UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD
DE INGENIERÍA

HIDRÁULICA GENERAL

UNIDAD 2

FUNDAMENTOS DE LA HIDRÁULICA

EC. DE BERNOULLI

JTP: Ing. Facundo Correas
2023

CONTENIDO

- Cinemática del agua
- Hidrodinámica del agua
- Ejercicios

CONTENIDO

Cinemática del agua

GENERALIDADES

CINEMÁTICA DEL AGUA

Noción de partículas, sistemas de Lagrange y Euler, trayectorias, líneas de corriente, filetes. Tipos de movimientos. Clasificación de los escurrimientos. Deformaciones, campo de velocidades y aceleraciones.

HIDRODINÁMICA DEL AGUA

Diferencia con cinemática, ecuaciones de Euler, movimiento permanente del líquido perfecto, ecuación de la continuidad, Teorema de Bernoulli. Corriente líquida: gasto, generalización del Teorema de Bernoulli en líquidos reales, aplicaciones, Bernoulli a caudal constante. Ecuación de la continuidad. Escurrimiento crítico, número de Froude

CORRIENTES BIDIMENSIONALES

Trazado de redes de corriente.

CINEMÁTICA

Estudia el movimiento de una partícula sin tomar en cuenta las fuerzas que lo originan, ni las masas que intervienen

CAMPO DE FLUJO

Es cualquier región del espacio donde existe fluido en movimiento y donde pueden determinarse magnitudes físicas, tanto escalares, como vectoriales y tensoriales. Es cualquier región del espacio donde existe fluido en movimiento y donde pueden determinarse magnitudes físicas, tanto escalares, como vectoriales y tensoriales.

CINEMÁTICA DEL AGUA

Movimiento de Partículas

Método Lagrange

- Observador móvil: Sigue la partícula a lo largo de su trayectoria a través del tiempo
- Sucesivas posiciones de una partícula en el tiempo
- Se describe en un eje cartesiano y se referencia con un vector de posición r
- Composición vectorial de velocidades (u, v, w)
- Velocidad se expresa como la derivada parcial de la posición respecto a t.
- La aceleración también se descompone y expresa como derivada en t

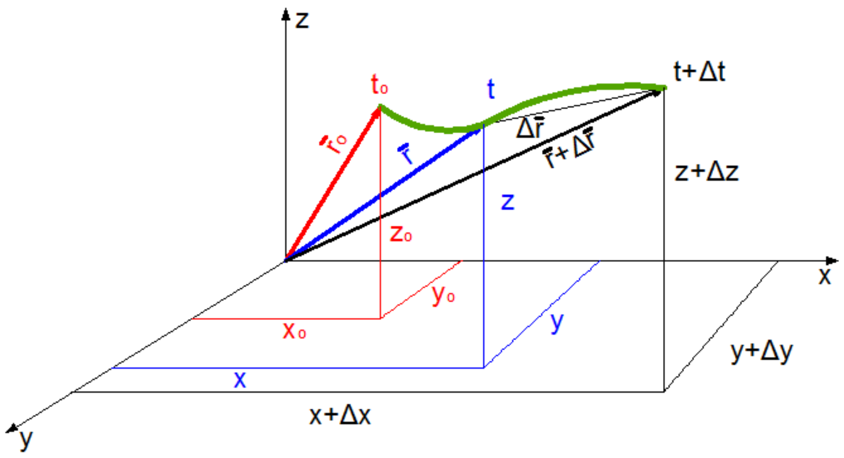
Método Euler

- Observador fijo: Estudia las partículas que pasan por un punto fijo en la corriente.
- Se estudian las velocidades de las infinitas partículas que pasan en t
- El vector posición r es función de tres variables
- Velocidad: variación del espacio en t (cuatro variables) y pueden descomponerse
- Velocidades como derivadas en fn de r y t
- Las componentes de aceleración se obtienen como derivadas correspondientes respecto t

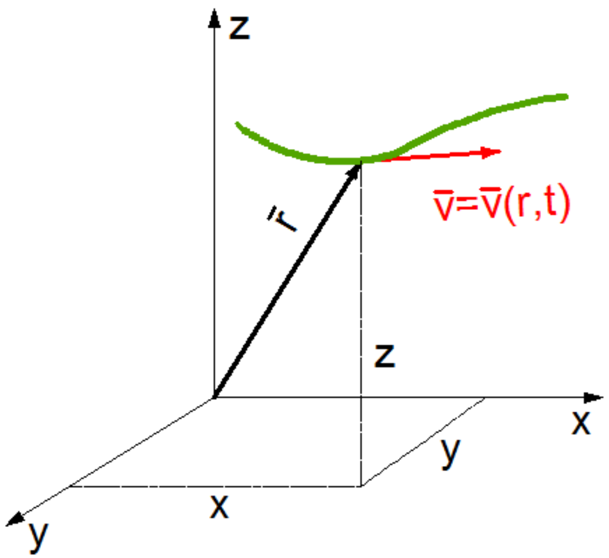
GENERALIDADES

Movimiento de Partículas

Método Lagrange



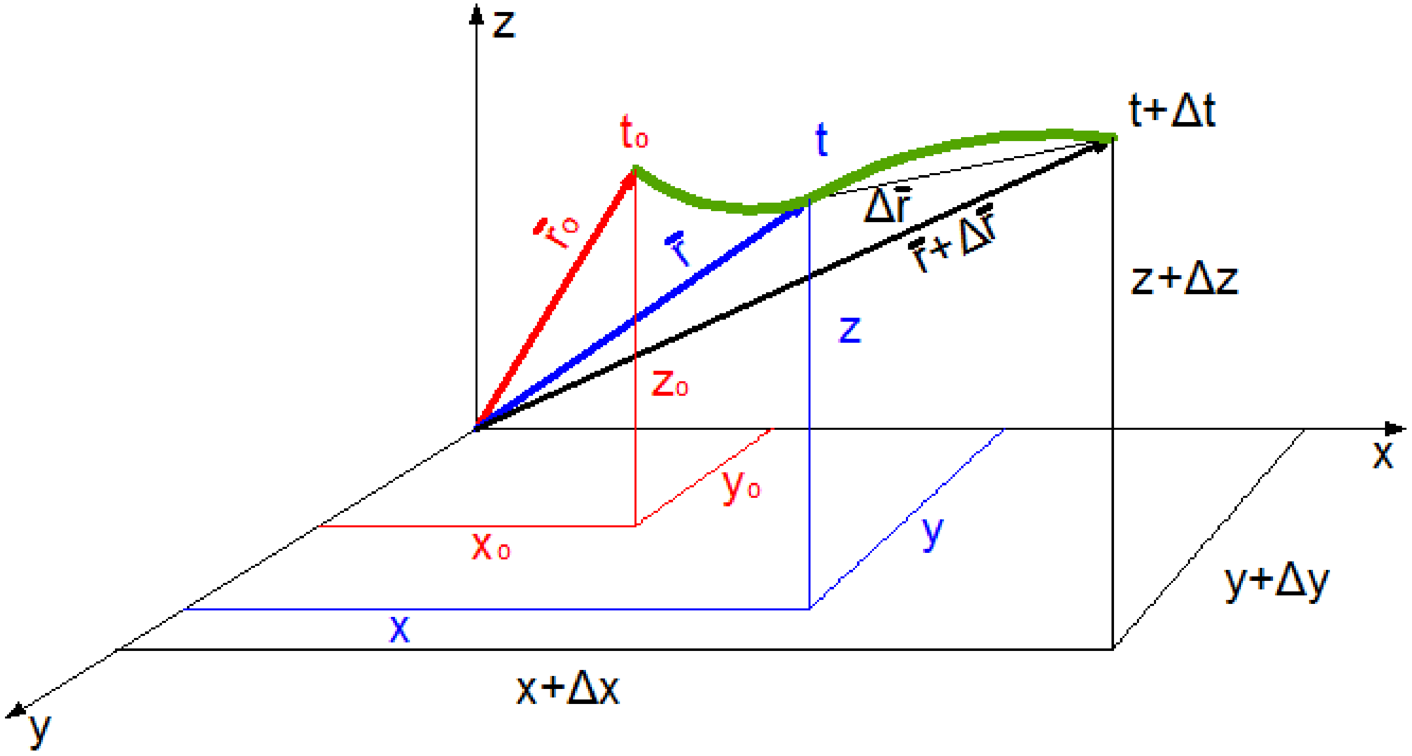
Método de Euler

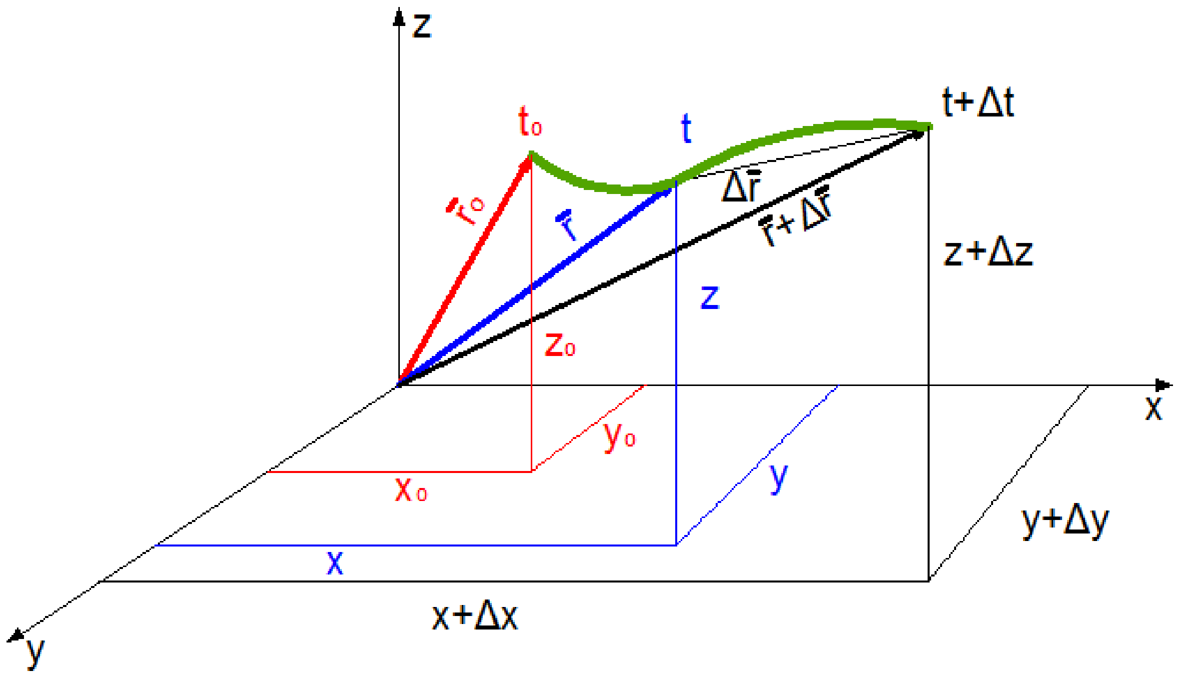


GENERALIDADES

MÉTODO DE LAGRANGE

Estudia el movimiento de las partículas a través del tiempo, mientras recorre una trayectoria en el espacio, es decir que, estudia las sucesivas posiciones de una determinada partícula a través del tiempo





POSICION INICIAL t_o

$$r_o = r_o(x_o, y_o, z_o)$$

MÉTODO DE LAGRANGE

INSTANTE t

$$r = r(x, y, z) \Rightarrow r = r(r_o, t - t_o)$$

$$x = x(x_o, y_o, z_o, t - t_o)$$
$$y = y(x_o, y_o, z_o, t - t_o)$$
$$z = z(x_o, y_o, z_o, t - t_o)$$

INSTANTE $t+\Delta t$

$$r = r + \Delta r$$

$$r + \Delta r = r(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

MÉTODO DE LAGRANGE

La velocidad de una partícula queda expresada por las derivadas parciales de las coordenadas con respecto al tiempo, porque la velocidad depende de la posición inicial y del tiempo.

$$\vec{\mathrm{V}} = \vec{\mathrm{u}} + \vec{\mathrm{v}} + \vec{\mathrm{w}}$$

$$u = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\partial x}{\partial t}$$
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial y}{\partial t}$$
$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial t}$$

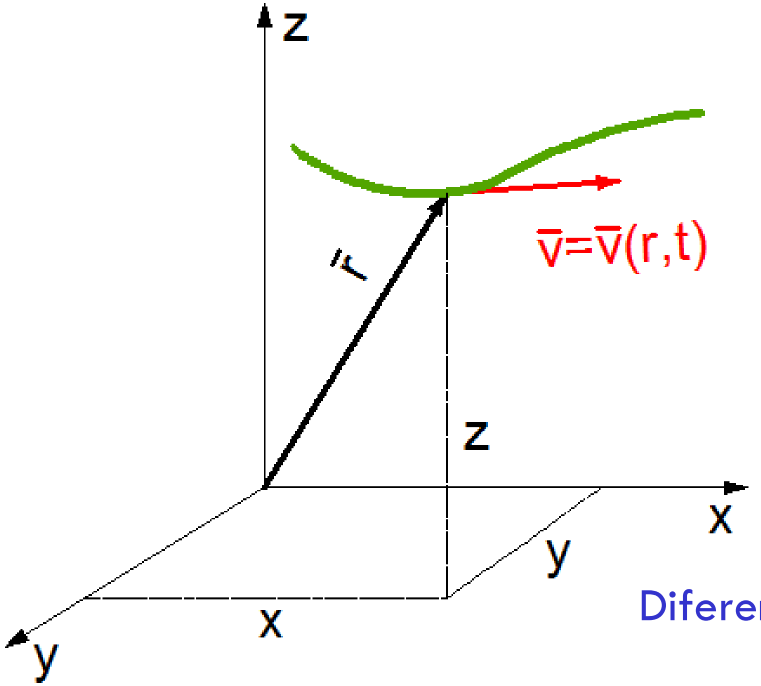
$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\partial r}{\partial t}$$

Y las aceleraciones se entienden como la variación de la velocidad en el tiempo.

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$
$$a_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$
$$a_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

MÉTODO DE EULER

Toma un punto fijo de la corriente y estudia las velocidades de las infinitas partículas que pasan por él en un tiempo t.



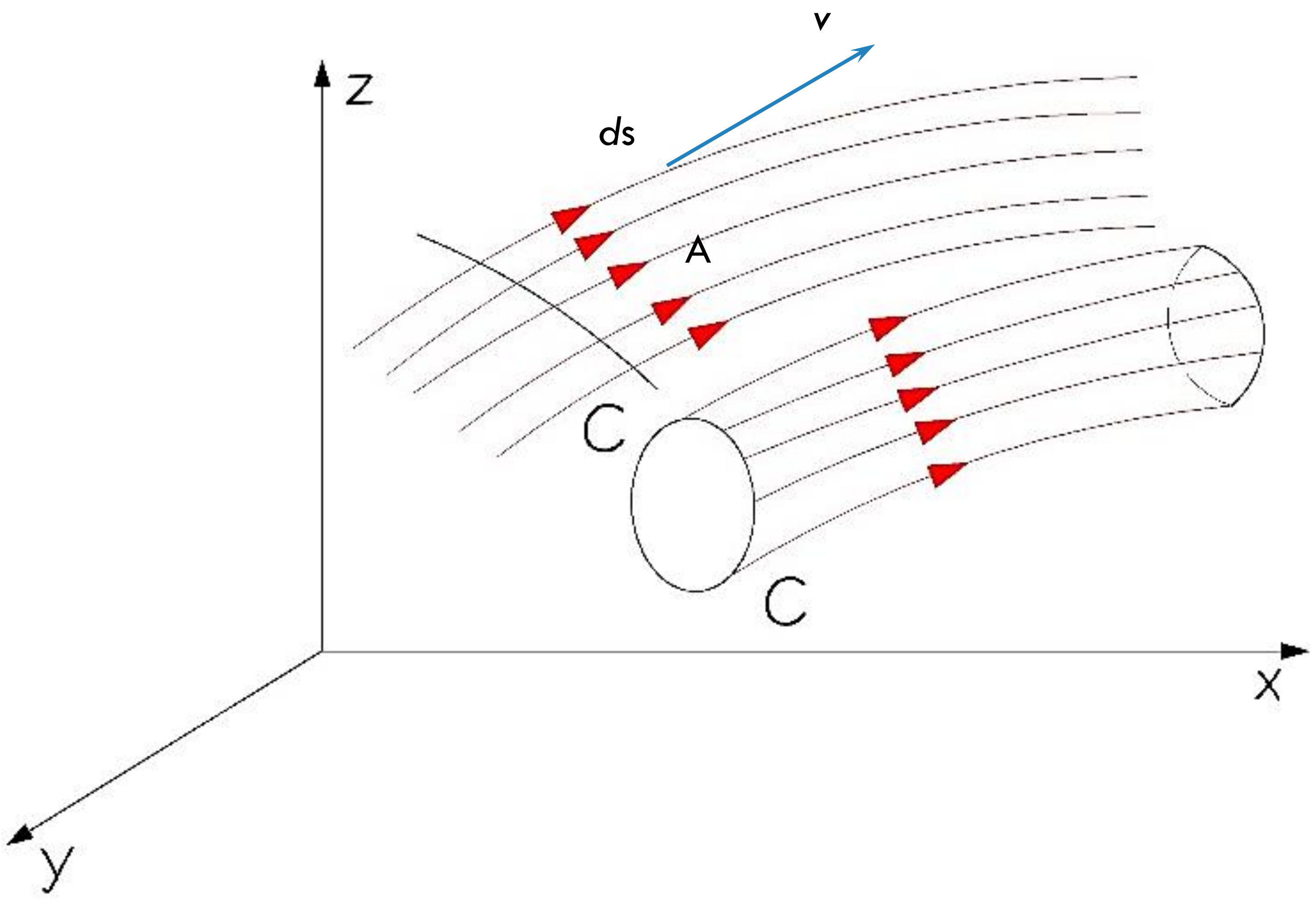
$$r = r(x, y, z)$$
$$V = V(r, t) = V(x, y, z, t)$$

$$Vx = u = u(x, y, z, t)$$
$$Vy = v = v(x, y, z, t)$$
$$Vz = w = w(x, y, z, t)$$

Diferenciales de las componentes de la velocidad

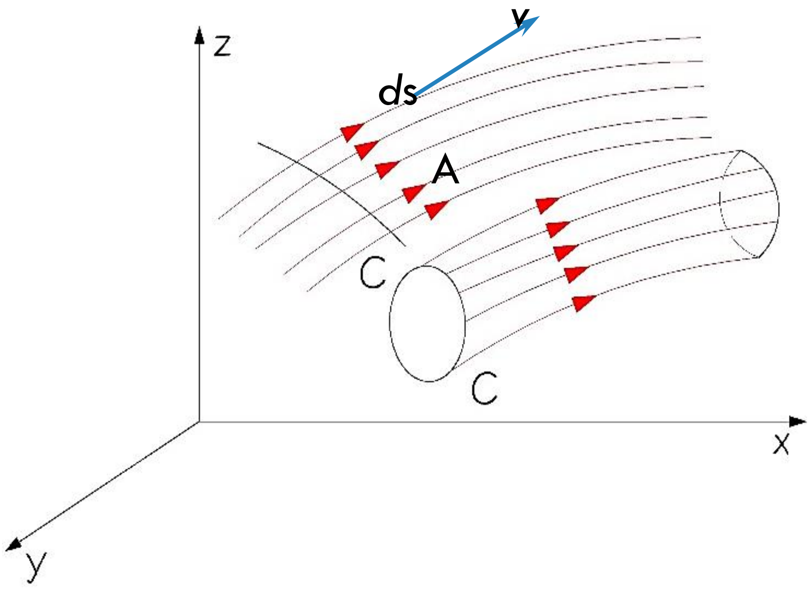
$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$
$$dv = \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$
$$dw = \frac{\partial w}{\partial t}dt + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w$$
$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w$$
$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w$$



Tubos de flujo

LÍNEAS CARACTERÍSTICAS DE LOS MOVIMIENTOS



Líneas de corriente o de flujo:
Trazada idealmente de manera tal que la tangente de cada punto proporciona la dirección del vector velocidad. Convergentes, divergentes o paralelas, pero nunca cortarse.

Trayectoria:
Camino de partícula en un t y espacio. Lugar geométrico ocupado por las sucesivas posiciones de una partícula en el tiempo.

Tubo de flujo:
Conjunto de líneas de corriente que pasan por una sección transversal. Encierra una porción de volumen de líquido (dVol).

Filete:
Lugar geométrico de los puntos que ocupan las partículas que han pasado, están pasando y pasarán por un punto determinado ("líneas de humo").

Corriente líquida:
Conjunto de tubos de flujo, de modo que se puede considerar que un conjunto de volúmenes diferenciales (dVol) forman un volumen discreto ΔVol..

LÍNEAS CARACTERÍSTICAS DE LOS MOVIMIENTOS

TIPOS DE ESCURRIMIENTOS

En función de:

- Comportamiento
- Fuerza predominante
- Tipo de movimiento
- Comportamiento de las partículas
- Comportamiento en el espacio
- Condiciones hidráulicas

ESCURRIMIENTOS EN FUNCIÓN DEL COMPORTAMIENTO

Comportamiento

Permanente

Parámetros del escurrimiento
Son constantes

MPU (t y s)

MPV (s)

Impermanente

Parámetros del escurrimiento
Son variables en tiempo y espacio

MLI
(baja v en el cambio)

MRI
(alta v en el cambio)

ESCURRIMIENTOS EN FUNCIÓN DE LA FUERZA PREDOMINANTE

CORRIENTES ABIERTAS

Agua en contacto con Presión atmosférica

CORRIENTES CERRADAS

P > Patm

ESCURRIMIENTOS EN FUNCIÓN DEL TIPO DE MOVIMIENTO

MOVIMIENTO LAMINAR

Escurrimiento ordenado, de líneas de flujo paralelas, que sólo se da en el caso de bajos caudales y velocidades pequeñas, predominan las fuerzas tangenciales producto de la viscosidad por encima de las de gravedad (o inercia).

MOVIMIENTO TURBULENTO

El escurrimiento es desordenado con trayectorias tortuosas, existe pasaje de partículas de un tubo de flujo a otro, y en el cual predominan las fuerzas tangenciales debidas al frotamiento del agua con las paredes de la tubería y entre tubos de flujo entre sí.

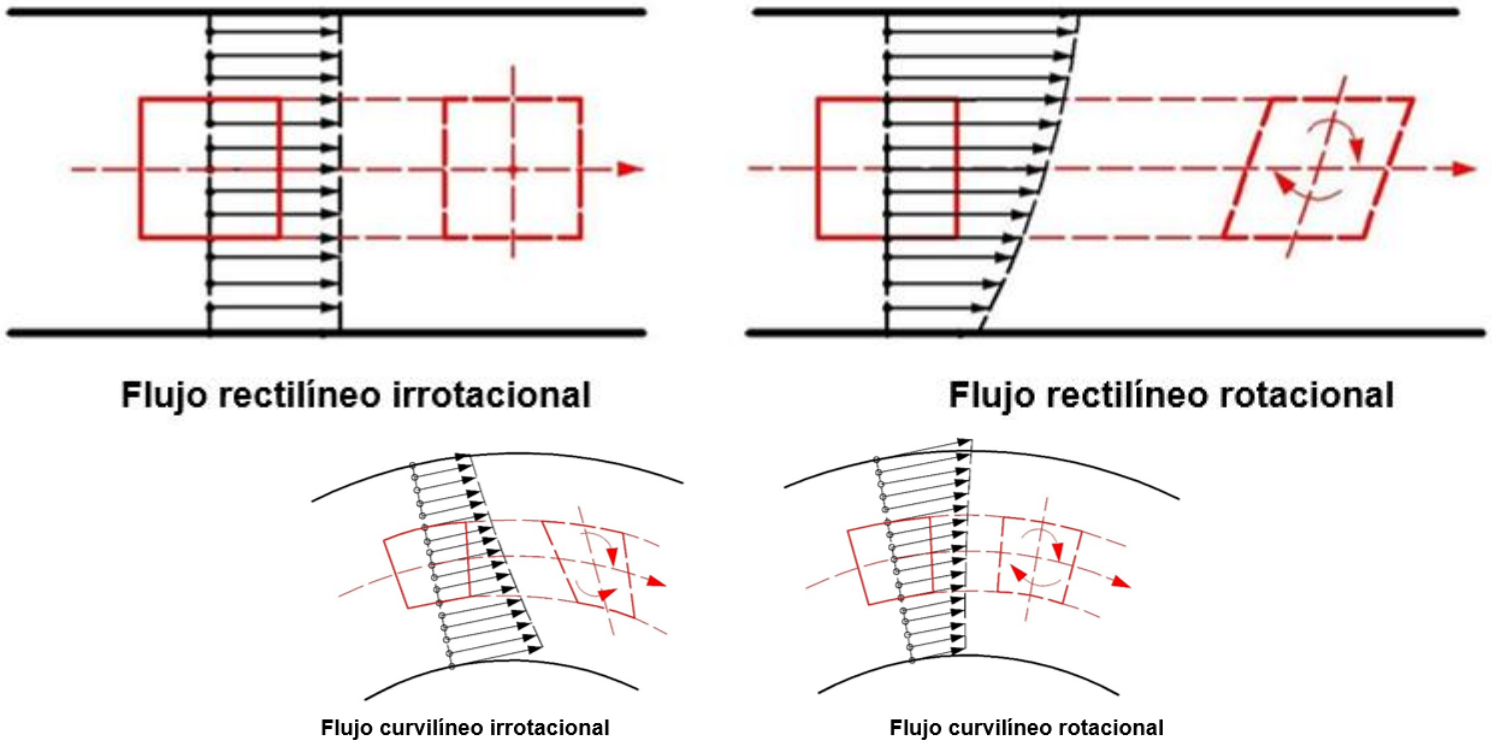
ESCURRIMIENTOS EN FUNCIÓN EL COMPORTAMIENTO DE LAS PARTÍCULAS LÍQUIDAS

MOVIMIENTO ROTACIONAL

Las partículas poseen componente de la velocidad que produce rotación alrededor de su centro de gravedad

MOVIMIENTO IRROTACIONAL

Cuando sus partículas no rotan alrededor de su centro de gravedad



ESCURRIMIENTOS EN FUNCIÓN EL COMPORTAMIENTO EN EL ESPACIO

MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL

Parámetros varían en el espacio, es decir existen gradientes en las tres direcciones (x, y, z).

MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL

Parámetros varían en dos direcciones, es decir en un plano (x, y) o (y, z).

MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL

Cuando las variaciones de la magnitudes hidráulicas se verifican a lo largo de una dirección, que coincide con la dirección del escurrimiento.

ESCURRIMIENTOS EN FUNCIÓN DE LAS CONDICIONES HIDRÁULICAS

RÉGIMEN DE RÍO O SUBCRÍTICO

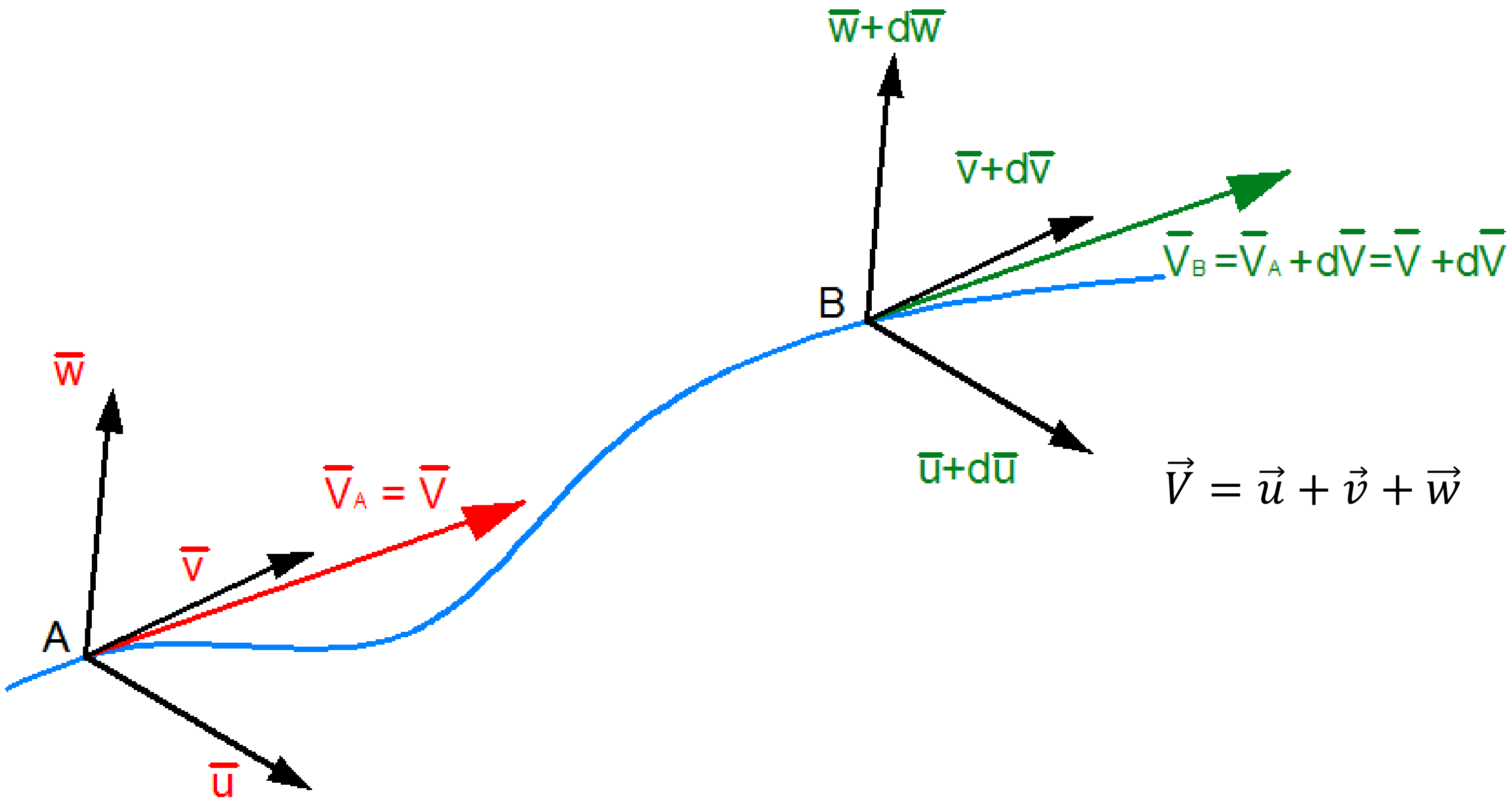
La velocidad del escurrimiento resulta menor que la velocidad crítica (corresponde a la condición de flujo de mínima energía), y además la altura de agua es mayor que la altura crítica. Predomina la energía potencial sobre la energía cinética.

RÉGIMEN DE TORRENTE O SUPERCRÍTICO

La velocidad de la canalización resulta mayor que la velocidad crítica, y la altura de agua menor que la altura crítica. Predomina la energía cinética, y su comportamiento es más inestable.

CAMPO DE VELOCIDADES (EULER)

$V = f(x, y, z, t)$ Para un instante determinado $V = f(x, y, z)$



$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + d\vec{V} = \vec{V} + d\vec{V} \rightarrow Pero \rightarrow \vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

Entonces:

$$\vec{V}_B = \vec{u}_B + \vec{v}_B + \vec{w}_B \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{u}_B = \vec{u} + d\vec{u} \\ \vec{v}_B = \vec{v} + d\vec{v} \\ \vec{w}_B = \vec{w} + d\vec{w} \end{Bmatrix} \Rightarrow d\vec{V} = d\vec{u} + d\vec{v} + d\vec{w}$$

CAMPO DE VELOCIDADES (EULER)

$$\vec{V}_B = \vec{u}_B + \vec{v}_B + \vec{w}_B = \vec{u} + d\vec{u} + \vec{v} + d\vec{v} + \vec{w} + d\vec{w} = \underbrace{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}}_{\vec{V}} + \underbrace{d\vec{u} + d\vec{v} + d\vec{w}}_{\overrightarrow{dV}}$$

$$\left.\begin{cases} \vec{u}_B = \vec{u} + d\vec{u} = \vec{u} + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz \\ \vec{v}_B = \vec{v} + d\vec{v} = \vec{v} + \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy + \dfrac{\partial v}{\partial z}dz \\ \vec{w}_B = \vec{w} + d\vec{w} = \vec{w} + \dfrac{\partial w}{\partial x}dx + \dfrac{\partial w}{\partial y}dy + \dfrac{\partial w}{\partial z}dz \end{cases}\right\} \to \vec{V}_B = \underbrace{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}}_{\vec{V}} + d\vec{V} \Rightarrow$$

$$d\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

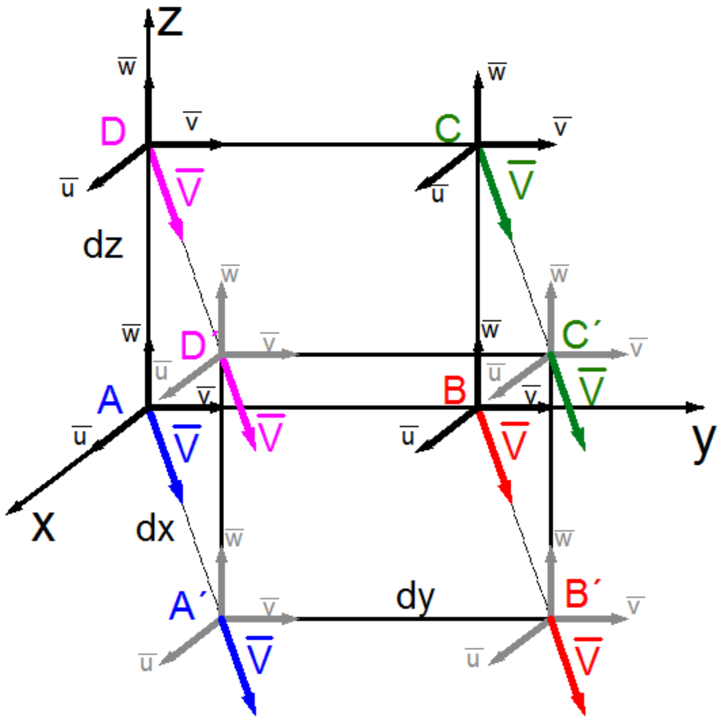
$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

LÍQUIDO EN REPOSO

Los 12 componentes de la expresión son nulos. La partícula no cambia

TRASLACIÓN PURA

Los tres primeros sumandos son los únicos distintos de cero



$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

No hay deformación

V cte en espacio y tpo MPU

CAMPO DE VELOCIDADES (EULER) ANÁLISIS

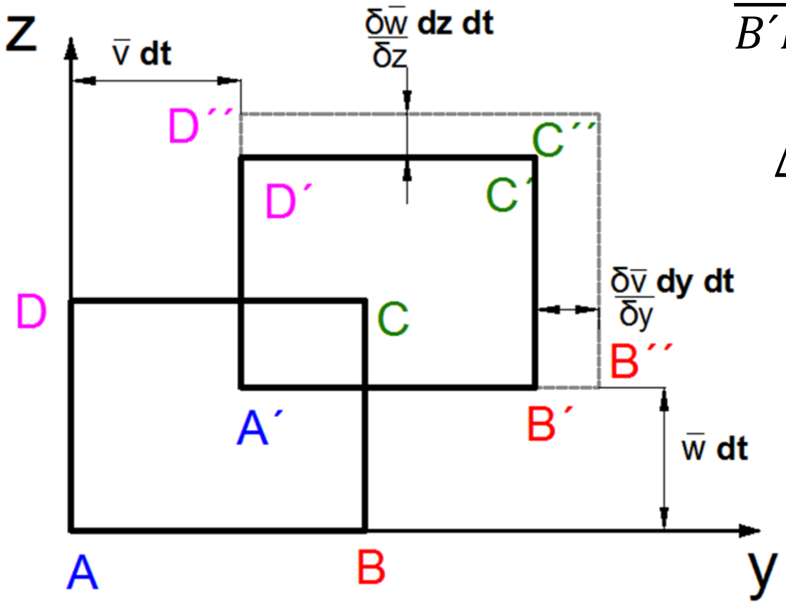
$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

DEFORMACIÓN LINEAL PURA

Las únicas derivadas distintas de cero son aquellas que están contenidas en el eje correspondiente (traslación y dilatación).

Analizamos el plano yz

$$\frac{\partial v}{\partial y} \neq 0 \wedge \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$$



$$\vec{V} = \vec{v} + \frac{\partial v}{\partial y} \times dy + \vec{w} + \frac{\partial w}{\partial z} \times dz$$

$$\overline{D'D"} = \frac{\partial w}{\partial z}dz \times dt \Rightarrow \Delta z = dz = \frac{\partial w}{\partial z}dz \times dt$$

$$\overline{B'B"} = \frac{\partial v}{\partial y}dy \times dt \Rightarrow \Delta y = dy = \frac{\partial v}{\partial y}dy \times dt$$

$$\Delta x = dx = \frac{\partial v}{\partial x} \times dx \times dt$$

Velocidad de deformación

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}dt \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}dt \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}dt$$

Deformación específica

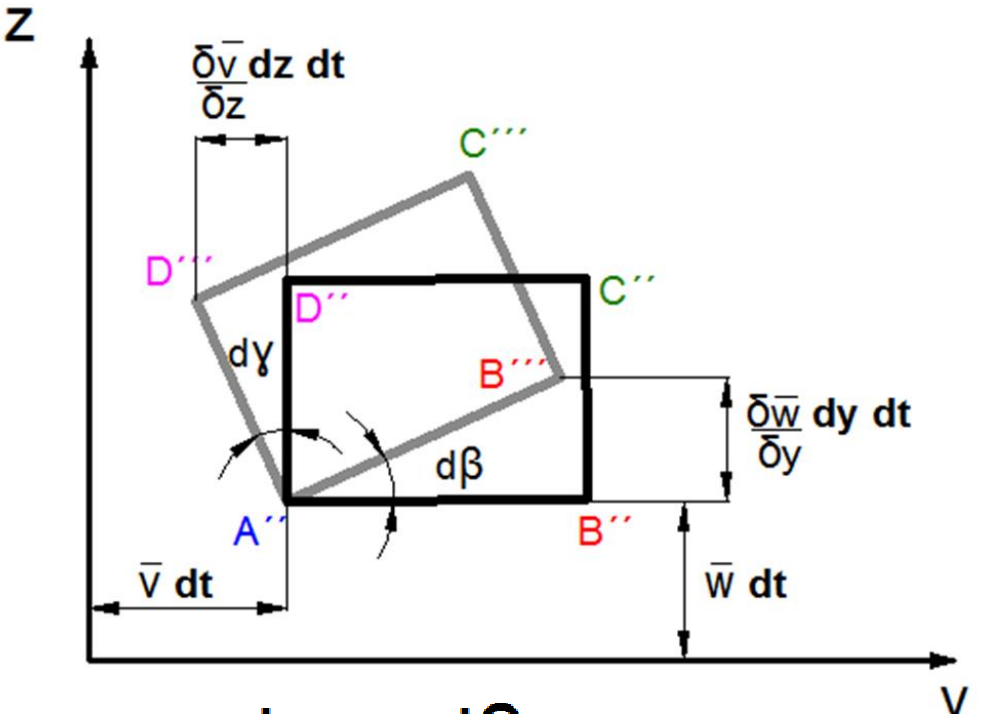
CAMPO DE VELOCIDADES (EULER) ANÁLISIS

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

ROTACIÓN EN SU PLANO

$$\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0 \wedge \frac{\partial v}{\partial z} \neq 0$$

Analizamos el plano yz



$$d\gamma = d\beta$$

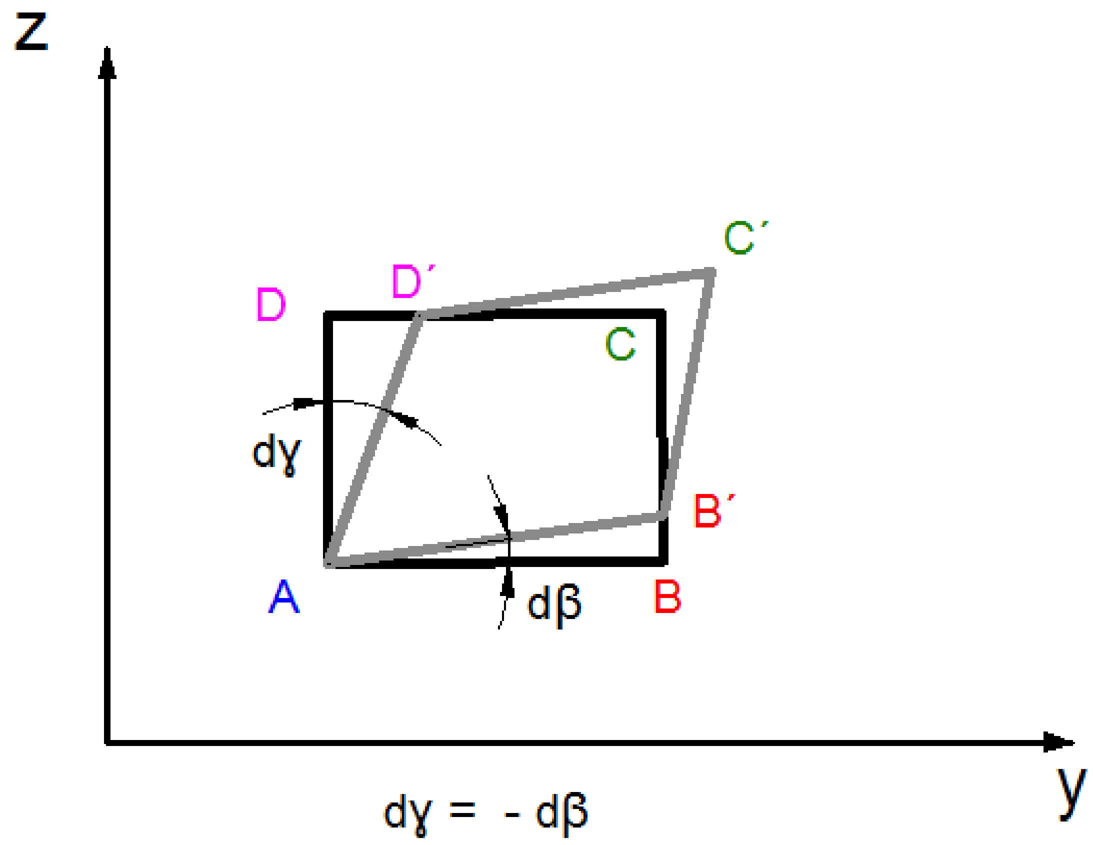
No hay deformación

CAMPO DE VELOCIDADES (EULER) ANÁLISIS

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

DEFORMACIÓN ANGULAR SIMPLE

Se giran ángulos iguales pero sentido contrario



CAMPO DE VELOCIDADES (EULER) ANÁLISIS

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

DESPLAZAMIENTO COMPLETO

En el tiempo t

A (x,y,z) $\xrightarrow{t}$ A´ (x+dx,y+dy,z+dz)

V_A (u,v,w) $\xrightarrow{t}$ $V_{A'}$ (u+du,v+dv,w+dw)

$V_{A'} = V_A + dV$

$$u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$
$$v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$
$$w + dw = w + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

Velocidad en A´ en t

CAMPO DE VELOCIDADES (EULER) ANÁLISIS

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

DESPLAZAMIENTO COMPLETO

En el tiempo (t+dt) las coordenadas de A serán:

$$x + dx + u.dt$$
$$y + dy + v.dt$$
$$z + dz + w.dt$$

Coordenadas de A en t + dt

$$x + dx + u.dt + \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)dt$$
$$y + dy + v.dt + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)dt$$
$$z + dz + w.dt + \left(\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)dt$$

Coordenadas de A´ en t+dt

CAMPO DE VELOCIDADES (EULER) ANÁLISIS

ACELERACIÓN

Variación de la velocidad en el tiempo

$$V = V(x, y, z, t)$$

$$a = \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{a_{total}} = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{a_{local}} + \underbrace{\frac{\partial V}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{dz}\frac{dz}{dt}}_{a_{convectiva}}$$

Aceleración Total = Local + Convectiva

Aceleración local: variación de la velocidad en la posición ocupada por la partícula cuando transcurre el tiempo. No por cambio de posición. Variación módulo: RAPIDEZ

Aceleración convectiva: se produce por efecto del "viaje de la partícula" dentro del campo de flujo. Se debe al cambio de posición. Variación dirección y sentido.

CAMPO DE ACELERACIONES (EULER) ANÁLISIS

ACELERACIÓN

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Componentes de la aceleración

$$a = \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{a_{total}} = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{a_{local}} + \underbrace{\frac{\partial V}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{dz}\frac{dz}{dt}}_{a_{convectiva}}$$

- Cuando la $a_{local} = 0$ el movimiento es permanente
- Cuando la $a_{local} \neq 0$ el movimiento es impermanente
- Cuando la $a_{convectiva} = 0$ el movimiento es MPU
- Cuando la $a_{convectiva} \neq 0$ el movimiento es MPV

CAMPO DE ACELERACIONES (EULER) ANÁLISIS

ACELERACIÓN

•Cuando la velocidad tiene módulo, dirección y sentido diferentes el movimiento es MI. $a_{local} \neq 0$

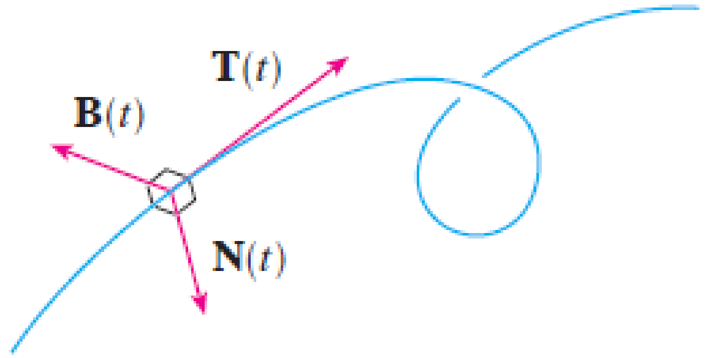
•Cuando el módulo de la velocidad permanece constante, y varían o su dirección o sentido o ambas el movimiento es MPV. $a_{local} = 0$

•Cuando el vector velocidad tiene módulo, dirección y sentido constantes, entonces el movimiento es MPU. $a_{local} = 0$ y $a_{convectiva} = 0$

CAMPO DE ACELERACIONES (EULER) ANÁLISIS

ACELERACIÓN

En cada punto de una línea de corriente (curva) se puede distinguir una dirección tangente a la misma (T), y una dirección normal a la tangente (N) que forman un plano, y una tercera dirección que se llama binormal (B). Esto forma un nuevo sistema de referencias, cualquier punto de la curva se puede referir a este sistema local.



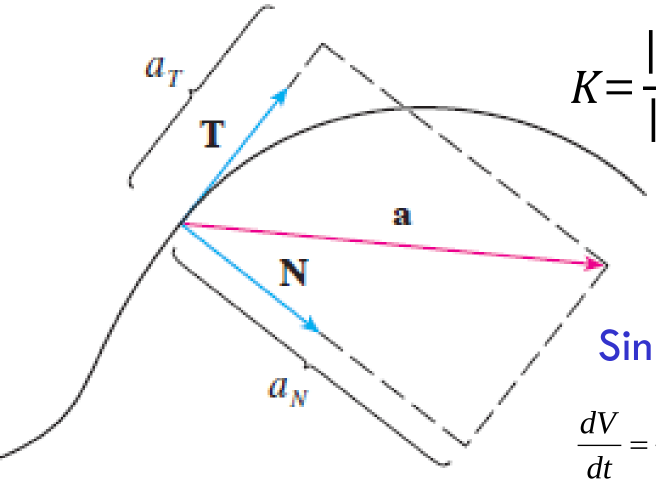
$$\hat{T} = \frac{\bar{r}'}{\|\bar{r}'\|} \qquad \hat{N} = \frac{\hat{T}'}{\|\hat{T}'\|} \qquad \hat{B} = \hat{T}\hat{N}$$

versores

$$\bar{V} = V\,\hat{T}$$

$$\bar{a} = \bar{V}' = \left(V\,\hat{T}\right)' = V'\,\hat{T} + V\,\hat{T}'$$

Utilizando la expresión de la curvatura de flexión o curvatura principal



$$K = \frac{\|\hat{T}'\|}{\|\bar{r}'\|} = \frac{\|\hat{T}'\|}{V} \Longrightarrow \|\hat{T}'\| = K\,V \Longrightarrow \hat{T}' = \|\hat{T}'\|\hat{N} = K\,V\hat{N}$$

$$\bar{a} = V'\,\hat{T} + K\,V^2\,\hat{N}$$

$$\boldsymbol{\bar{a} = a_t\,\hat{T} + a_n\,\hat{N}}$$

Sin componente binormal. Se puede obtener aceleración:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial V}{\partial s}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s}V = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial\left(V^2\right)}{\partial s} \Rightarrow a = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial\left(V^2\right)}{\partial s}\right]\hat{T} + \frac{V^2}{r}\hat{N}$$

ACELERACIÓN EN LA TERNA INTRÍNSECA

CONTENIDO

Hidrodinámica del agua

ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA HIDRODINÁMICA

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + X = 0$$
$$\frac{\partial P_y}{\partial y} + Y = 0$$
$$\frac{\partial P_z}{\partial z} + Z = 0$$

Ecuaciones de la hidroestática (EULER)

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Ecuaciones de la aceleración (EULER)

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + X = \delta . a_x$$
$$\frac{\partial P_y}{\partial y} + Y = \delta . a_y$$
$$\frac{\partial P_z}{\partial z} + Z = \delta . a_z$$

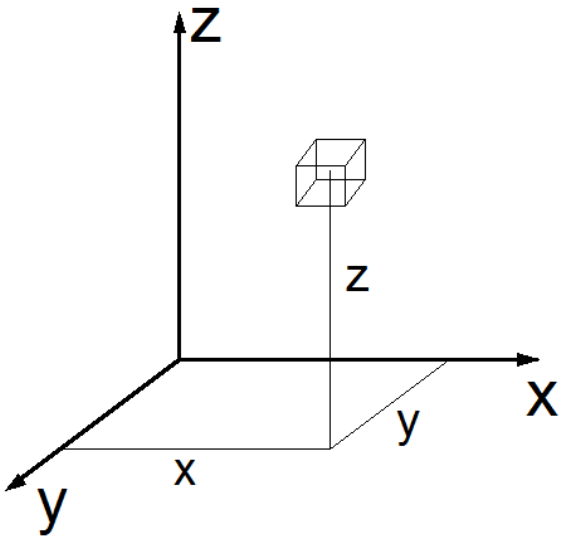
Si el fluido está en movimiento F = ma

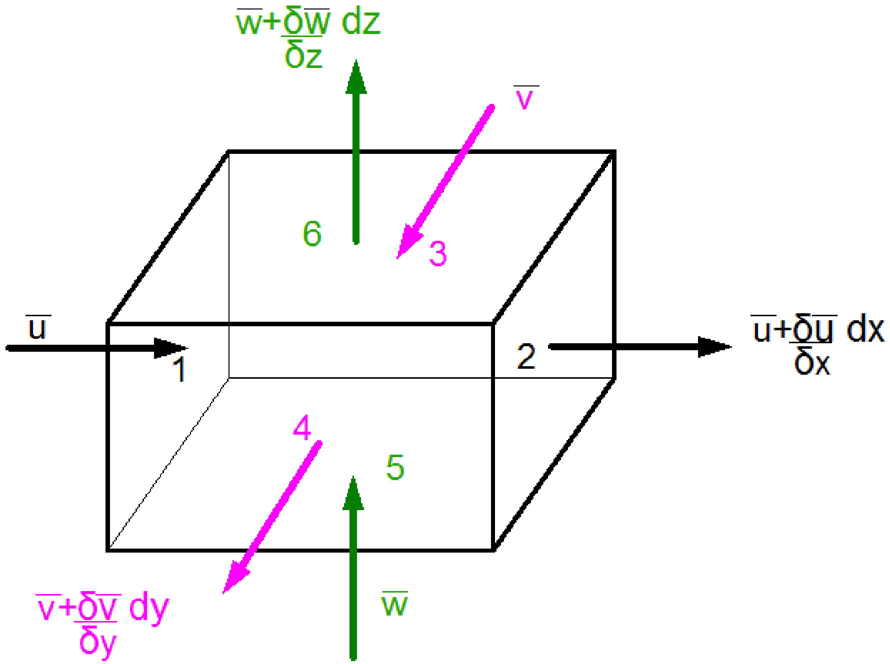
ECUACIONES DE LA HIDRODINÁMICA

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + X = \delta . \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$\frac{\partial P_y}{\partial y} + Y = \delta . \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$\frac{\partial P_z}{\partial z} + Z = \delta . \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas (p, u, v, w)

ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD





$$Ingreso = u.dz.dy$$

$$Egreso = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right).dz.dy$$

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right).dz.dy - u.dz.dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}.dz.dx.dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

FLUIDO INCOMPRESIBLE

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

HIDRODINÁMICA DEL AGUA

LÍQUIDOS PERFECTOS

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + X = \delta.\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial P_y}{\partial y} + Y = \delta.\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} + Z = \delta.\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

ECUACIONES DE LA HIDRODINÁMICA

Sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas (p, u, v, w)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD

Sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas (p, u, v, w)
Válido para la hidrodinámica de un líquido perfecto

HIDRODINÁMICA DEL AGUA

DIFERENCIA ENTRE CINEMÁTICA E HIDRODINÁMICA

CINEMÁTICA: Movimiento de una partícula sin tener en cuenta las fuerzas que lo producen, ni las masas que intervienen

HIDRODINÁMICA: Movimiento de una partícula teniendo en cuenta las fuerzas que lo producen y las masas que intervienen

FUERZAS INTERVINIENTES

- **Fuerzas de superficie debidas a: presión (Fp), viscosidad (Fμ) y tensión superficial.**
- **Fuerzas de masa debidas a la acción de la gravedad (Fm) y la inercia (Fi).**
- **Fuerzas Elásticas debidas a la compresibilidad del fluido.**

Despreciando tensión superficial y compresibilidad

$$F_m + F_\mu + F_p - F_i = 0$$

Fzas de masa más Fzas viscosas más Fzas de presión deben ser iguales a la fuerzas de inercia

TEOREMA DE BERNOULLI

- **Aplicación de las ecuaciones fundamentales de la Hidrodinámica al movimiento permanente del líquido perfecto**

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + X = \delta.\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$\frac{\partial P_y}{\partial y} + Y = \delta.\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$\frac{\partial P_z}{\partial z} + Z = \delta.\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- **MP: las variables independientes del tiempo, las derivadas parciales son nulas**

$$\frac{\partial P_x}{\partial x}dx + X.dx = \delta.\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right).dx$$
$$\frac{\partial P_y}{\partial y}dy + Y.dy = \delta.\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right).dy$$
$$\frac{\partial P_z}{\partial z}dz + Zdz = \delta.\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right).dz$$

Multiplicamos por dx, dy y dz

HIDRODINÁMICA DEL AGUA

TEOREMA DE BERNOULLI

- **Reemplazamos u, v, w**

$$\delta.\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{dy}{dt}\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{dz}{dt}\frac{\partial u}{\partial z}dx\right)\ \delta.\left(\frac{\partial u}{\partial x}.u.dx+\frac{\partial u}{\partial y}.u.dy+\frac{\partial u}{\partial z}.u.dz\right)=\delta.u.du$$

$$\delta.\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial v}{\partial x}dy+\frac{dy}{dt}\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{dz}{dt}\frac{\partial v}{\partial z}dy\right)\ \delta.\left(\frac{\partial v}{\partial x}.v.dx+\frac{\partial v}{\partial y}.v.dy+\frac{\partial v}{\partial z}.v.dz\right)=\delta.v.dv$$

$$\delta.\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial w}{\partial x}dz+\frac{dy}{dt}\frac{\partial w}{\partial y}dz+\frac{dz}{dt}\frac{\partial w}{\partial z}dz\right)\delta.\left(\frac{\partial w}{\partial x}.w.dx+\frac{\partial w}{\partial y}.w.dy+\frac{\partial w}{\partial z}.w.dz\right)=\delta.w.dw$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial x}dx+X.dx=\delta.u.du$$

$$\frac{\partial P_y}{\partial y}dy+Y.dy=\delta.v.dv$$

$$\frac{\partial P_z}{\partial z}dz+Zdz=\delta.w.dw$$

$$\underbrace{\frac{\partial P_x}{\partial x}dx+\frac{\partial P_y}{\partial y}dy+\frac{\partial P_z}{\partial z}dz}_{dp}+X.dx+Y.dy+Zdz=\delta.(u.du+v.dv+w.dw)$$

$$dp+X.dx+Y.dy+Zdz=\delta.(u.du+v.dv+w.dw)$$

- **Considerando el vector V, consideramos el cuadrado de la velocidad instantánea, aplicando el Teorema de Pitágoras en el espacio (escalar)**

$$\vec{V}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\Rightarrow V^2=u^2+v^2+w^2$$

$$d(V^2)=2.(u.du+v.dv+w.dw)\Rightarrow\frac{1}{2}d(V^2)=(u.du+v.dv+w.dw)$$

$$dp+X.dx+Y.dy+Zdz=\delta.\left(\frac{1}{2}d(V^2)\right)$$

HIDRODINÁMICA DEL AGUA

TEOREMA DE BERNOULLI

- **Por la acción del peso: X = Y = 0; Z = - δg**

$$-dp - \delta g.dz = \delta.\left(\frac{1}{2}d(V^2)\right)$$

Supusimos las presiones salientes a las caras y en realidad son entrantes

- **Integrando a lo largo de una línea de corriente:**

$$-p - \delta.g.z = \delta.\frac{1}{2}.V^2 + cons\tan t\, e$$

$$p + \delta.g.z + \delta.\frac{1}{2}.V^2 = cons\tan t\, e$$

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{\delta.g.z}{\gamma} + \frac{\delta}{\gamma}.\frac{1}{2}.V^2 = cons\tan t\, e$$

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{1}{2.g}.V^2 = cons\tan t\, e = Bernoulli$$

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = cons\tan t\, e = Bernoulli$$

- **Teorema de Bernoulli para líquidos perfectos y válido para una línea de corriente**

HIDRODINÁMICA DEL AGUA

INTERPRETACIÓN ENERGÉTICA DEL TB

- **z: representa la energía potencial por unidad de peso referida a un plano de comparación**

$$z = [E.Potencial] = \left[\frac{M.g.z}{M.g}\right] = [z] = [L]$$

- **p/γ: representa la energía de presión por unidad de peso**

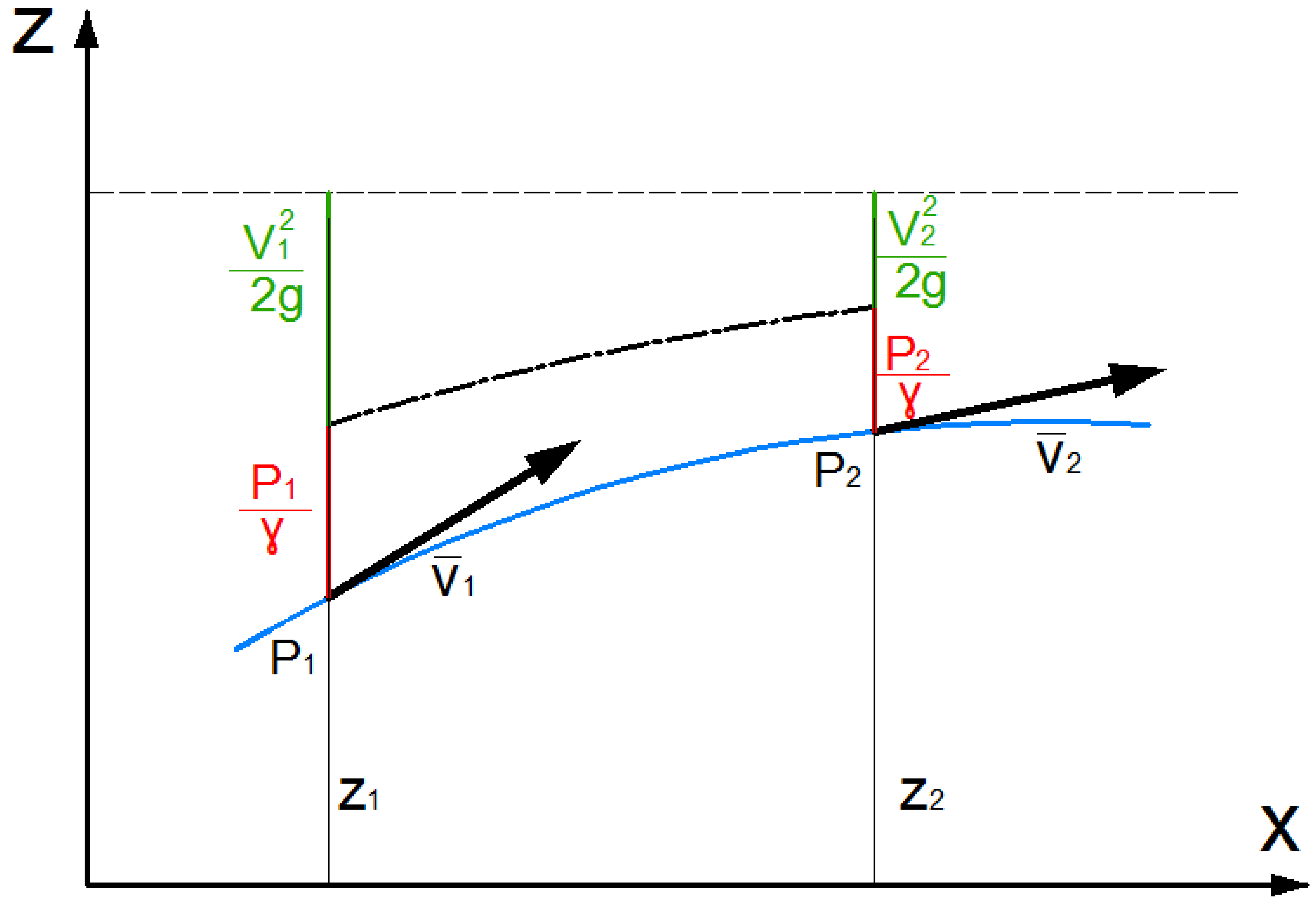
$$\frac{p}{\gamma} = [E.\text{Pr}\,e\,\text{sión}] = \left[\frac{\gamma.h}{\gamma}\right] = [h] = [L]$$

- **V2/2g: representa la energía cinética o de velocidad por unidad de peso**

$$\frac{V^2}{2.g} = [E.Velocidad] = \left[\frac{M.V^2}{M.g}\right] = \left[\frac{V^2}{g}\right] = \left[\frac{L^2}{T^2}.\frac{T^2}{L}\right] = [L]$$

HIDRODINÁMICA DEL AGUA

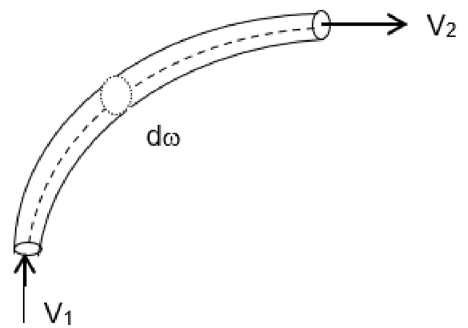
INTERPRETACIÓN ENERGÉTICA DEL TB



HIDRODINÁMICA DEL AGUA

CAUDAL, GASTO O DESCARGA

Cantidad de líquido que circula por unidad de tiempo



$$dQ = \frac{dVol}{dt}$$

$$dVol = \underbrace{Vdt}_{longitud} \;\; d\omega = dQdt$$

$$dQ = Vd\omega$$

$$Q = \int_{\omega} Vd\omega$$

Se puede integrar la velocidad instantánea si se conoce la función de variación, o se puede definir una velocidad media U, como la velocidad que multiplicada por la sección nos da Q, es decir: Q = UΩ

$$Q = \int_{\omega} Vd\omega = U\Omega \Rightarrow U = \frac{\int_{\omega} Vd\omega}{\Omega} = \frac{Q}{\Omega}$$

$$Q_1 = U_1\Omega_1$$

$$Q_2 = U_2\Omega_2$$

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow U_1\Omega_1 = U_2\Omega_2 = \text{constante}$$

- **Ecuación de Continuidad para movimiento permanente (MPU y MPV)**

HIDRODINÁMICA DEL AGUA

CAUDAL, GASTO O DESCARGA

Continuidad para movimiento impermanente (principio de conservación de la materia). Se analizan el equilibrio entre dos secciones de un tubo de flujo

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$$

- **Ecuación de Continuidad para MI y fluidos incompresibles**

Si el fluido es compresible la densidad no es constante, sino función de la presión y no puede simplificarse:

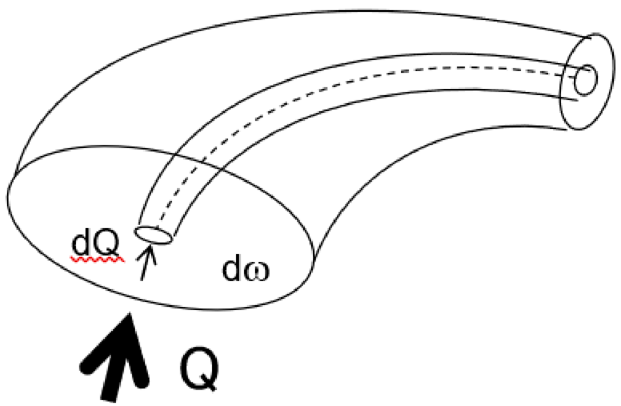
$$\frac{\partial (Q\delta)}{\partial s} + \frac{\partial (\omega\delta)}{\partial t} = 0$$

- **Ecuación de Continuidad para MI y fluidos compresibles**

GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE BERNOULLI PARA TODA LA CORRIENTE

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = cons\tan t\, e = Bernoulli$$

- **El Bernoulli es la energía por unidad de peso, si se multiplica y divide por (dq·g) se obtiene la energía por unidad de tiempo asociada a un dq que corresponde a una línea de corriente. Luego integramos**



$$\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}\right)\gamma dQ$$

$$\int_Q \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}\right)\gamma dQ = \text{Constante}$$

- **Valor medio de la energía**

$$Q = U\Omega \Rightarrow dq = Vd\omega$$

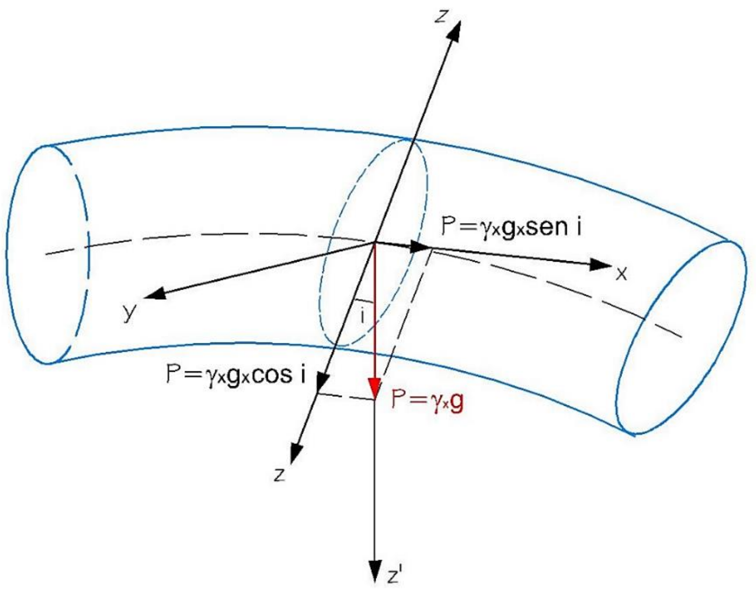
$$\frac{1}{Q\gamma}\int_Q \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}\right)\gamma dQ = B_{medio}$$

$$\frac{1}{U\Omega}\int_\omega \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}\right)Vd\omega = B_{medio}$$

HIDRODINÁMICA DEL AGUA

GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE BERNOULLI PARA TODA LA CORRIENTE

- **En líneas de corriente para pequeña curvatura, es válida la ley hidroestática y podemos aplicar las Ec. de Euler y al igual que antes podemos aplicar y llegar a las ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA HIDRODINÁMICA al área en estudio (no una línea).**



$$\frac{\partial p}{\partial x} + X = \delta a_x \Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} + \delta g seni = \delta a_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + Y = \delta a_y \Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial y} + 0 = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + Z = \delta a_z \Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} - \delta g \cos i = 0$$

$$v = w = 0 \,(movimiento\ en\ x)$$

$$a_y = a_z = 0 \,(movimiento\ en\ x)$$

HIDRODINÁMICA DEL AGUA

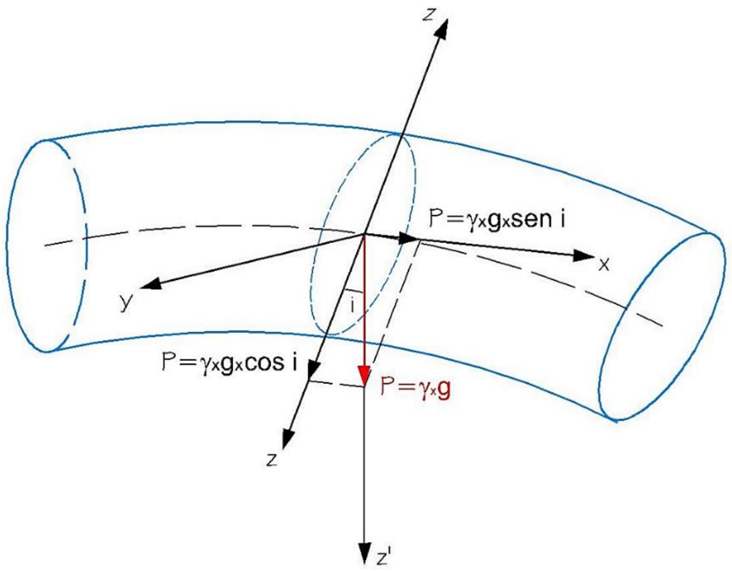
GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE BERNOULLI PARA TODA LA CORRIENTE

- **Podemos usar derivadas totales (presión varía en z):**

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \delta g\, cos\, i = 0$$

$$\int dp + \int \delta g\, cos\, i\, dz = 0$$

$$p + \gamma z cos i = Constante$$



$$p + \gamma z' = Constante$$

- **Volviendo a la integral original**

$$\left[\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) + \frac{1}{U\Omega}\int_{\omega}\left(\frac{V^2}{2g}\right)V d\omega\right] = B_{medio}$$

- **Considerando la velocidad media U**

HIDRODINÁMICA DEL AGUA

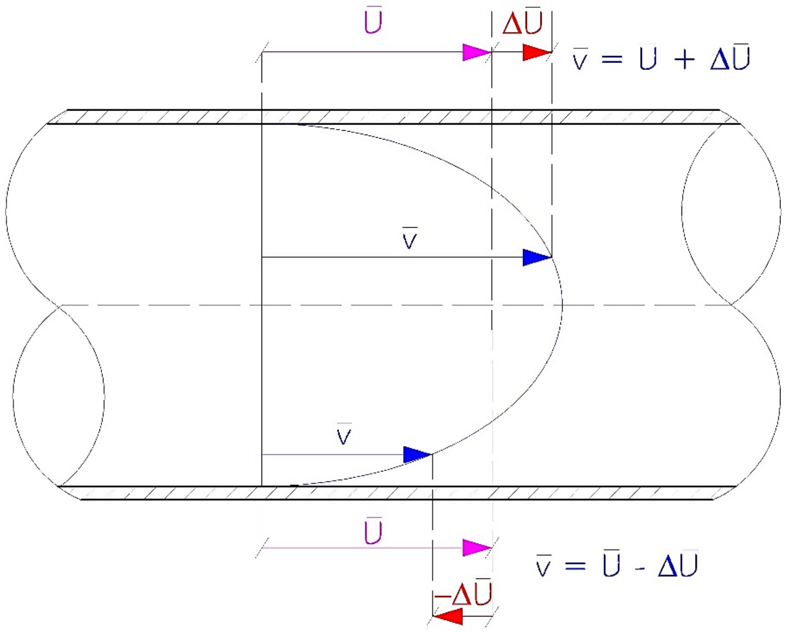
GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE BERNOULLI PARA TODA LA CORRIENTE

- **Velocidad instantánea V puede expresarse en función de la velocidad media U, mediante la expresión:**

$$V = U \pm \mathit{\Delta} U \rightarrow \frac{V}{U} = 1 + \frac{\mathit{\Delta} U}{U}$$

$$Cuadrado: \left(\frac{V}{U}\right)^2 = \left(1 + \frac{\Delta U}{U}\right)^2 = 1 + 2\frac{\Delta U}{U} + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2$$

$$Cubo: \left(\frac{V}{U}\right)^3 = \left(1 + \frac{\Delta U}{U}\right)^3 = 1 + 3\left(\frac{\Delta U}{U}\right) + 3\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^3$$



$$\frac{1}{\mathit{\Omega}} \int_{\omega} \frac{V}{U} d\omega = \frac{1}{\mathit{\Omega}} \int_{\omega} \left(1 + \frac{\mathit{\Delta} U}{U}\right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{\mathit{\Omega}} \int_{\omega} (d\omega) + \frac{1}{\mathit{\Omega}} \int_{\omega} \left(\frac{\mathit{\Delta} U}{U}\right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{\mathit{\Omega}} \times \mathit{\Omega} + \frac{1}{\mathit{\Omega}} \int_{\omega} \left(\frac{\mathit{\Delta} U}{U}\right) d\omega$$

$$= 1 + \frac{1}{\mathit{\Omega}} \int_{\omega} \left(\frac{\mathit{\Delta} U}{U}\right) d\omega$$

La integral resulta cero

$$\frac{1}{\mathit{\Omega}} \int_{\omega} \frac{V}{U} d\omega = 1$$

HIDRODINÁMICA DEL AGUA

GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE BERNOULLI PARA TODA LA CORRIENTE

- **Segunda potencia**

$$V = U \pm \Delta U \rightarrow \frac{V}{U} = 1 + \frac{\Delta U}{U}$$

$$Cuadrado: \left(\frac{V}{U}\right)^2 = \left(1+\frac{\Delta U}{U}\right)^2 = 1 + 2\frac{\Delta U}{U} + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2$$

$$Cubo: \left(\frac{V}{U}\right)^3 = \left(1+\frac{\Delta U}{U}\right)^3 = 1 + 3\left(\frac{\Delta U}{U}\right) + 3\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^3$$

$$\frac{1}{\Omega}\int_\omega \left(\frac{V}{U}\right)^2 d\omega = \frac{1}{\Omega}\int_\omega \left(1+\frac{\Delta U}{U}\right)^2 d\omega = \frac{1}{\Omega}\int_\omega \left[1 + 2\frac{\Delta U}{U} + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2\right] d\omega$$

$$\frac{1}{\Omega}\int_\omega \left(\frac{V}{U}\right)^2 d\omega = \frac{1}{\Omega}\int_\omega (d\omega) + \underbrace{\frac{1}{\Omega}\int_\omega \left(2\frac{\Delta U}{U}\right) d\omega}_{0} + \underbrace{\frac{1}{\Omega}\int_\omega \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 d\omega}_{\eta}$$

$$\beta = \frac{1}{\Omega}\int_\omega \left(\frac{V}{U}\right)^2 d\omega = 1 + 0 + \eta$$

$$\eta = \frac{1}{\Omega}\int_\omega \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 d\omega$$

Definimos los coeficientes de velocidad

HIDRODINÁMICA DEL AGUA

GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE BERNOULLI PARA TODA LA CORRIENTE

- **Tercera potencia**

$$\frac{1}{\Omega}\int_{\omega}\left(\frac{V}{U}\right)^3 d\omega = \frac{1}{\Omega}\int_{\omega}\left(1+\frac{\Delta U}{U}\right)^3 d\omega = \frac{1}{\Omega}\int_{\omega}\left[1+3\frac{\Delta U}{U}+3\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2+\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^3\right] d\omega$$

$$\frac{1}{\Omega}\int_{\omega}\left(\frac{V}{U}\right)^3 d\omega = \frac{1}{\Omega}\int_{\omega}(d\omega) + \underbrace{\frac{1}{\Omega}\int_{\omega}\left(3\frac{\Delta U}{U}\right) d\omega}_{0} + \underbrace{\frac{1}{\Omega}\int_{\omega} 3\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 d\omega}_{3.\eta} + \underbrace{\frac{1}{\Omega}\int_{\omega}\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^3 d\omega}_{\xi}$$

Definimos un nuevo coeficiente llamado "Coeficiente de Coriolis", α

$$\alpha = \frac{1}{\Omega}\int_{\omega}\left(\frac{V}{U}\right)^3 d\omega = 1 + 3\eta + \xi$$

$$\alpha \in [1,2]$$

- **El coeficiente de Coriolis mide la mayor o menor diferencia que tiene la función velocidad instantánea respecto de una distribución uniforme de velocidad en la sección transversal**

GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE BERNOULLI PARA TODA LA CORRIENTE

- **Volviendo a la ecuación de Bernoulli medio**

$$\left[\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)+\frac{1}{U\Omega}\int_{\omega}\left(\frac{V^3}{2g}\right)d\omega\right]=B_{medio}$$

$$\frac{1}{\Omega}\int_{\omega}\left(\frac{V}{U}\right)^3 d\omega=1+0+3\eta+\xi=\alpha\Rightarrow\int_{\omega}V^3 d\omega=\alpha U^3\omega$$

$$\left[\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)+\frac{1}{U\Omega}\frac{1}{2g}\alpha U^3\Omega\right]=B_{medio}$$

$$\boldsymbol{z+\frac{p}{\gamma}+\alpha\frac{U^2}{2g}=B_{medio}}$$

- **Generalización del teorema de Bernoulli para toda la corriente**

Tabla 1. Valores de α y β propuestos por Kolupaila. Sotelo Ávila (1997)

Tipo de canalización	Valores de α			Valores de β		
	Mínimo	Medio	Máximo	Mínimo	Medio	Máximo
Canales rectangulares, acueductos, vertederos	1,10	1,15	1,20	1,03	1,05	1,07
Ríos naturales y torrentes	1,15	1,30	1,50	1,05	1,10	1,17
Ríos bajo una cubierta de hielo	1,20	1,50	2,00	1,07	1,17	1,33
Ríos de valle con cauce de inundación	1,50	1,75	2,00	1,17	1,25	1,33

TEOREMA DE BERNOULLI EN LÍQUIDOS REALES

Pérdidas de carga o energía

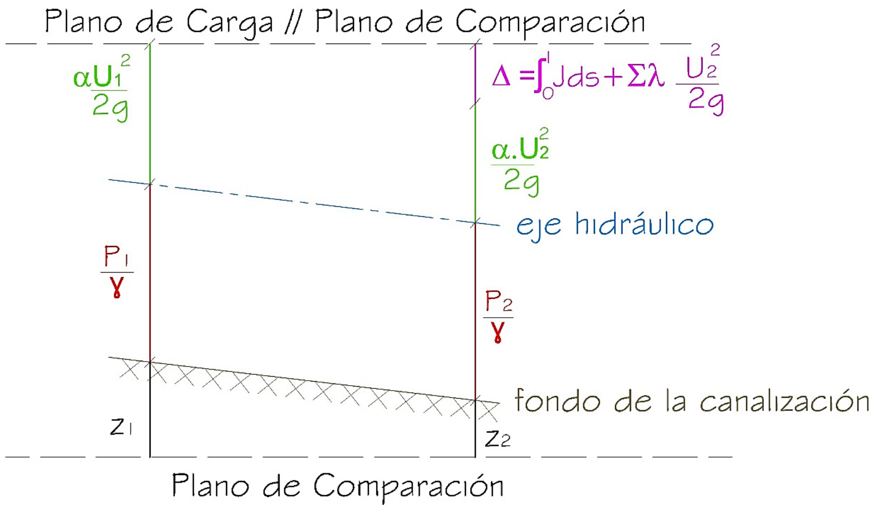
- Continuas (viscosidad del agua y aspereza de paredes; Δc)
- Localizadas o singulares (distorsiones del escurrimiento, puntual; Δs)

$$\Delta c = \int_0^l J\, ds \qquad \Delta s = \lambda \frac{U^2}{2g}$$

$$\boldsymbol{z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} + \int_0^l J\, ds + \sum_{i=1}^{n} \lambda \frac{U^2}{2g}}$$

Teorema de Bernoulli generalizado a toda la corriente y para líquidos reales. Se aplica al eje hidráulico y este se define como:

- Canalizaciones abiertas: superficie de agua
- Canalizaciones cerradas: baricentro de las sucesivas secciones



HIDRODINÁMICA DEL AGUA

CURVA DE ENERGÍA

$$\boldsymbol{z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{U^2}{2g} = B_{medio}}$$

Si consideramos un canal y tomamos Bernoulli al fondo del canal (de ancho b y altura h):

$$B_{fondo} = h + \alpha\frac{U^2}{2g}$$

Movimiento turbulento, por lo que α será muy similar a 1:

$$B_{fondo} = h + \alpha\frac{U^2}{2g}; Q = U\Omega = Ubh \Longrightarrow U = \frac{Q}{bh}$$

Reemplazando la velocidad media en la ecuación de Bernoulli respecto al fondo:

$$B_{fondo} = h + \frac{Q^2}{b^2h^2 2g} = h + \frac{Q^2}{2gb^2}\frac{1}{h^2}$$

$$B_{fondo} = h + \text{cte}\ \frac{1}{h^2}$$

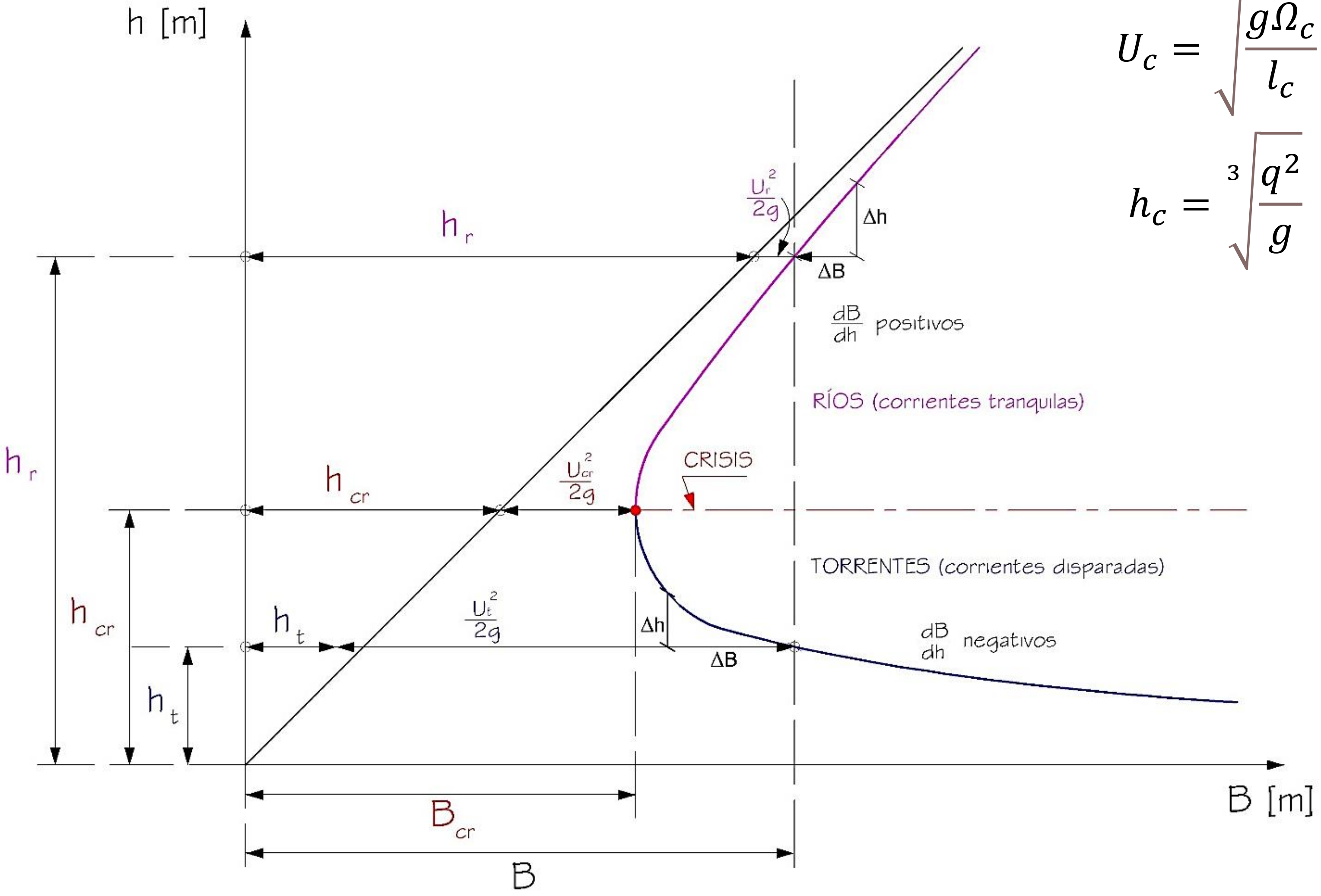
HIDRODINÁMICA DEL AGUA

CURVA DE ENERGÍA

$$B_{fondo} = h + \text{cte}\,\frac{1}{h^2}$$

$$U_c = \sqrt{\frac{g\Omega_c}{l_c}}$$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$



HIDRODINÁMICA DEL AGUA

CONTENIDO

Ejercicios

FIN DE LA TEORÍA!!!

EJERCICIOS