Análisis Matemático I
Clase 8: Aplicaciones de la derivada

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2023

Interpretación de la derivada: introducción a tasas relacionadas

Recordar:

Definición de tasa instantánea de cambio

La tasa de cambio instantánea de una función f con respecto a x en x_0 se define por:

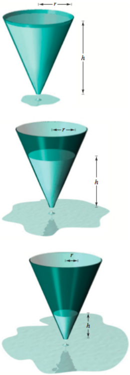
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

siempre que el límite exista.

Así, las tasas de cambio instantáneas son límites de tasas de cambio promedio.

Tasas relacionadas

Problema: Suponga que se está drenando un tanque cónico:



Determine la relación entre la tasa de cambio instantánea del volumen V, la tasa de cambio instantánea de la altura h y la tasa de cambio instantánea del radio r con respecto al tiempo.

Tasas relacionadas

Solución: supongamos que:

- El volumen es una función del tiempo: $V = V(t)$.
- La altura es función del tiempo: $h = h(t)$.
- El radio es una función del tiempo: $r = r(t)$.

Tasas relacionadas

Solución: supongamos que:

- El volumen es una función del tiempo: $V = V(t)$.
- La altura es función del tiempo: $h = h(t)$.
- El radio es una función del tiempo: $r = r(t)$.

Buscamos una relación entre: $V'(t)$, $r'(t)$ y $h'(t)$.

Solución: supongamos que:

- El volumen es una función del tiempo: $V = V(t)$.
- La altura es función del tiempo: $h = h(t)$.
- El radio es una función del tiempo: $r = r(t)$.

Buscamos una relación entre: $V'(t)$, $r'(t)$ y $h'(t)$.

Para establecer la relación entre las tasas instantáneas, primero establecemos la relación entre las variables V, h y r:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

Derivamos ambos miembros de esta ecuación con respecto a t:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \frac{\pi}{3}\frac{d}{dt}(r^2 h)(t) = \frac{\pi}{3}\left(2r(t)r'(t)h(t) + r^2(t)h'(t)\right)$$

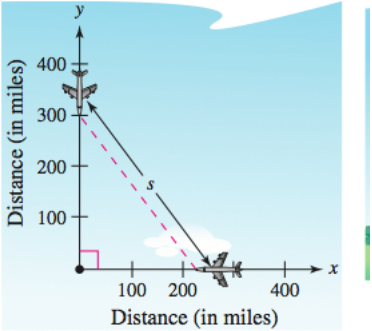
Así, la relación entre las tasas instantáneas es:

$$V'(t) = \frac{\pi}{3}\left(2r(t)r'(t)h(t) + r^2(t)h'(t)\right).$$

Problema: Supongamos que el nivel del líquido en el tanque cónico del problema anterior disminuye a una tasa de $-0.2cm/min$ y que el radio está cambiando a una tasa de $-0.1cm/min$. Determine la tasa instantánea de cambio del volumen del líquido cuando $h = 0.5cm$ y $r = 0.1cm$.

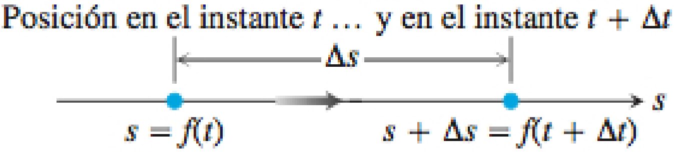
Problema: Supongamos que se vierte agua en un depósito cónico a una tasa de $9cm^3/min$. Supongamos que la altura del depósito es $90cm$ y que el radio es de $40cm$. Determine la tasa de cambio instantánea del nivel del líquido cuando el nivel es de $10cm$.

Problema: dos aviones viajan a la misma altitud y se dirigen al mismo aeropuerto. Cuando una de ellas se encuentra a 300 millas, viaja a una rapidez de 600 millas por hora, mientras que la otra, cuando se encuentra a 225 millas, viaja a una rapidez de 450 millas por hora. Determine cuál es la tasa instantánea de cambio de la distancia entre los aviones en el momento descripto.



Tasa de cambio instantánea: aplicaciones a cinemática

Supongamos que la función $s = f(t)$ describe la posición de un objeto en función del tiempo que se desplaza en línea recta:



Luego, el desplazamiento Δs del objeto en el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$ es:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

Así, la velocidad promedio v_{prom} en dicho intervalo viene dada por:

$$v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Para determinar la velocidad en el instante t, se debe calcular la velocidad promedio en el intervalo de t a $t + \Delta t$, y hacer tender Δt a cero. Así, la **velocidad instantánea** del objeto en el instante t es:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

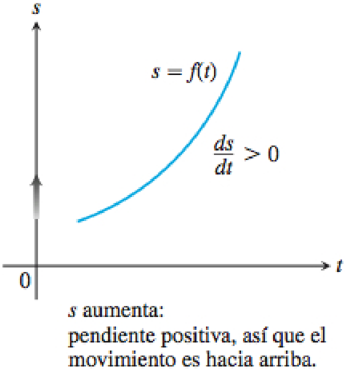
Es decir:

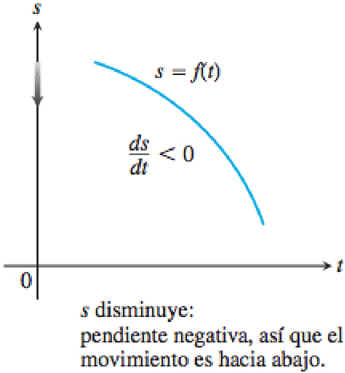
$$v(t) = s'(t).$$

IMPORTANTE: Si el objeto se desplaza hacia la derecha, entonces $s'(t) > 0$, Por otro lado, si se desplaza hacia la izquierda, entonces $s'(t) < 0$.

Tasa de cambio instantánea: aplicaciones a cinemática

En el plano espacio-tiempo:





Así, el signo de la derivada indica la dirección del movimiento

Tasa de cambio instantánea: aplicaciones a cinemática

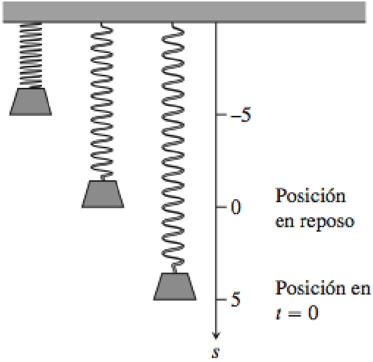
La **rapidez** del movimiento se define como sigue:

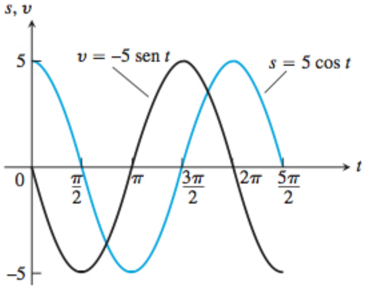
$$\text{Rapidez en el instante } t = |v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}(t)\right|.$$

La tasa instantánea de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se denomina **aceleración**. Así:

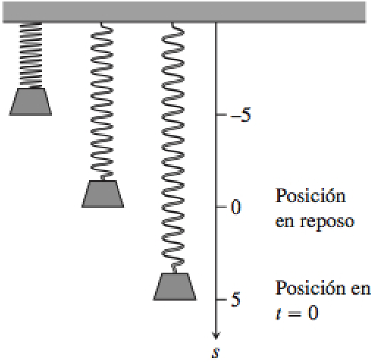
$$\text{aceleración en el instante } t = a(t) = \frac{dv}{dt}(t).$$

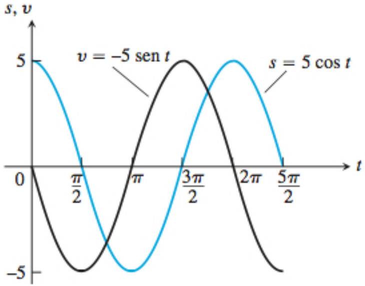
Movimiento Armónico Simple: es un movimiento donde el objeto oscila indefinidamente. Es un movimiento periódico, por lo que generalmente es modelado con funciones trigonométricas.





Movimiento Armónico Simple: es un movimiento donde el objeto oscila indefinidamente. Es un movimiento periódico, por lo que generalmente es modelado con funciones trigonométricas.





Si el movimiento es modelado por $s(t) = 5.cos(t)$, entonces podemos determinar la velocidad $v(t) = -5.sen(t)$ y su aceleración $a(t) = -5.cos(t)$ en cada instante.

Podemos concluir varias cosas:

- La posición $s(t) = 5.cos(t)$ nos indica que el objeto oscila entre -5 y 5, con lo que la amplitud del movimiento es 5. El periodo del movimiento es 2π.
- La velocidad $v(t) = -5.sen(t)$ alcanza su mayor magnitud $|v(t)|$ cuando $sen(t) = 1$ o $sen(t) = -1$, es decir, $cos(t) = 0$, que es justo cuando el objeto pasa por el origen. La rapidez del objeto $|v(t)| = 5|sen(t)|$ es cero cuando $sen(t) = 0$, es decir, cuando $cos(t) = 1$ 0 $cos(t) = -1$. Esto ocurre cuando la posición s es 5 o -5 (extremos del movimiento).
- La aceleración es siempre opuesta al valor de la posición: cuando el cuerpo está arriba de la posición inicial, la gravedad tira hacia abajo del objeto y entonces la aceleración es opuesta al movimiento.

Tasa de cambio instantánea: aplicaciones en Economía

En Economía, las tasas de cambio instantáneas se denominan *marginales*.
Ejemplo: si $c = c(x)$ es el costo de producir una cantidad x de cierto producto, entonces el **costo marginal de producción** c' es la tasa de cambio instantánea del costo con respecto al nivel de producción, es decir:

$$c'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h}.$$