

Análisis Matemático I

Clase 7: regla de la cadena, derivadas de funciones trigonométricas, derivadas laterales y derivación implícita.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2023

Para el Primer Parcial, entra:

- En teoría, desde clase 1 hasta la clase 6 inclusive (es decir, hasta reglas de derivación).
- En la práctica, todo el TP1 y hasta el ejercicio 7 del TP2.

Comisiones: cada alumno rinde donde usualmente asiste a la clase de teoría (ya sea mañana o tarde). La duración del examen será de dos horas. El turno tarde terminará 19:30 hs. aproximadamente.

Ejercicio 12 del Trabajo Práctico 1:

Indique las ecuaciones de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas) de las siguientes funciones. Grafique la función y las asíntotas encontradas.

b)

$$y = \frac{x + 3}{x + 2}$$

e)

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

Teorema: regla de la cadena

Si g es derivable en c y f es derivable en $g(c)$, entonces $f \circ g$ es derivable en c y además:

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)) \cdot g'(c).$$

Ejemplo: emplee la regla de la cadena para calcular la derivada de las funciones:

$$h(x) = (2x^2 + x - 10)^{10},$$

en cada x , y

$$g(x) = \left(\frac{x+5}{x-3} \right)^4, \quad x \neq 3.$$

Algunas derivadas

- Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces f es derivable en $(0, \infty)$ y su derivada en cualquier $x \in (0, \infty)$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (\text{Luego analizaremos qué pasa en } x = 0).$$

Demostración. Sea $x > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

- Si $g(x) = \text{sen}(x)$, entonces g es derivable en \mathbb{R} y su derivada es:

$$g'(x) = \text{cos}(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)\text{cos}(h) + \text{cos}(x)\text{sen}(h) - \text{sen}(x)}{h} \\ &= \text{sen}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(h) - 1}{h} + \text{cos}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \\ &= \text{cos}(x), \quad \text{donde se usó que } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(h) - 1}{h} = 0. \end{aligned}$$

En forma similar al caso anterior, se puede probar que: si $h(x) = \cos(x)$, entonces h es derivable en \mathbb{R} y

$$h'(x) = -\operatorname{sen}(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Además, usando la regla del cociente para derivadas, se puede determinar que las funciones \tan , \cotan , \sec y \csc son derivables en todo su dominio. Por ejemplo (hacer uno):

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec(x) \cdot \tan(x).$$

Derivadas laterales

Para estudiar la derivabilidad de funciones en puntos extremos del dominio o para comprobar si una función es derivable o no en un punto, se utilizan las derivadas laterales:

Derivadas laterales

Sea c un número real. La derivada por derecha de f en c se define como:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

siempre y cuando el límite exista. La derivada por izquierda de f en c se define como:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

siempre y cuando el límite exista.

Observación: f es derivable en c si y sólo si f es derivable por izquierda y por derecha en c y los límites coinciden.

Ejemplo 1: sea $f(x) = |x|$. Entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

y:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Así la función valor absoluto es derivable por izquierda y por derecha en $x = 0$, pero no es derivable en ese punto.

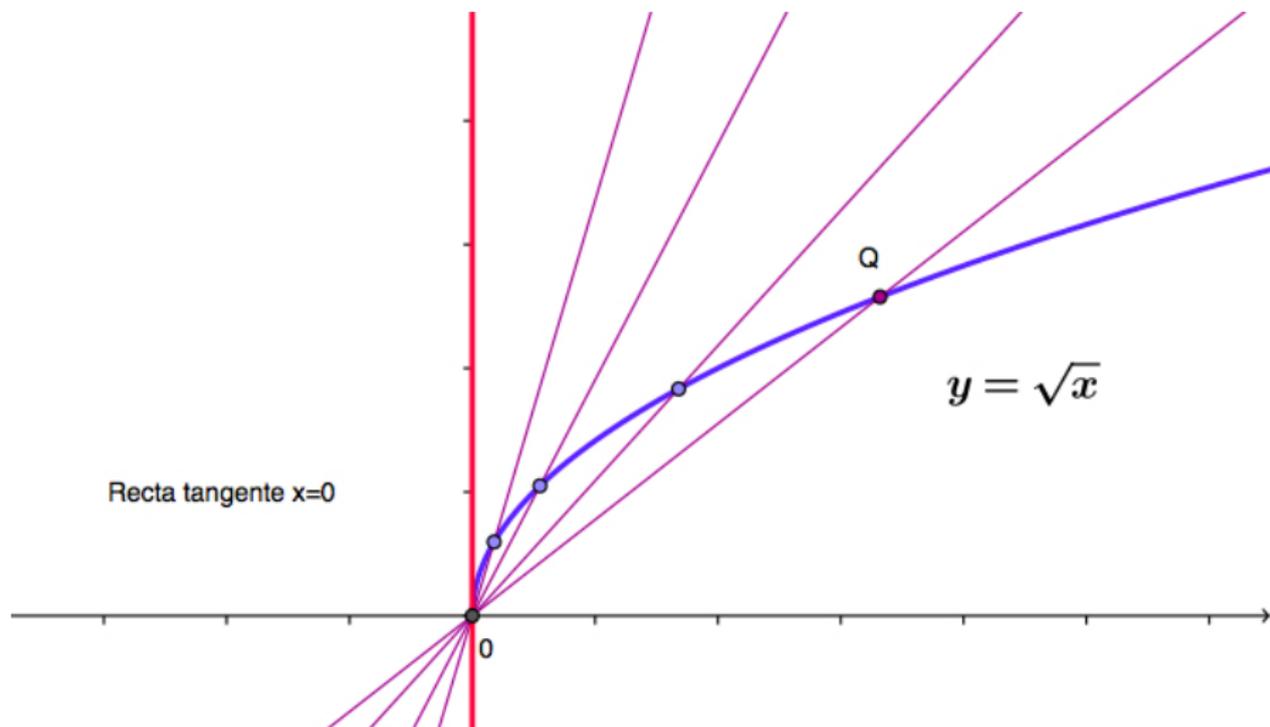
Ejemplo 2: sea $g(x) = \sqrt{x}$. Entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Luego, g no es derivable por derecha en $x = 0$. Sin embargo, se puede trazar una recta que puede considerarse como recta *tangente*.

Derivadas laterales

Se observa que a medida que Q tiende al origen, las rectas secantes tienden a la recta de ecuación $x = 0$:



Derivación implícita

Hasta ahora, hemos considerado funciones que se escriben en la forma:

$$y = f(x)$$

donde aparece de forma explícita y en términos de x .

En ocasiones, se desea obtener la derivada y' cuando hay una relación implícita entre las variables x y y . Por ejemplo, cuando:

$$x + y^3 + xy = 0.$$

En algunos casos, es posible despejar y en términos de x y obtener y' . Sin embargo, cuando esto no es posible o no es adecuado, se aplica el método de derivación implícita.

Derivación implícita

Problema: calcular $y'(x)$, sabiendo:

$$x + y^3 + xy = 0.$$

Solución: Derive con respecto a x ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}(x + y^3 + xy) = \frac{d}{dx}(0).$$

Recordando que y es una función de x , aplique las reglas de derivación usuales:

$$1 + 3y^2y' + 1 \cdot y + x \cdot y' = 0.$$

Finalmente, se despeja y' :

$$y' = \frac{-(y + 1)}{3y^2 + x}.$$

Derivación implícita

Problema: calcular $y'(x)$, sabiendo:

$$y + \cos(xy) - y^{10} = xy.$$

Solución: Derive con respecto a x ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}(y + \cos(xy) - y^{10}) = \frac{d}{dx}(xy).$$

Recordando que y es una función de x , aplique las reglas de derivación usuales:

$$\frac{d}{dx}y + \frac{d}{dx}\cos(xy) - \frac{d}{dx}y^{10} = \left(\frac{d}{dx}x\right)y + x\frac{d}{dx}y.$$

Observe que:

$$\frac{d}{dx}\cos(xy) = -\operatorname{sen}(xy) \cdot \left(\left(\frac{d}{dx}x\right)y + x\frac{d}{dx}y\right) = -\operatorname{sen}(xy)(y + xy').$$

Derivación implícita

Además:

$$\frac{d}{dx}y^{10} = 10y^9y'.$$

Luego:

$$\frac{d}{dx}y + \frac{d}{dx}\cos(xy) - \frac{d}{dx}y^{10} = \left(\frac{d}{dx}x\right)y + x\frac{d}{dx}y,$$

se convierte en:

$$y' - \operatorname{sen}(xy)(y + xy') - 10y^9y' = y + xy'.$$

Finalmente, se despeja y' :

$$y'(1 - \operatorname{sen}(xy)x - 10y^9 - x) = y + \operatorname{sen}(xy)y$$

lo cual implica:

$$y' = \frac{y + \operatorname{sen}(xy)y}{1 - \operatorname{sen}(xy)x - 10y^9 - x}.$$

Observe que y' está bien definida siempre y cuando el denominador no sea 0.