
Sistemas de Alma Llena en el Plano. Trazado de Diagramas Característicos

<i>Materia</i>	Estabilidad I
<i>Autor</i>	Marta Amani

Introducción

Los esfuerzos característicos son las sollicitaciones producidas por las cargas que actúan en una estructura, estos serán unas de las causas condicionantes en el dimensionamiento de los diferentes elementos estructurales que la compongan.

Definición

Considérese una estructura plana formada por una única barra bajo la acción de un sistema de cargas externas en equilibrio. (fig.1).

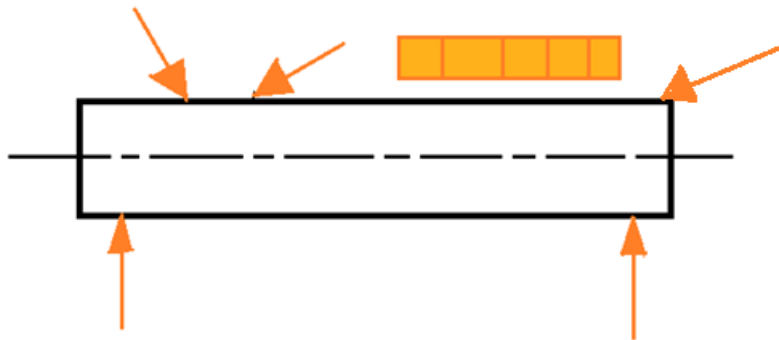


Fig.1

Si se divide a la barra en dos partes a través de un plano perpendicular al eje del elemento, cada una de las partes perderá el equilibrio. Para restituirlo deberán considerarse las resultantes parciales R_i y R_d correspondientes. (fig.2). Si se considera la parte izquierda de la barra, para que esta pueda permanecer en equilibrio se debe considerar la resultante de todas las fuerzas que actúan en la sección derecha R_d , y viceversa, si consideramos la parte derecha de la barra, el equilibrio se restablece con la resultante de todas las fuerzas que actúan en la parte izquierda R_i . (fig.2)

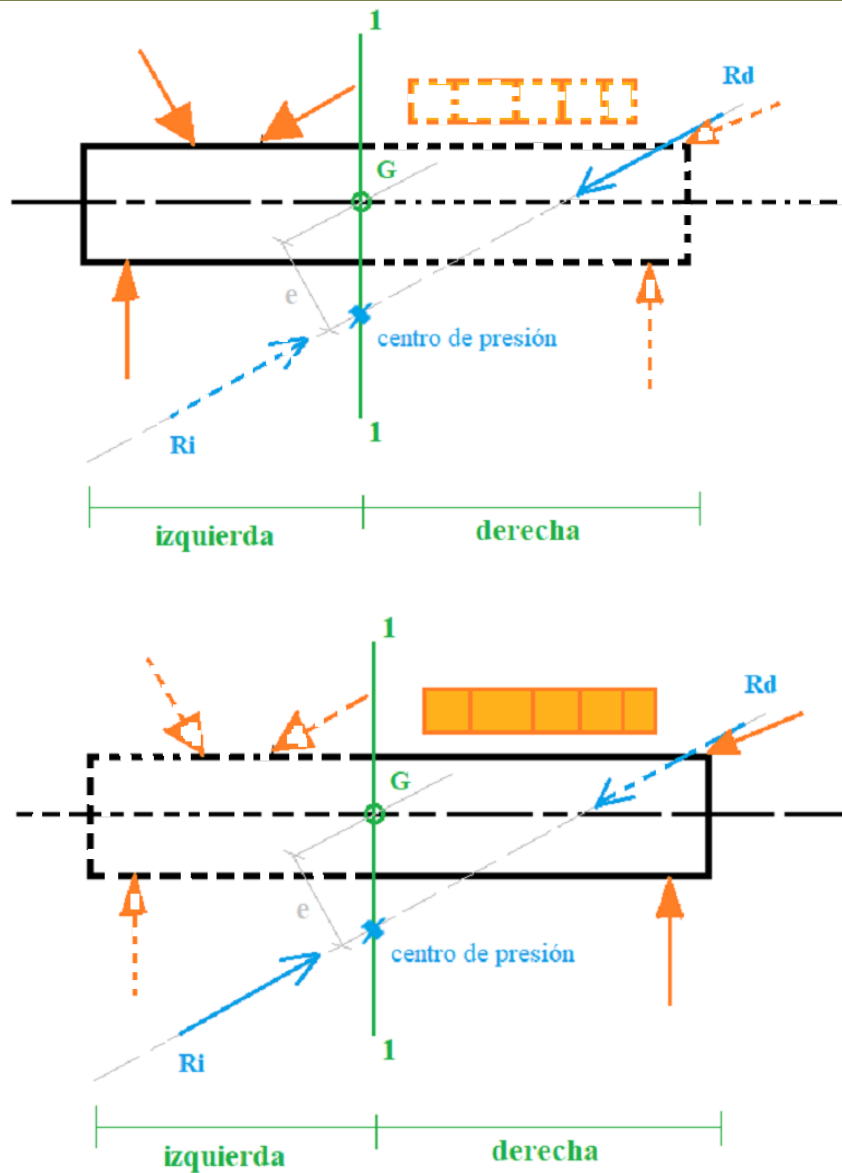


Fig.2

Si se analiza el equilibrio de la parte izquierda, y tomando como referencia el eje baricéntrico se tiene (fig.3): $|M| = R_d \cdot e$ $\bar{R}_d = \bar{N} + \bar{Q}$

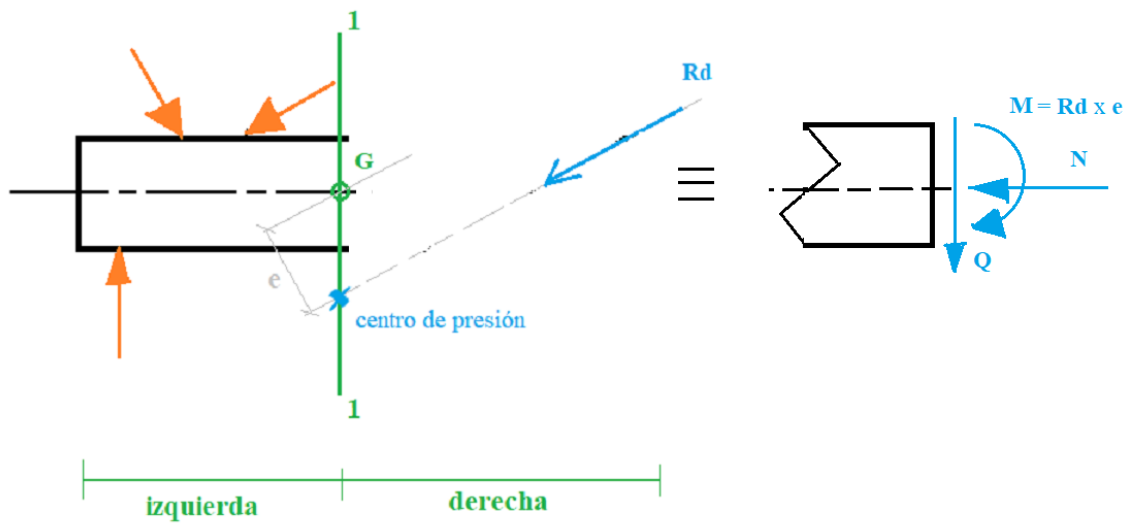


Fig.3

De igual modo, analizando el equilibrio de la parte derecha se tiene (fig.4):

$$|M| = R_i \cdot e \quad \bar{R}_i = \bar{N} + \bar{Q}$$

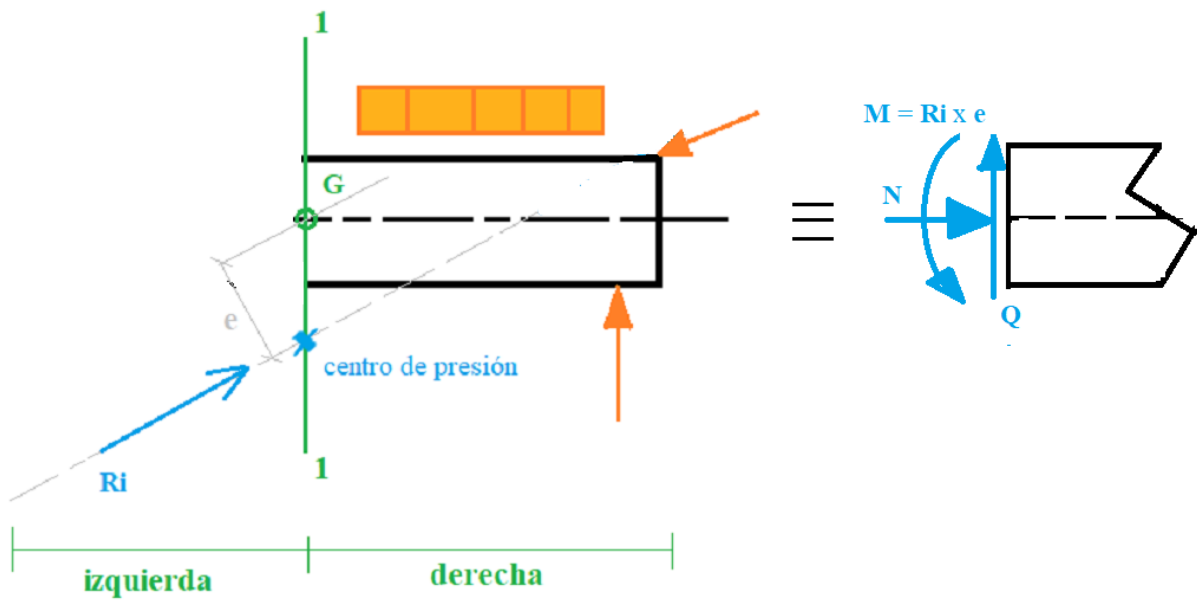


Fig.4

Así, se puede definir:

Momento flector en una sección transversal de una estructura plana de alma llena: es el momento respecto a su baricentro de la resultante de las fuerzas internas que se desarrollan a la izquierda o derecha de dicha sección.

El esfuerzo de corte en una sección transversal de una estructura plana de alma llena: es la proyección perpendicular al eje baricéntrico de la resultante de las fuerzas internas que se desarrollan a la izquierda o derecha de dicha sección.

El esfuerzo normal en una sección transversal de una estructura plana de alma llena: es la proyección paralela al eje baricéntrico de la resultante de las fuerzas internas que se desarrollan a la izquierda o derecha de dicha sección.

Convención de signos

En la figura 5 y 6 se representan los esfuerzos característicos positivos para cara izquierda y cara derecha, y las componentes de las sollicitaciones que los originan respectivamente.

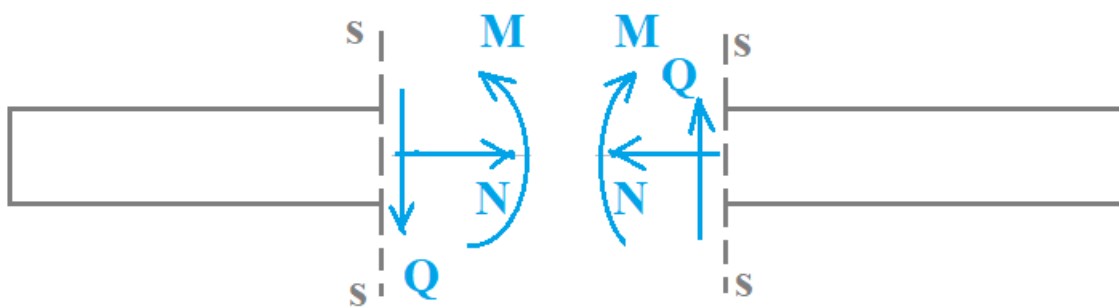


Fig.5

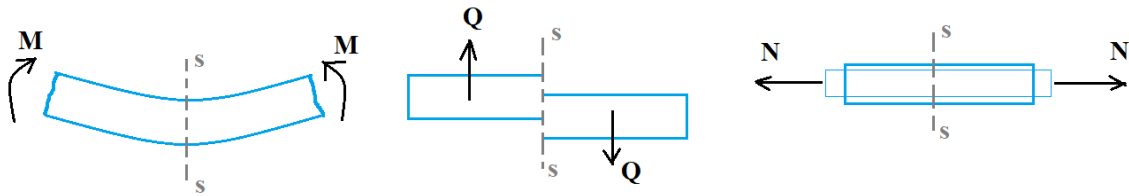


Fig.6

Analizando la figura 6 se puede observar que:

- Las fuerzas exteriores que originan momentos flectores positivos tienden a curvar la barra traccionando (estirando) las fibras inferiores y comprimiendo (acortando) las superiores.
- Las fuerzas exteriores que originan cortes positivos tienden a cortar la barra en la sección s-s desplazando la parte izquierda hacia arriba y la derecha hacia abajo.
- Las fuerzas exteriores que originan esfuerzos normales positivos tienden a alargar la barra traccionándola.

Relaciones diferenciales entre la carga, el corte y el momento flector

Estudiando el equilibrio de un elemento diferencial de barra sometido a la acción de fuerzas exteriores y esfuerzos característicos se pueden deducir expresiones matemáticas que facilitan el análisis de las funciones M , Q , N que se desean graficar.

Consideremos una porción diferencial de barra de longitud dx que se encuentra en equilibrio bajo la acción de cargas distribuidas (fig.7). Planteando las ecuaciones de equilibrio se tiene:

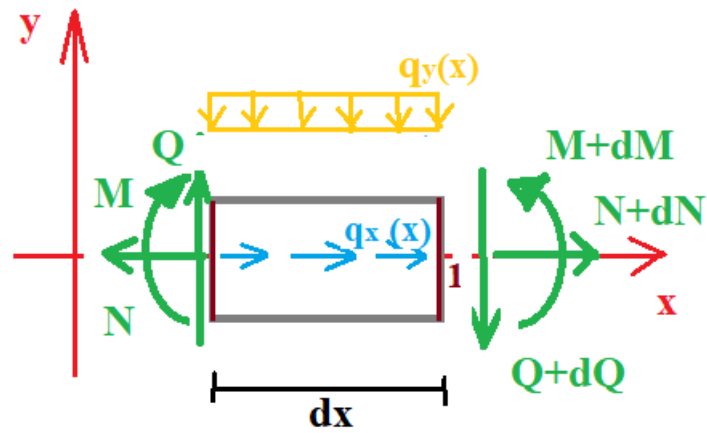


Fig.7

$$\sum F_x = 0 \quad -N + q_x dx + (N + dN) = 0$$

$$\boxed{\frac{dN}{dx} = -q_x}$$

$$\sum F_y = 0 \quad Q - q_y dx - (Q + dQ) = 0$$

$$\boxed{\frac{dQ}{dx} = -q_y}$$

$$\sum M_1 = 0 \quad Q \cdot dx + M - q_y \cdot \frac{dx^2}{2} + (M + dM) = 0$$

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = Q}$$

Término de segundo orden

En la sumatoria de momentos se desprecia el momento de la carga qy ya que contiene un diferencial de segundo orden.

De estas relaciones se desprenden los siguientes corolarios:

El valor de la carga q paralela al eje de la barra en cada sección es la tangente del diagrama normal. Si dicha carga distribuida es nula, entonces el esfuerzo normal será constante.

El valor de la carga q perpendicular al eje de la barra en cada sección es la tangente del diagrama de corte. Si dicha carga distribuida es nula, entonces el esfuerzo normal será constante. Si la carga distribuida es uniforme, el corte tendrá variación lineal.

El valor del corte en una sección de la barra es la pendiente de la recta tangente del diagrama de momentos. Si dicho corte es constante, entonces el momento tendrá variación lineal. Si el corte tiene variación lineal, el momento será una parábola cuadrática. En el punto donde el corte se hace cero hay un punto de inflexión en el diagrama de momentos, es decir que en ese punto hay un máximo o mínimo. Como la carga es la derivada segunda del diagrama de momentos, la concavidad del diagrama de momentos seguirá el sentido de la carga.

Este análisis es válido exclusivamente en tramos de barra situado entre discontinuidades.

Las discontinuidades pueden ser geométricas o de cargas (figura 8).

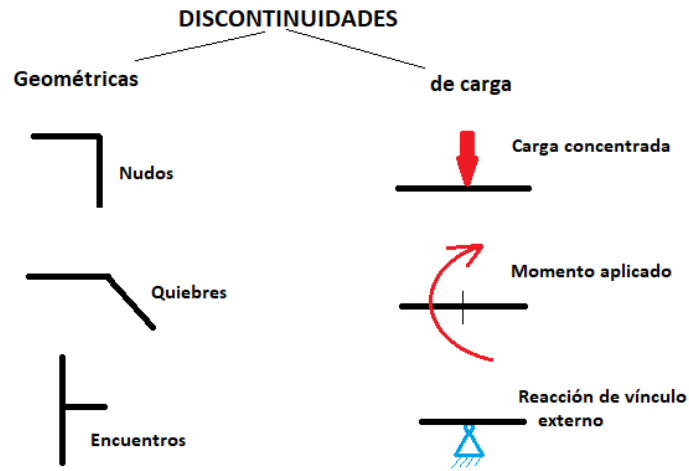


Fig. 8

Ejemplo

Consideremos la viga cuyo modelo matemático está representado en la figura 9.

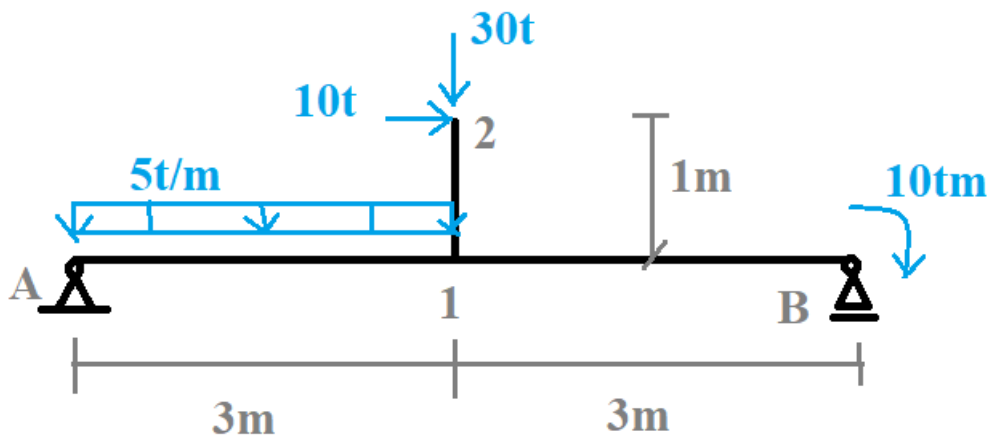
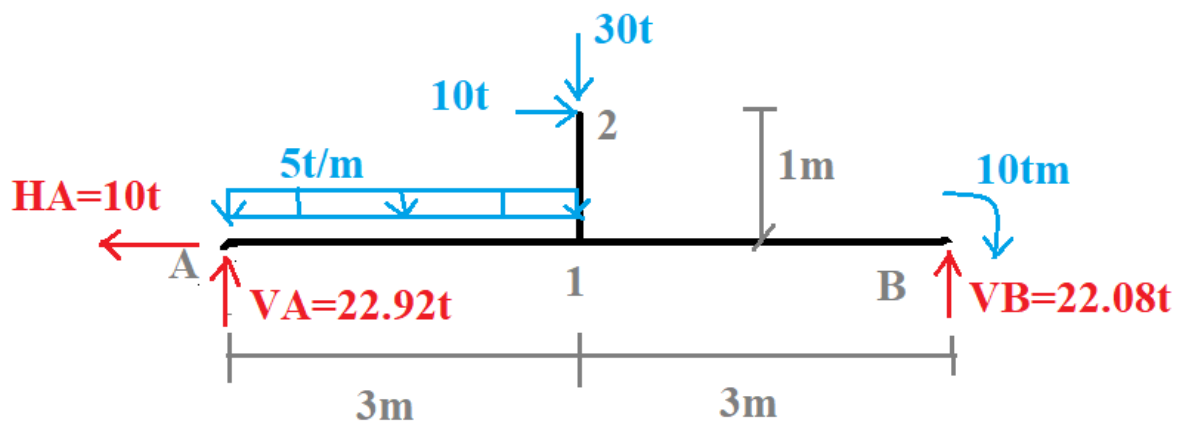
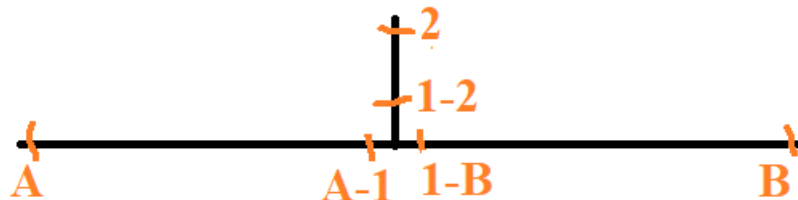


Fig.9

1) Diagrama de cuerpo libre

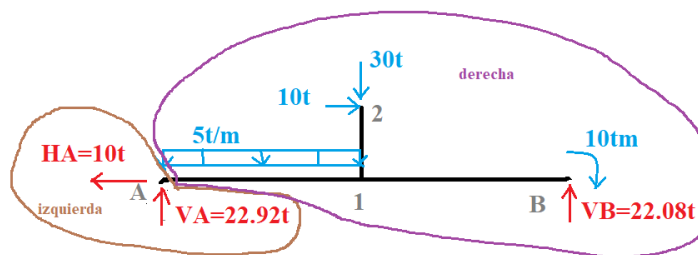


2) Definición de secciones claves para el análisis



3) Cálculo de esfuerzos característicos

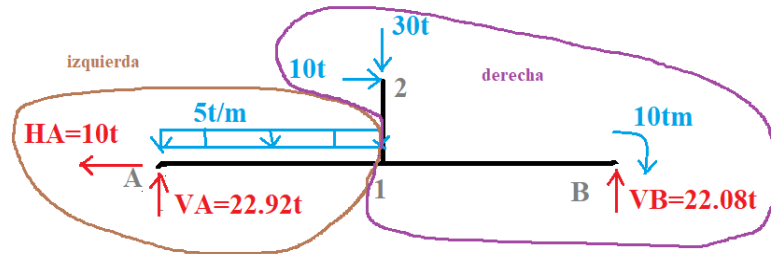
Sección A: $Q_A = 22.92t$ $N_A = 10t$ $M_A = 0$



Sección A-1: $Q_{A-1} = 22.92t - \frac{5t}{m} \cdot 3m = 7.92t$

$N_{A-1} = 10t$

$M_{A-1} = 22.92t \cdot 3m - 5t/m \cdot \frac{(3m)^2}{2} = 46.26tm$

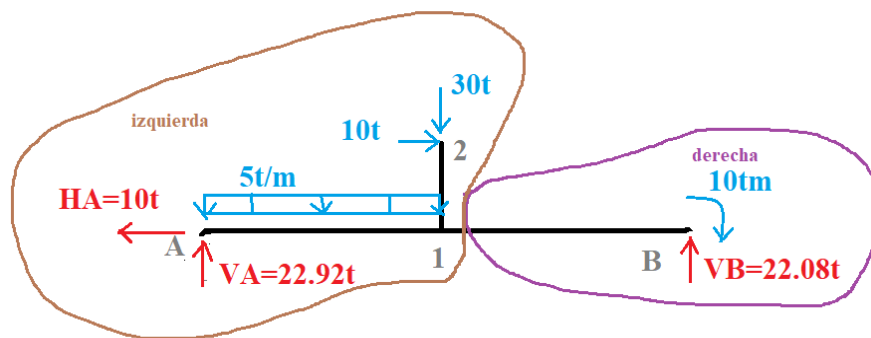


Sección 1-B: cálculo teniendo en cuenta resultante derecha

$$Q_{1-B} = -22.08t$$

$$N_{1-B} = 0t$$

$$M_{1-B} = -10tm + 22.08t \cdot 3m = 56.24tm$$



Cálculo teniendo en cuenta resultante izquierda:

$$Q_{1-B} = 22.92t - 5 \frac{t}{m} \cdot 3m - 30t = -22.08t$$

$$N_{1-B} = 10t - 10t = 0$$

$$M_{1-B} = 22.92t \cdot 3m + 10t \cdot 1m - 5 \frac{t}{m} \cdot \frac{(3m)^2}{2} = 56.24tm$$

Sección 1-2: cálculo teniendo en cuenta resultante derecha

$$Q_{1-2} = 10t$$

$$N_{1-2} = -30t$$

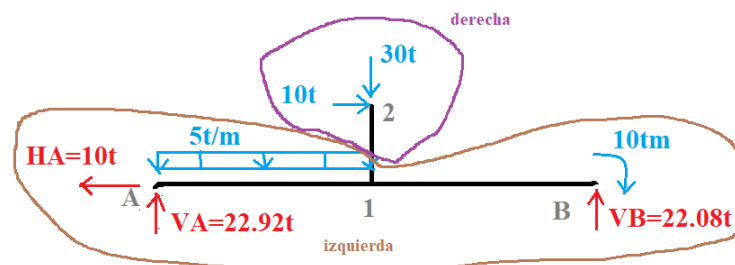
$$M_{1-2} = -10t \cdot 1m = -10tm$$

Cálculo teniendo en cuenta resultante izquierda:

$$Q_{1-2} = 10t$$

$$N_{1-2} = -22.92t + 15t - 22.08t = -30t$$

$$M_{1-2} = 22.92t \cdot 3m - 15t \cdot 1.5m + 10tm - 22.08t \cdot 3m = -10tm$$



Sección B: cálculo teniendo en cuenta resultante derecha

$$Q_B = -22.08t$$

$$N_B = 0$$

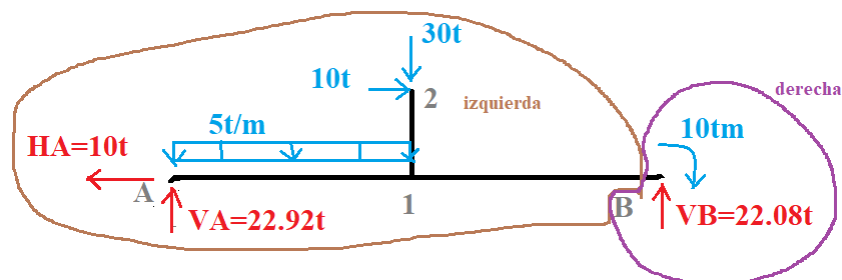
$$M_B = -10tm$$

Cálculo teniendo en cuenta resultante izquierda:

$$Q_B = 22.92t - 15t - 30t = -22.08t$$

$$N_B = 10t - 10t = 0$$

$$M_B = 22.92t \cdot 6m - 15t \cdot 4.5m - 30t \cdot 3m + 10t \cdot 1m = -10tm$$



Sección 2: cálculo teniendo en cuenta resultante derecha

$$Q_2 = 10t$$

$$N_2 = -30t$$

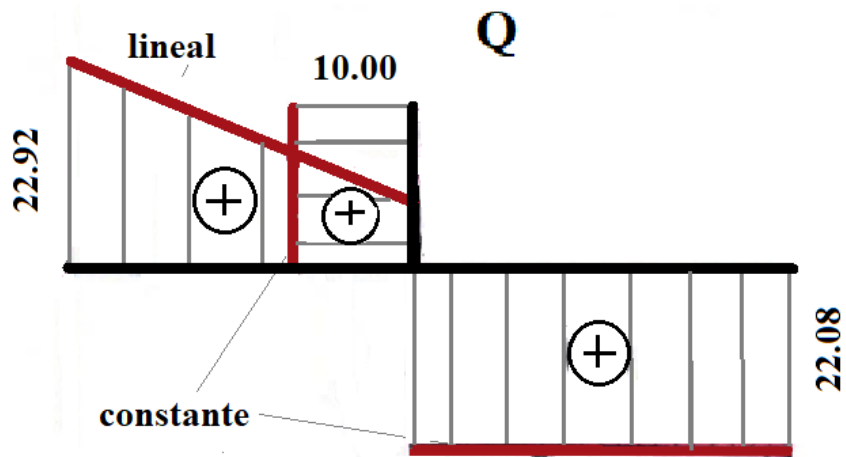
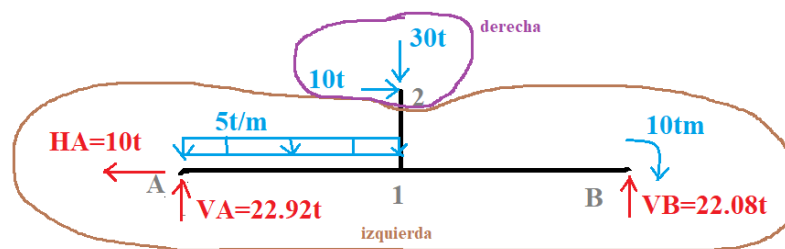
$$M_2 = 0$$

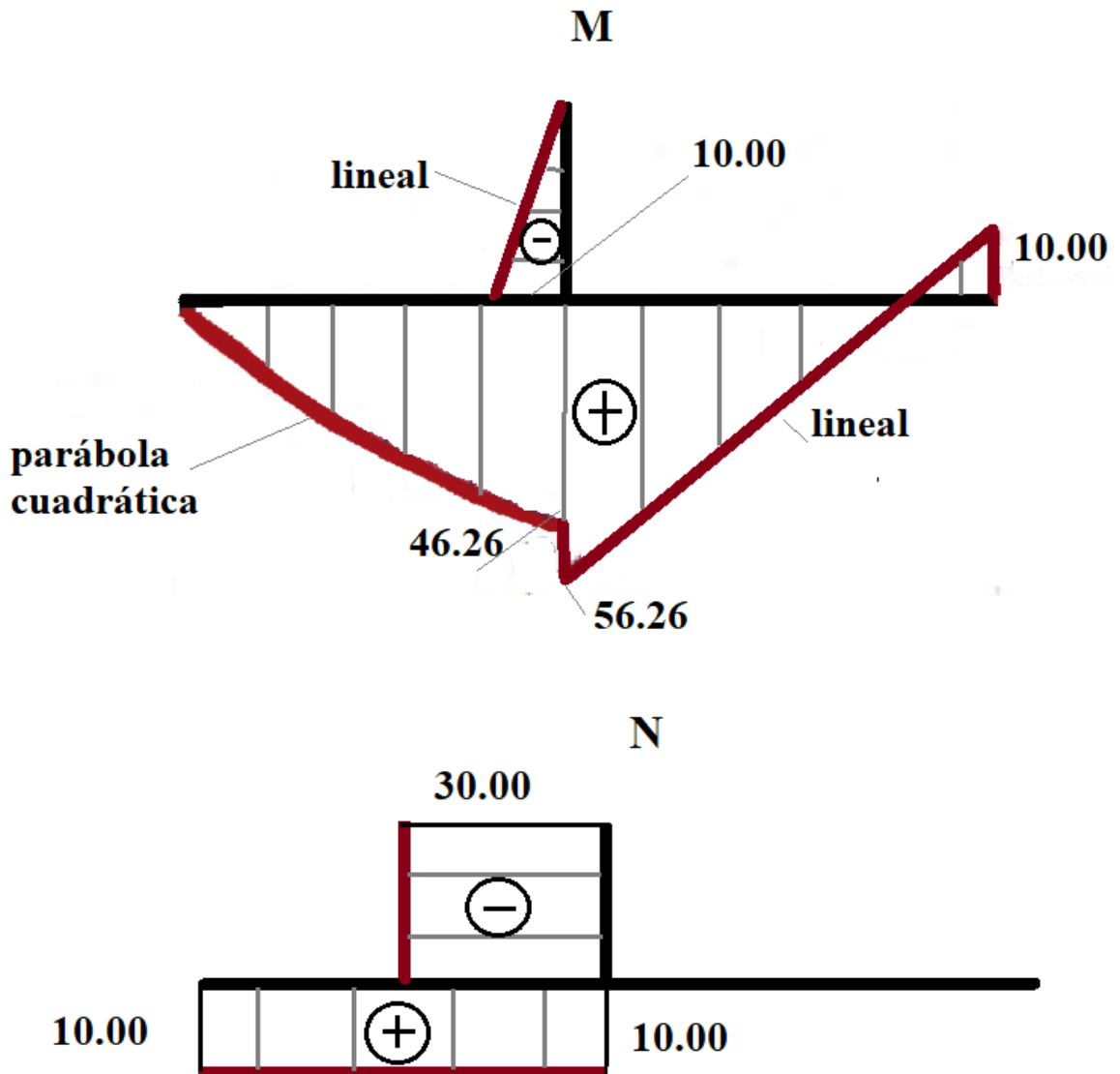
Cálculo teniendo en cuenta resultante izquierda:

$$Q_2 = 10t$$

$$N_2 = -22.92t + 15t - 22.08t = -30t$$

$$M_2 = 22.92t \cdot 3m + 10t \cdot 1m - 15t \cdot 1.5m + 10tm - 22.08t \cdot 3m = 0tm$$





Pórticos

Los pórticos de alma llena son estructuras constituidas por elementos prismáticos (vigas y columnas), por lo general rectos, que se unen entre sí en uniones rígidas denominadas nudos.

Debido a la acción de las cargas que actúan sobre el pórtico, en los elementos se originan esfuerzos de corte, normales y momentos flectores.

Análisis de pórticos isostáticos

Para establecer la convención de signos de los esfuerzos internos en pórticos planos se considera un pórtico simple (fig.10)

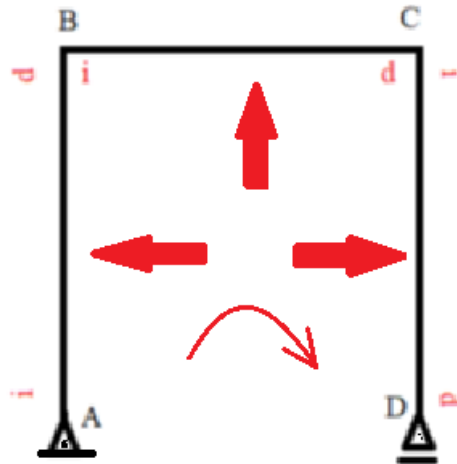


Fig. 10

El observador parado dentro del pórtico recorrerá la estructura en sentido horario, comenzando por la columna AB que se encuentra a su izquierda, en esa columna tiene a su izquierda el extremo inferior A y a su derecha el extremo superior B. Luego continúa por la viga BC y finalmente por la columna CD cuyo extremo superior C está a su izquierda y el extremo inferior D a su derecha.

Si el pórtico es de múltiples vanos (fig. 11) el observador recorre los tramos AB y BC como lo descrito anteriormente, luego se posiciona en el vano adyacente y observa a su izquierda la columna DC, y continúa recorriendo la estructura en sentido horario.

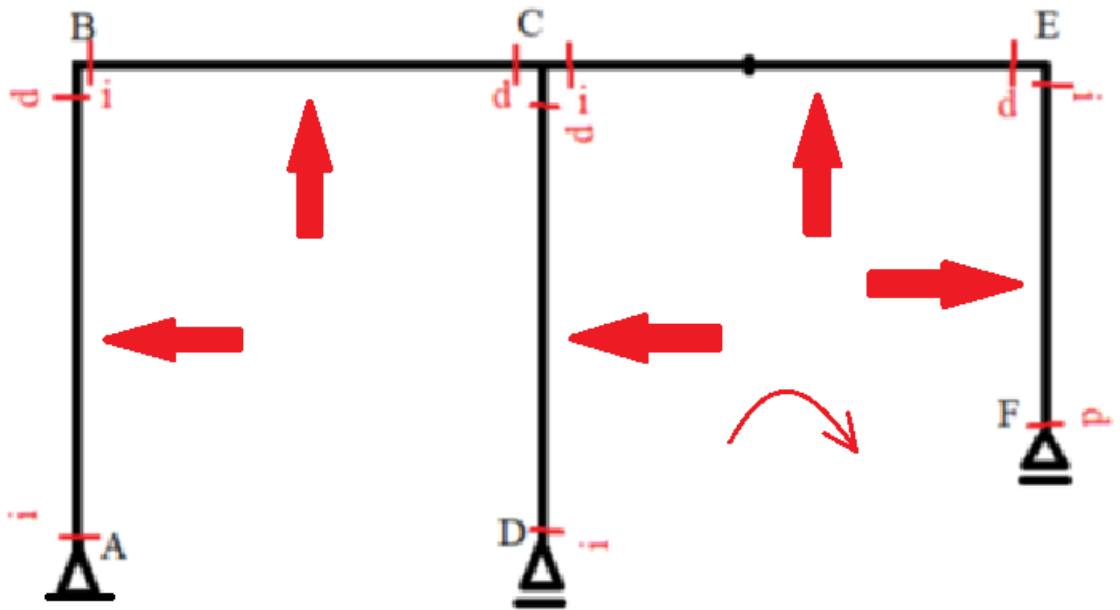


Fig. 11

Fijada la posición del observador, es válida la convención de signos establecida en el caso de vigas.

Ejemplo

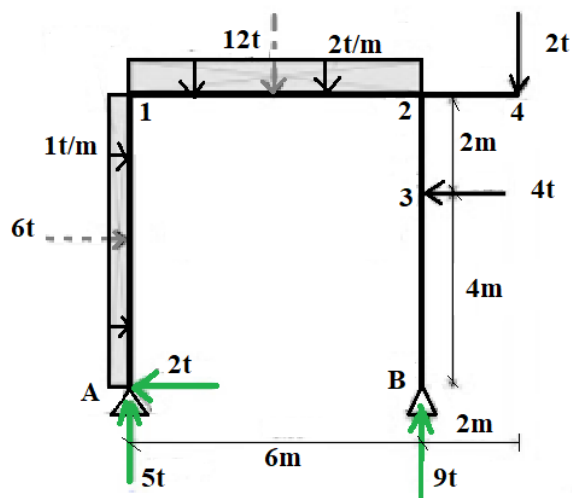


Diagrama de corte

$$\begin{aligned}
 Q_A &= 2t \\
 Q_{1col} &= -4t \\
 Q_{1v} &= 5t \\
 Q_{2v} &= -7t \\
 Q_{2vol} &= 2t = Q_4 \\
 Q_{2col} &= 4t \\
 Q_3^i &= 4t \\
 Q_B &= 0
 \end{aligned}$$

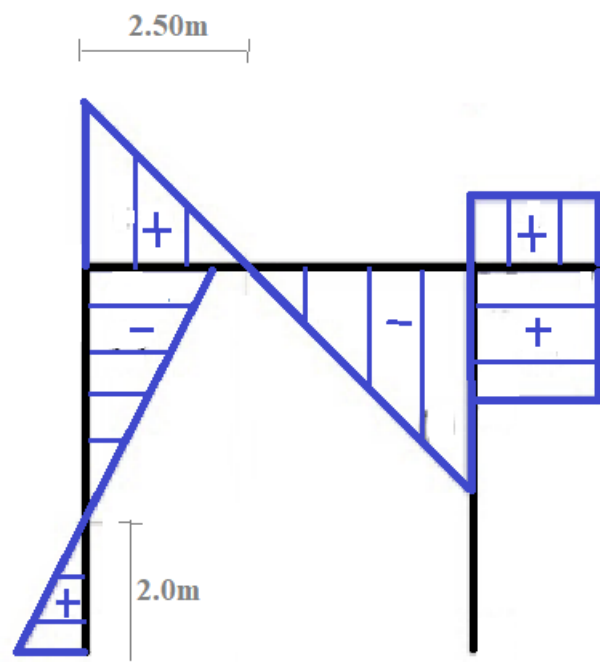


Diagrama de momentos

$$\begin{aligned}
 M_A &= 0 \\
 M_{1col} &= -6tm = M_{1v} \\
 M_{2v} &= -12tm \\
 M_{2vol} &= -4tm \\
 M_{2col} &= -8tm \\
 M_3 &= 0 = M_B
 \end{aligned}$$

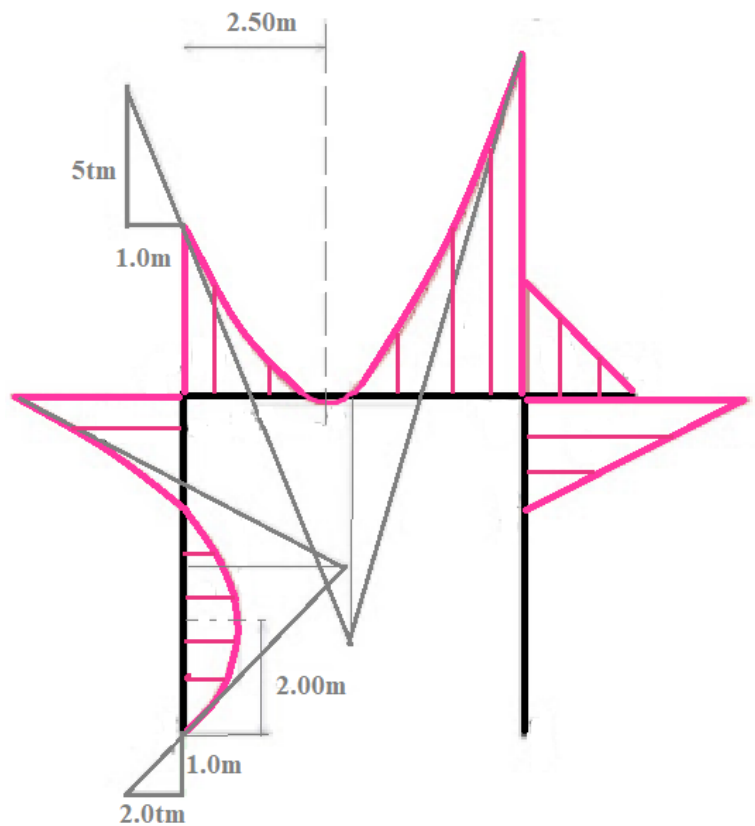


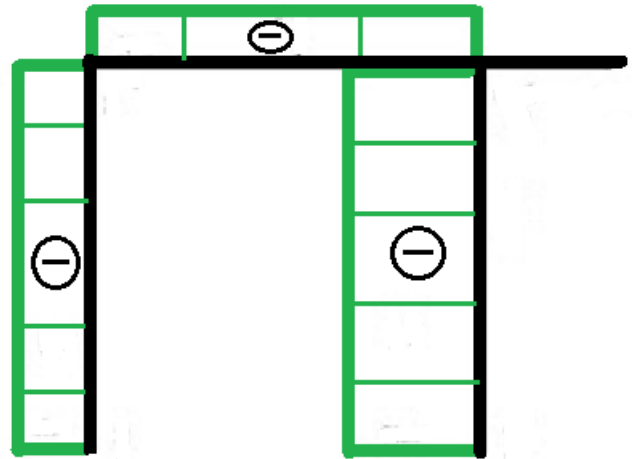
Diagrama de esfuerzos normales

$$N_A = -5t = N_{1col}$$

$$N_{1v} = -4t = N_{2v}$$

$$N_B = -9t = N_{2col}$$

$$N_{2vol} = 0 = N_4$$



Arcos

Los arcos son estructuras curvas, cargadas verticalmente originan reacciones oblicuas en los apoyos.

En general las secciones transversales del arco están solicitadas a compresión, corte y flexión. Adecuando la directriz al tipo de carga puede ocurrir que los momentos flectores y los esfuerzos de corte sean pequeños, casi nulos. Esta característica fue la que permitió, en la antigüedad, la construcción de arcos de grandes vanos con elementos mampuestos (ladrillos y piedras).

Algunos arcos isostáticos se muestran en la figura 12, donde se esquematizan las reacciones. En la figura 13 se muestran cómo se designan algunos parámetros geométricos.

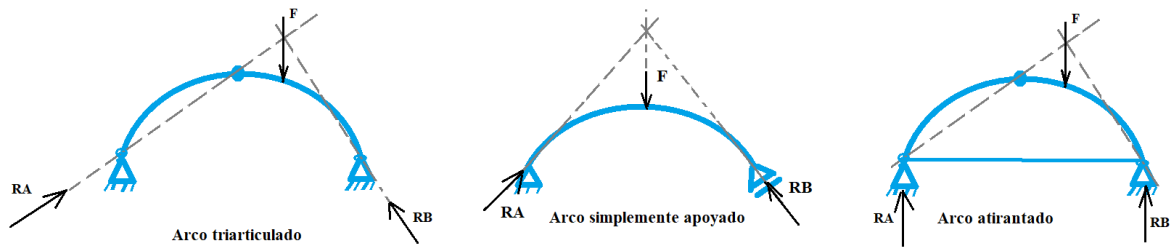


Fig. 12

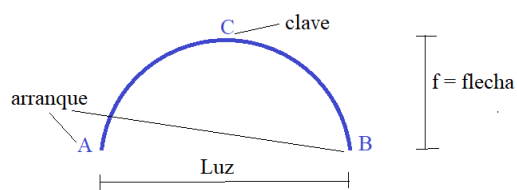


Fig. 13

Ejemplo de análisis de arcos

Consideremos un arco simplemente apoyado sometido a carga uniformemente distribuida como lo muestra la figura 14.

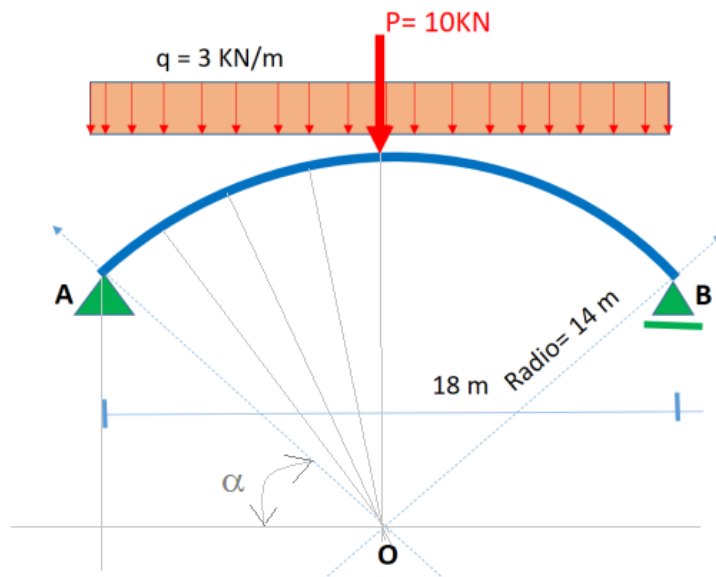
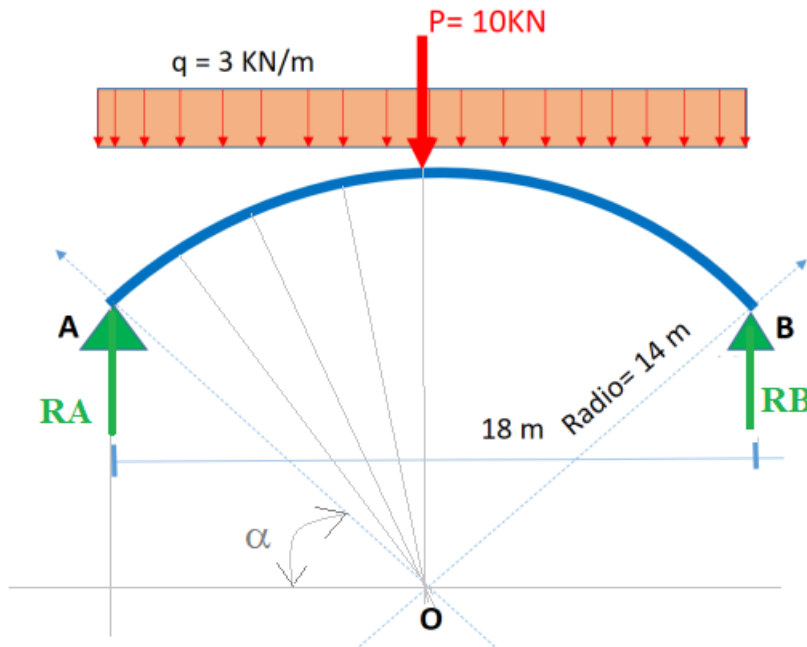


Fig. 14

Para el cálculo de reacciones se procede de igual manera que para vigas de eje recto.

$$R_A = R_B = 32\text{kN}$$

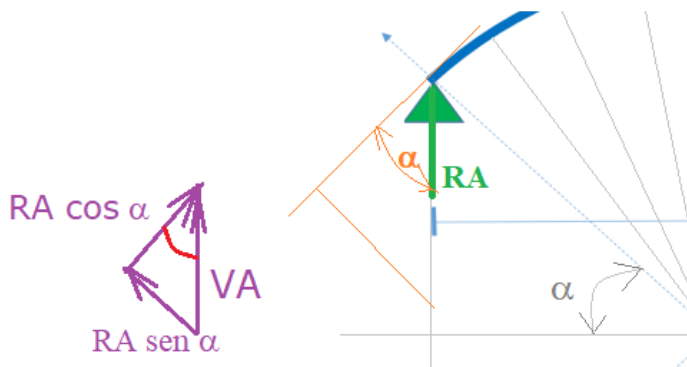


Esfuerzos normales y de corte

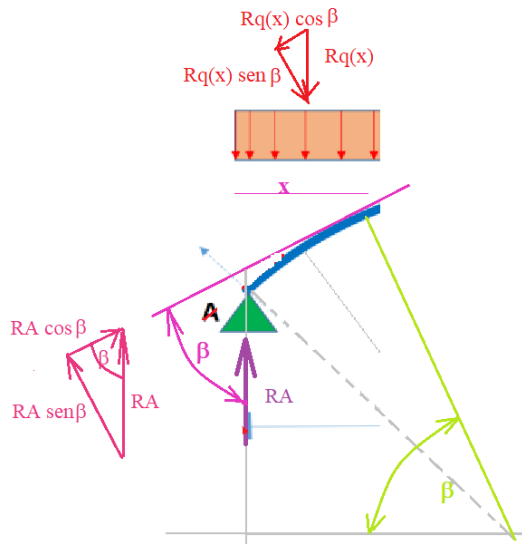
En el apoyo A, la componente de la reacción en la dirección de la tangente a la curva en A provoca un esfuerzo de compresión y la componente perpendicular produce corte.

$$N_A = -32 \cos(50^\circ) = -20.57\text{kN}$$

$$Q_A = 32 \text{ sen}(50^\circ) = 24.51 \text{ kN}$$



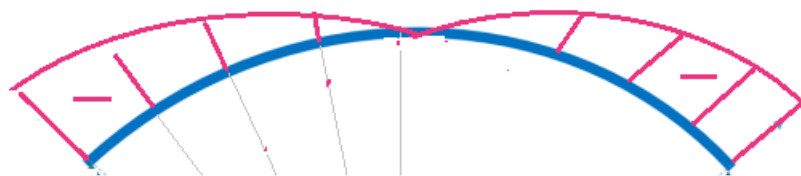
Para una abscisa x cualquiera los esfuerzos serán:



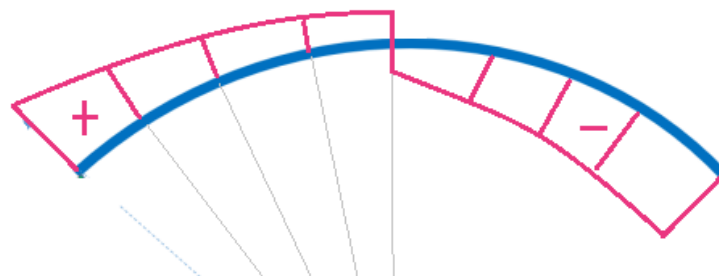
$$N_x = -RA \cos \beta + Rq(x) \cos \beta$$

$$Q_x = RA \sen \beta - Rq(x) \sen \beta$$

N

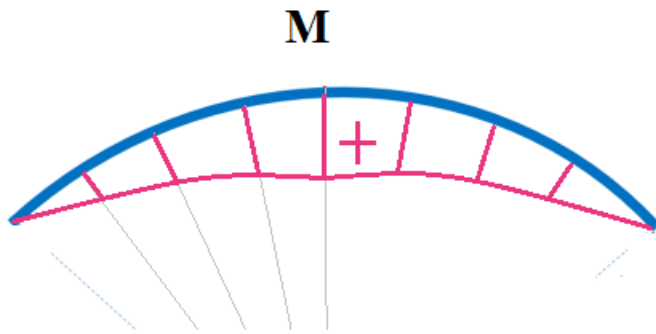


Q



Momentos flectores

Para determinar los momentos flectores no es necesario descomponer las fuerzas, simplemente considerar la distancia perpendicular a la fuerza.



$$M_A = 0 = M_B$$

$$M_x = RA \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$