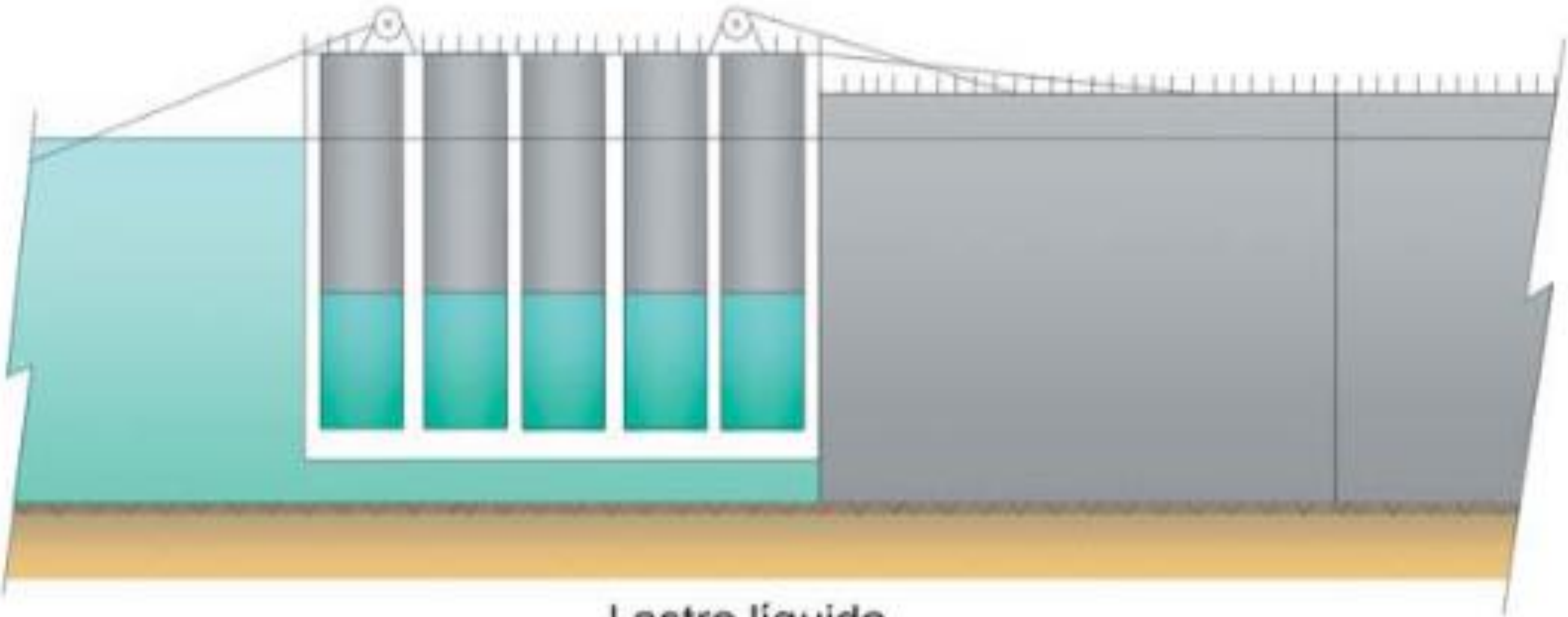


Remolque del cajón al sitio de emplazamiento

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

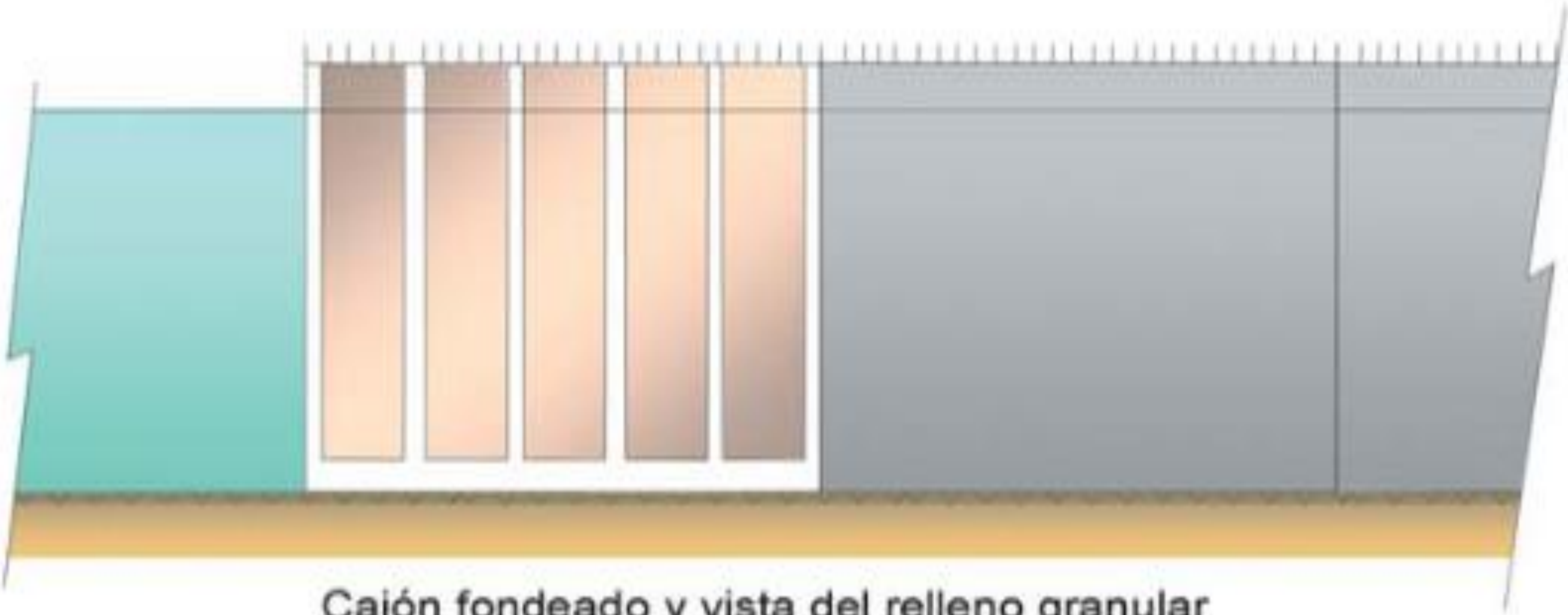


EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES



Lastre líquido

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES



Cajón fondeado y vista del relleno granular

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

Ejercicio de aplicación

<u>DATOS</u>:

e = 0.10 m

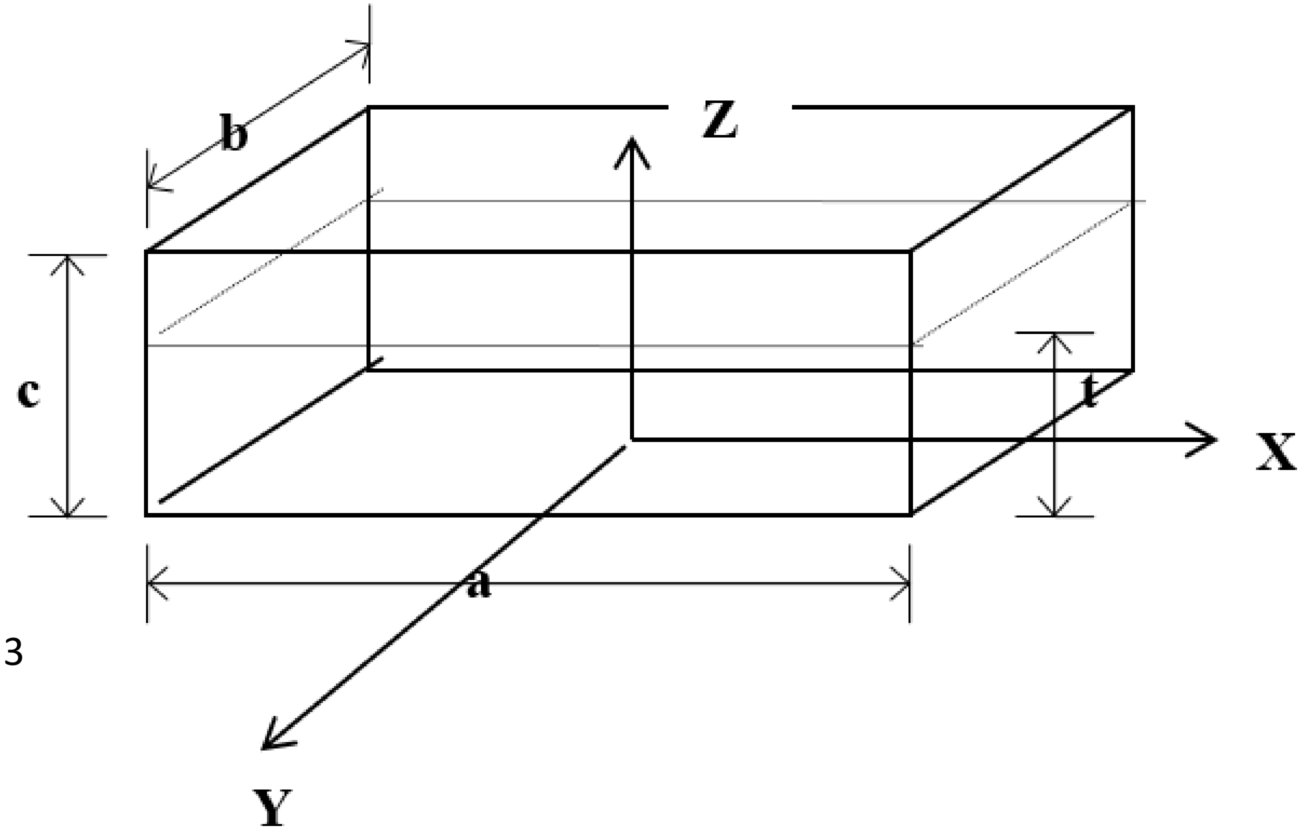
a = 12 m

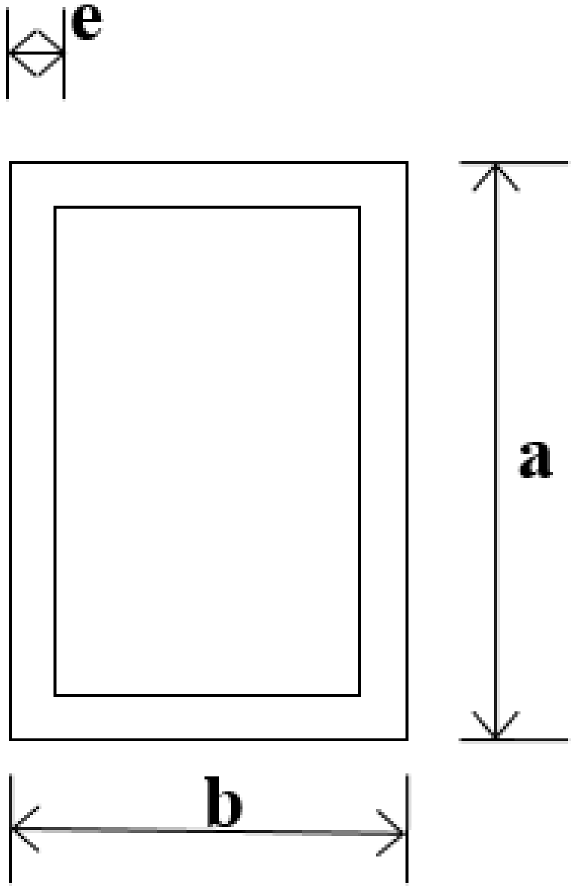
b = 5 m

c = 8 m

γ_{H^o} = 2400 kg/m^3

γ_a = 1090 kg/m^3





EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

Primero se calcula el calado t aplicando el Principio de Arquímides, para lo cual se calcula el peso P y el empuje E.

$$P = abe\gamma_H + 2(a-2e)(c-e)e\gamma_H + 2be(c-e)\gamma_H$$

$$P = e\gamma_H[ab + 2(a-2e)(c-e) + 2b(c-e)]$$

$$P = 2400\frac{kgf}{m^3}0{,}10m[(12m5m) + 2(11{,}8m)(7{,}9m) + 2(5m)7{,}9m]$$

$$P = 78105{,}60kgf$$

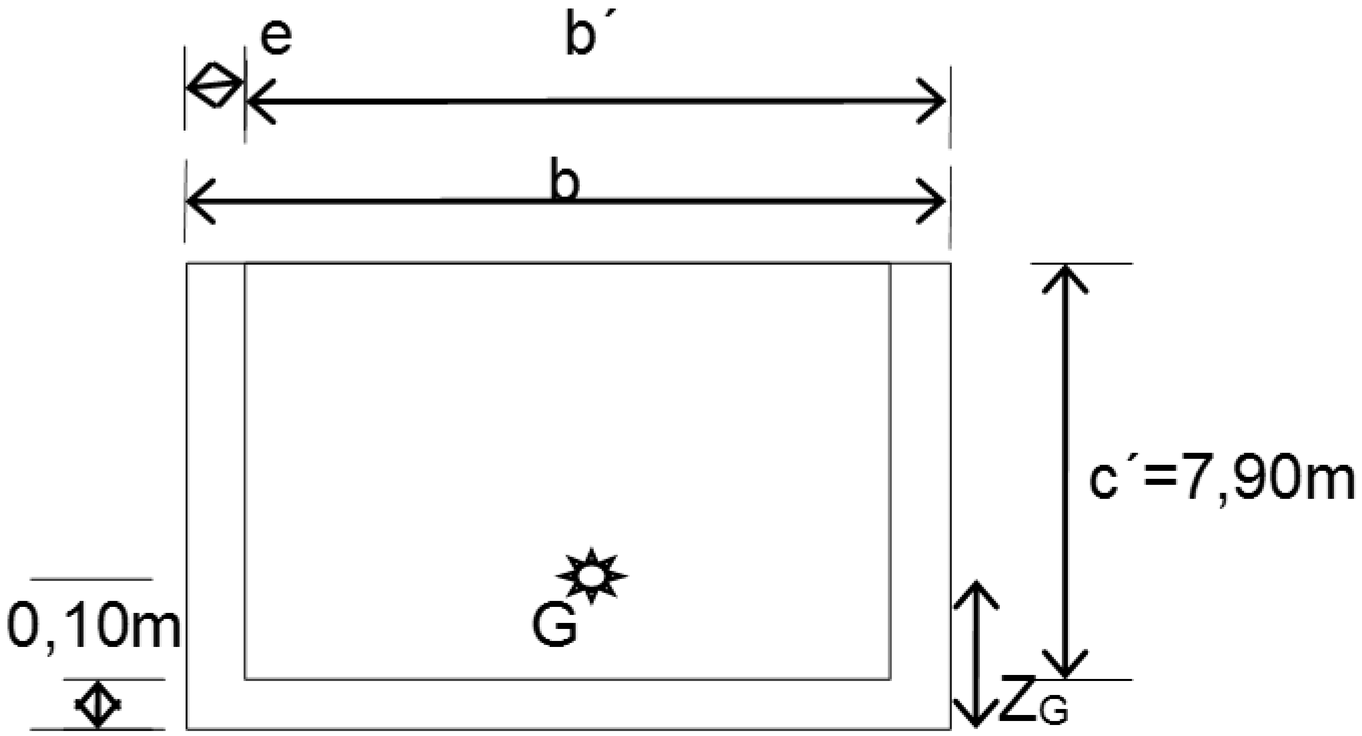
$$E = \gamma_a(abt)$$

$$P = E \Rightarrow \gamma_a(abt) = 78105{,}6kgf$$

$$t = \frac{78105{,}6kgf}{\gamma_a(ab)} = \frac{78105{,}6kgf}{1090\frac{kgf}{m^3}(12m5m)} = 1{,}19m$$

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

- ✓En segundo lugar, deben ubicarse el centro de gravedad G del cajón y el centro de carena C.
- ✓Para la ubicación espacial del centro de gravedad G se considera que en el plano XY el cajón de flotación es simétrico, de modo que su centro de gravedad se encuentra en la intersección de los dos ejes de simetría X e Y.
- ✓O sea que sólo resta encontrar la altura Z_G del mismo.
- ✓Para lo cual se aplica el Teorema de Varignon, tomando como eje de referencia la base del cajón:

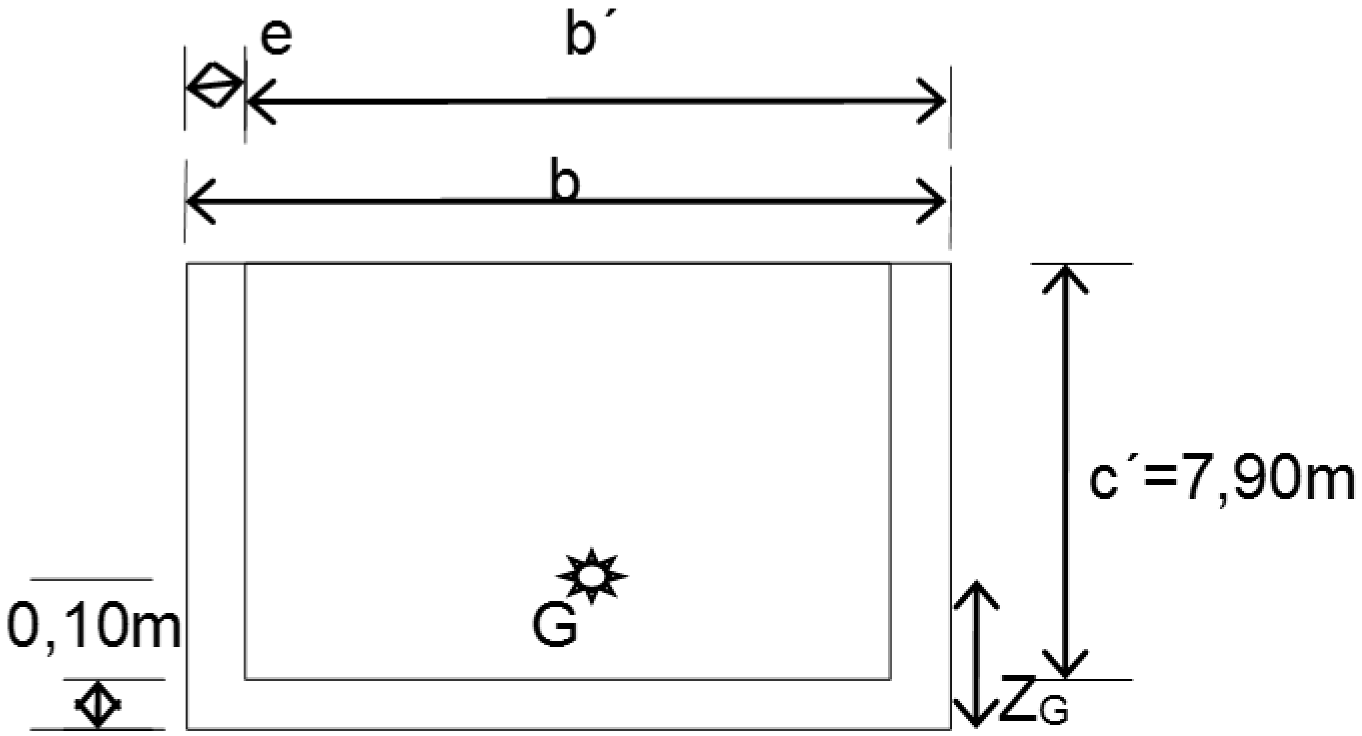


EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

$$z_G = \gamma_H \frac{ab\frac{e^2}{2} + 2(a-2e)c'e\left(\frac{c'}{2}+e\right) + 2bc'e\left(\frac{c'}{2}+e\right)}{P}$$

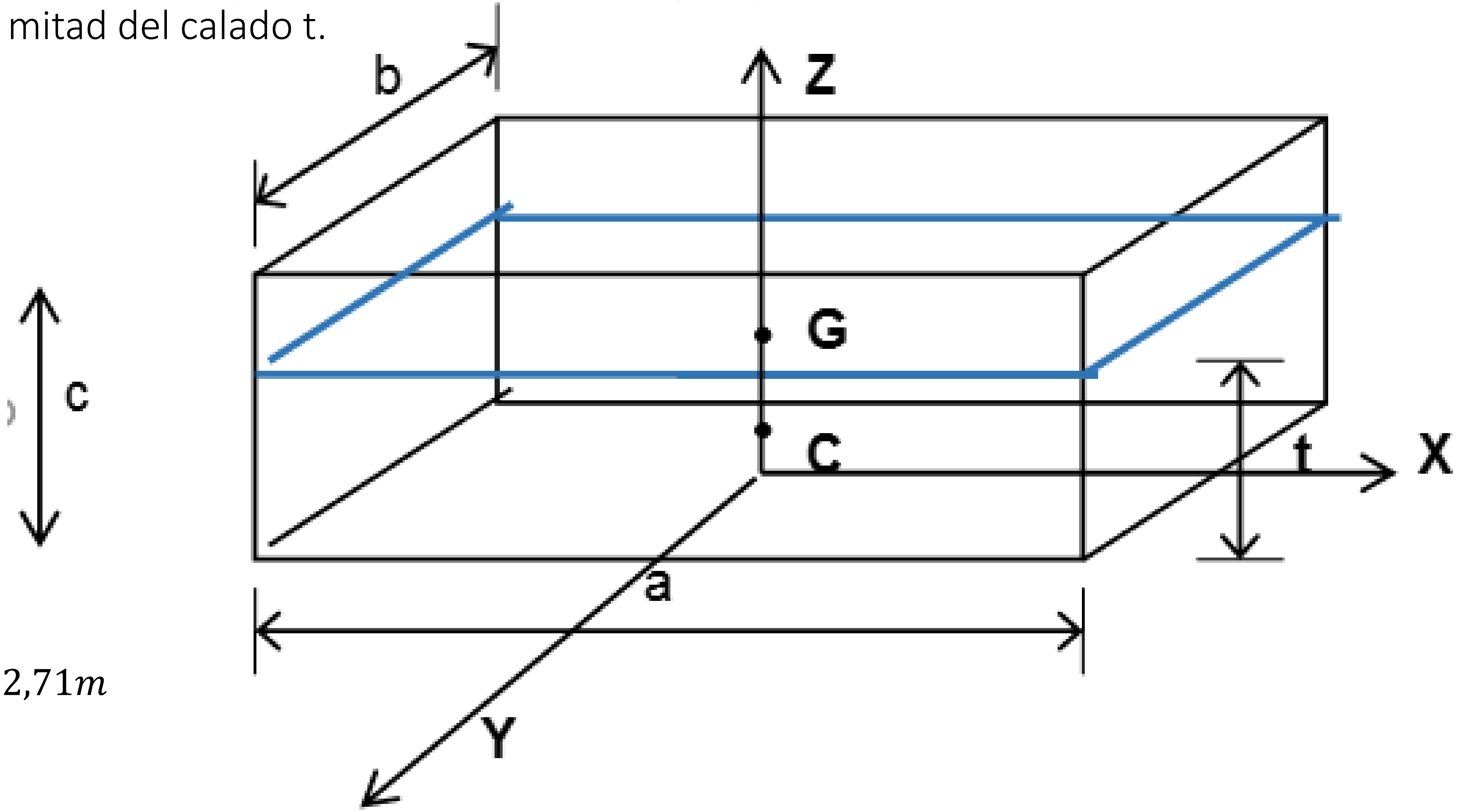
$$z_G = 2400\frac{kgf}{m^3}0{,}10m\frac{\left(5m12m\frac{(0{,}10m)}{2} + 2(11{,}8m)7{,}9m(4{,}05m) + 2(5m)7{,}90m(4{,}05m)\right)}{78105{,}60kgf}$$

$$z_G = 3{,}31m$$



EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

- ✓Para la ubicación espacial del centro de carena C, se considera que el volumen de carena es el volumen de un prisma de base rectangular (a,b) y altura t.
- ✓De modo que el centro de gravedad de este prisma se ubica sobre el eje Z y a una distancia medida desde la base igual a la mitad del calado t.

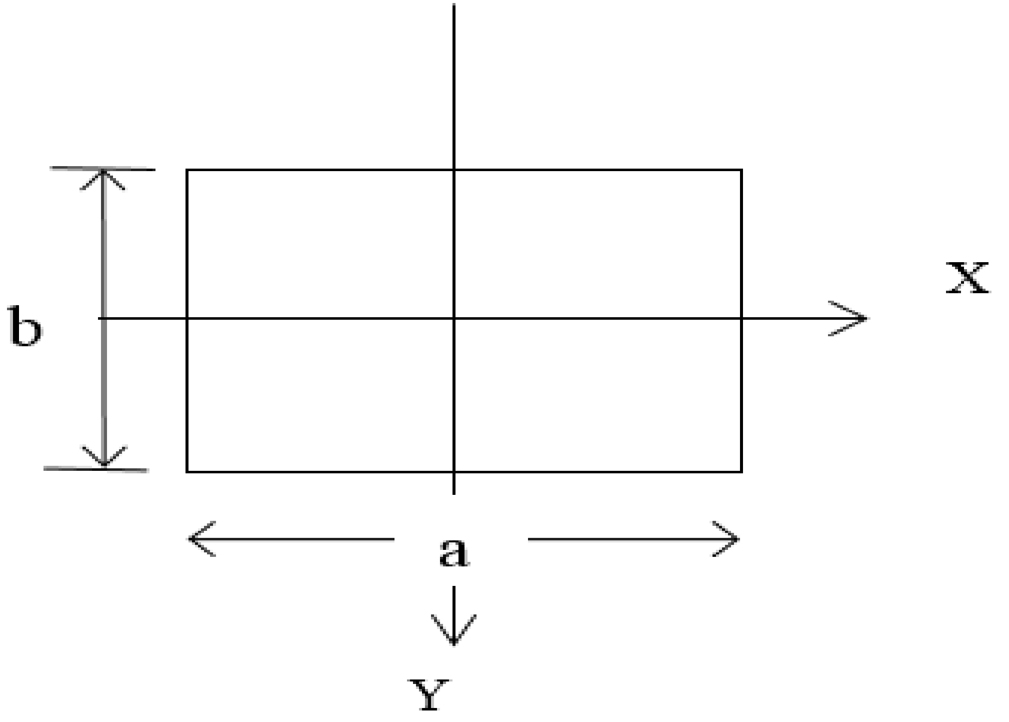


$$\frac{t}{2} = \frac{1{,}19m}{2} = 0{,}60m$$

$$\overline{CG} = z_G - \frac{t}{2} = 3{,}31m - 0{,}60m = 2{,}71m$$

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

- ✓Par calcular la distancia metacéntrica CM se considera la superficie de flotación, un rectángulo de dimensiones a y b, indicado en color celeste en las figuras adjuntas.
- ✓Se calculan los momentos de inercia respecto de los ejes X e Y, para verificar la estabilidad al rolido se usa el giro alrededor del eje X y para verificar el cabeceo alrededor del eje Y.

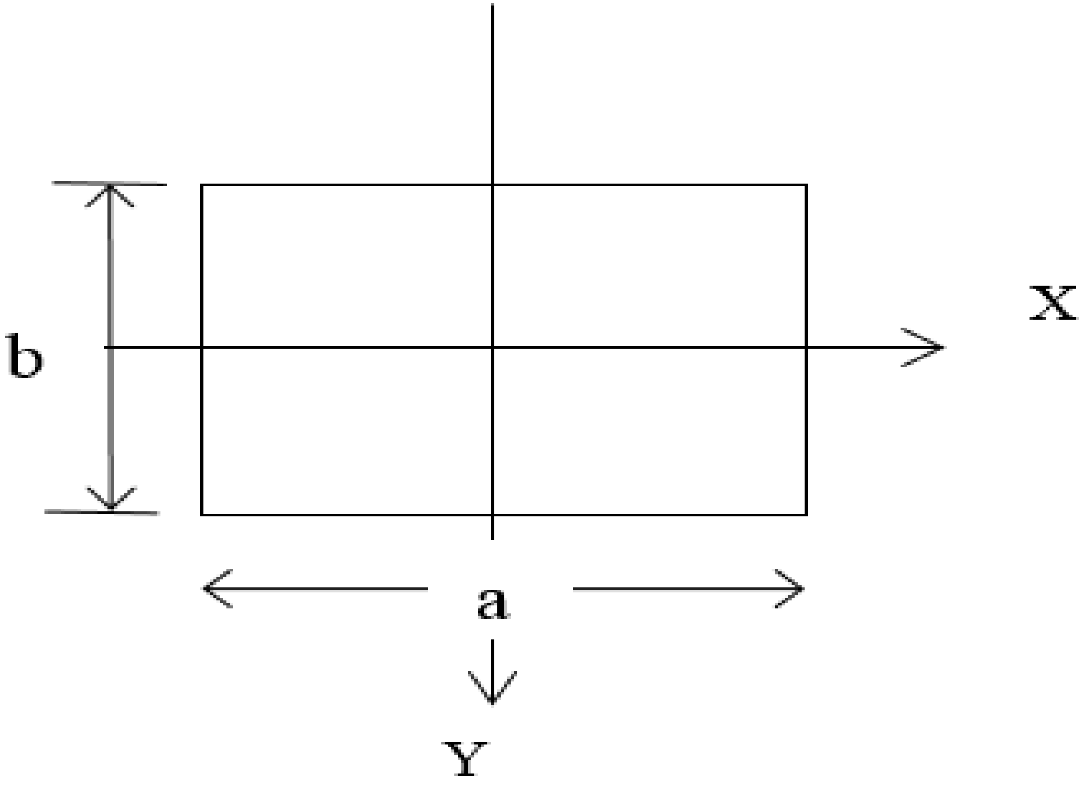


$$\overline{CM}_X = \frac{I_{\omega f}^X}{V}$$

$$I_{\omega f}^X = \frac{b^3 a}{12} \Rightarrow V = abt \Rightarrow \overline{CM}_X = \frac{\frac{ab^3}{12}}{abt} = \frac{b^2}{12t} = \frac{(5m)^2}{12(1{,}19m)} = 1{,}75m$$

$$\overline{CM}_X = 1{,}75m \langle \overline{CG} = 2{,}71m \Rightarrow ROLIDO \Rightarrow EQ.INESTABLE$$

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES



$$\overline{CM}_Y = \frac{I_{\omega f}^{Y}}{V}$$

$$I_{\omega f}^{Y} = \frac{ba^3}{12} \Rightarrow V = abt \Rightarrow \overline{CM}_Y = \frac{\frac{a^3 b}{12}}{abt} = \frac{a^2}{12t} = \frac{(12m)^2}{12(1{,}19m)} = 10{,}08m$$

$$\overline{CM}_X = 10{,}08m \rangle \overline{CG} = 2{,}71m \Rightarrow CABECEO \Rightarrow EQ.\,ESTABLE$$

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

- ✓Las condiciones de estabilidad frente al rolido no se verifican, de modo que se debe redimensionar el cajón.
- ✓Se puede redimensionar aumentando la altura del cajón de flotación. A continuación, se adjunta una tabla con los cálculos de las distancias metacéntricas CM compradas con CG para diferentes valores de la dimensión c (altura del cajón de flotación).
- ✓Se hace notar que a medida que aumenta el valor de c, la distancia metacéntrica disminuye lentamente, mientras que la distancia CG es mucho más sensible, pero no se verifican condiciones de estabilidad al rolido.

VERIFICACIÓN DE LA ESTABILIDAD AL											ROLIDO			CABECEO		
a(m)	b(m)	c(m)	e(m)	γ_H(kgf/m^3)	γ_a(kgf/m^3)	P(kgf)	t(m)	z_G(m)	CG(m)	V(m^3)	Ix(m^4)	CMx(m)	CMx/CG	Iy(m^4)	CMy(m)	CMy/CG
12	5	8	0,1	2400	1090	78105,6	1,19	3,31	2,715	71,66	125	1,74	0,64	720	10,05	3,70
12	5	9	0,1	2400	1090	86169,6	1,32	3,80	3,139	79,05	125	1,58	0,50	720	9,11	2,90
12	5	10	0,1	2400	1090	94233,6	1,44	4,29	3,566	86,45	125	1,45	0,41	720	8,33	2,34
12	5	11	0,1	2400	1090	102298	1,56	4,78	3,994	93,85	125	1,33	0,33	720	7,67	1,92
12	5	12	0,1	2400	1090	110362	1,69	5,27	4,423	101,25	125	1,23	0,28	720	7,11	1,61

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES

- ✓Para lograr las condiciones de estabilidad al rolido, también se puede aumentar el espesor de la losa del cajón de flotación, para así lograr que descienda el centro de gravedad G y disminuir la distancia CG, hasta que sea menor a CM.
- ✓Se adjunta una tabla que resume los cálculos realizados considerando diferentes valores del espesor de la losa de fondo del cajón, a partir de los 0,55m de espesor se verifica la estabilidad al rolido, mientras que la estabilidad al cabeceo prácticamente no se ha modificado.

VERIFICACIÓN DE LA ESTABILIDAD AL											ROLIDO			CABECEO		
a(m)	b(m)	c(m)	e_P(m)	e_L(m)	γ_H(kgf/m^3)	γ_a(kgf/m^3)	P(kgf)	t(m)	z_G(m)	CG(m)	V(m^3)	Ix(m^4)	CMx(m)	CMx/CG	Iy(m^4)	CMy(m)	CMy/CG
12	5	8	0,10	0,10	2400	1090	78105,60	1,19	3,31	2,72	71,66	125	1,74	0,64	720	10,05	3,70
12	5	8	0,10	0,15	2400	1090	84902,40	1,30	3,06	2,41	77,89	125	1,60	0,66	720	9,24	3,83
12	5	8	0,10	0,20	2400	1090	91699,20	1,40	2,85	2,15	84,13	125	1,49	0,69	720	8,56	3,97
12	5	8	0,10	0,25	2400	1090	98496,00	1,51	2,68	1,93	90,36	125	1,38	0,72	720	7,97	4,14
12	5	8	0,10	0,30	2400	1090	105292,80	1,61	2,53	1,72	96,60	125	1,29	0,75	720	7,45	4,33
12	5	8	0,10	0,35	2400	1090	112089,60	1,71	2,40	1,54	102,83	125	1,22	0,79	720	7,00	4,54
12	5	8	0,10	0,40	2400	1090	118886,40	1,82	2,29	1,38	109,07	125	1,15	0,83	720	6,60	4,79
12	5	8	0,10	0,45	2400	1090	125683,20	1,92	2,19	1,23	115,31	125	1,08	0,88	720	6,24	5,08
12	5	8	0,10	0,50	2400	1090	132480,00	2,03	2,11	1,09	121,54	125	1,03	0,94	720	5,92	5,41
12	5	8	0,10	0,55	2400	1090	139276,80	2,13	2,03	0,97	127,78	125	0,98	1,01	720	5,63	5,82
12	5	8	0,10	0,60	2400	1090	146073,60	2,23	1,97	0,85	134,01	125	0,93	1,09	720	5,37	6,30