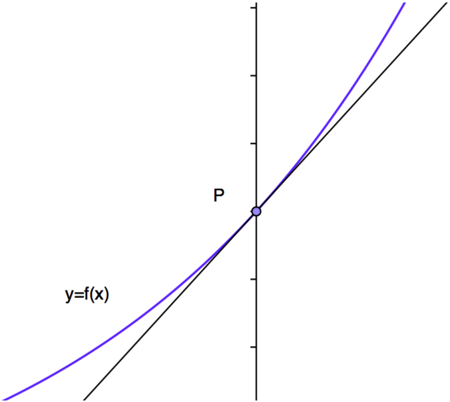
Análisis Matemático I
Clase 9 (dos partes): Linealización, diferenciales, extremos locales y relativos. Teoremas de Rolle y del valor medio

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2023

Si realizamos un acercamiento al punto P, obtenemos la imagen:



Así, cerca del punto de tangencia, las gráficas de la función y de la recta tangente se vuelven indistinguibles. Esto implica que es posible utilizar la ecuación de la recta tangente para obtener buenas aproximaciones de la función f.

Linealización

Defnición de Linealización

Sea f una función derivable en $x = a$. Definimos la linealización de f en a como la función:

$$L(x) = f'(a)(x - a) + f(a).$$

En general, cerca del punto a, la linealización es una *buena* aproximación de la función f.

Linealización

Ejemplo: determine la linealización de:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

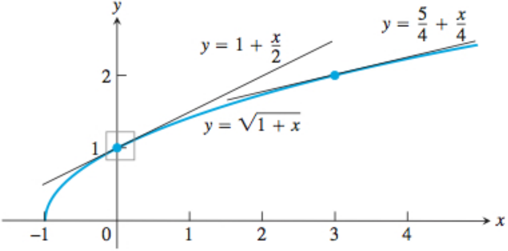
en el punto $x = 0$.
Solución:

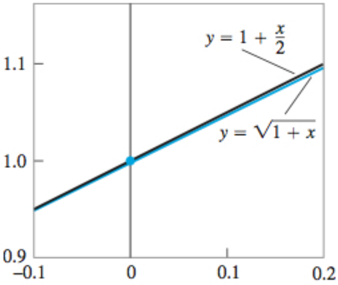
$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}.$$

Además, $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1/2$. Luego la linealización de f en $x = 0$ es:

$$L(x) = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{2}x + 1.$$

Linealización





Linealización

La linealización de una función en un punto $x = a$ se puede utilizar para aproximar los valores de la función cerca del punto a:

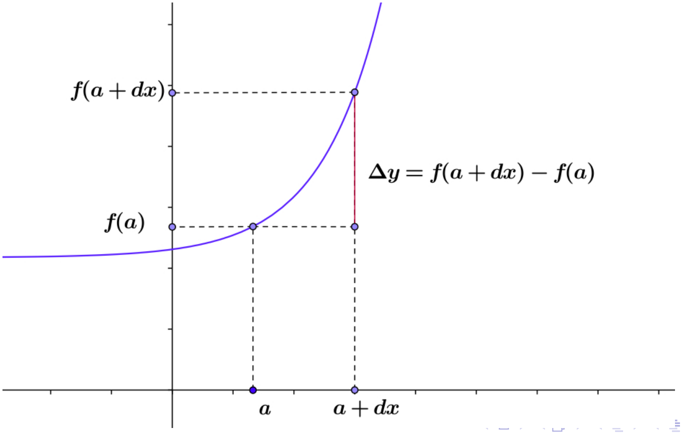
Aproximación	Valor verdadero	$\lvert$Valor verdadero − aproximación$\rvert$
$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$	1.095445	$<10^{-2}$
$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$	1.024695	$<10^{-3}$
$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$	1.002497	$<10^{-5}$

En las próximas diapositivas vamos a estudiar más profundamente la aproximación que brinda la linealización a la función.

Diferenciales

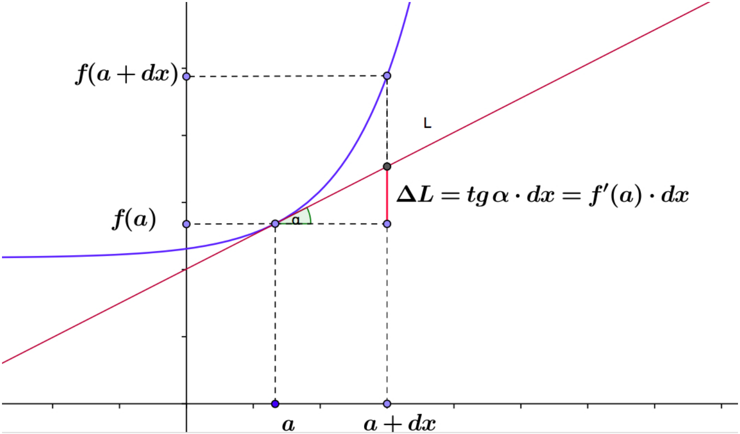
Sea $y = f(x)$ una función derivable en $x = a$. Cuando nos movemos de $x = a$ al punto $x = a + dx$, la función experimenta un cambio dado por:

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$



Por otro lado, el cambio en la recta tangente L está dado por:

$$\Delta L = f'(a)dx$$



Diferenciales

Dado que la recta L representa una aproximación de f para valores cercanos a $x = a$ tenemos:

$$\Delta y \approx \Delta L.$$

Es decir:

$$f(a+dx) - f(a) \approx f'(a)dx \text{ o: } f(a+dx) \approx f(a) + f'(a)dx.$$

Definición de Diferencial

La expresión:

$$\Delta L = f'(a)dx.$$

recibe el nombre de Diferencial de f en a y se simboliza por df o dy:

$$dy = f'(a)dx.$$

Así, el diferencial de f en $x = a$ es el cambio que experimenta la recta tangente a $(a, f(a))$ cuando x pasa de a a $a + dx$.

Diferenciales

Ejemplo: supongamos que un disco metálico de radio $r = 10cm$ se somete a una fuente de calor y se dilata uniformemente hasta alcanzar un radio de $r = 10.1cm$. Utilizando diferenciales estime el cambio en el área del disco y compárelo al cambio real.

Diferenciales

Ejemplo: supongamos que un disco metálico de radio $r = 10cm$ se somete a una fuente de calor y se dilata uniformemente hasta alcanzar un radio de $r = 10.1cm$. Utilizando diferenciales estime el cambio en el área del disco y compárelo al cambio real.
Ejemplo: la función área en términos del radio del disco es:

$$A(r) = \pi r^2.$$

Queremos estimar el cambio del área cuando r pasa de 10 cm a 10.1 cm. Entonces el cambio en la variable independiente, que llamaremos dr es:

$$dr = 10.1 - 10 = 0.1\,\text{cm}.$$

Luego, una aproximación del cambio en el área es:

$$\Delta A = A(10.1) - A(10) \approx dA = A'(10)dr = 2\pi.10\,cm.0.1\,cm = 2\pi\ cm^2.$$

Ahora el cambio real es:

$$A(10.1) - A(10) = 2.01\pi\ cm^2.$$

Sensibilidad al cambio

La ecuación:

$$df = f'(x)dx$$

indica qué tan sensible es el valor de f a un cambio en los valores de x.
Cuanto mayor sea el valor de $f'(x)$ mayor será el efecto de un cambio dado por dx.
Cuando nos movemos de a a $a + dx$, es posible describir el cambio en f de tres maneras:

	Real	**Estimado**
Cambio absoluto	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)\,dx$
Cambio relativo	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Cambio porcentual	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

Sensibilidad al cambio

Ejemplo: Suponga que necesita calcular la profundidad de un pozo de agua a partir de la ecuación $s(t) = 16t^2$, midiendo el tiempo que tarda en caer una roca al agua. ¿Qué tan sensibles serán sus cálculos a un error de 0.1 s. en la medición del tiempo?

Ejemplo: Suponga que necesita calcular la profundidad de un pozo de agua a partir de la ecuación $s(t) = 16t^2$, midiendo el tiempo que tarda en caer una roca al agua. ¿Qué tan sensibles serán sus cálculos a un error de 0.1 s. en la medición del tiempo?
Solución. Calculamos primero el diferencial de s:

$$ds = 32.t.dt.$$

Si se comete un error de 0.1 s en la medición del tiempo entonces la sensibilidad viene dada por:

$$ds = 3.2t.$$

Observar que a medida que el tiempo t es mayor, la sensibilidad en la medición de la profundidad también es mayor. De hecho, si se obtuvo una medición de $t = 2$ s, entonces la sensibilidad es:

$$ds = 6.4\text{m}.$$

Si se hubiera tenido una medición de $t = 6$ s, entonces:

$$ds = 19.2\text{m}.$$

Objetivo de las próximas clases

En las próximas clases, vamos a aplicar las teorías de límites y de derivación para realizar trazados de curvas $y = f(x)$ con precisión.

Límites: hemos visto que se aplican para detectar:

- puntos de continuidad de la función,
- asíntotas verticales, horizontales y oblicuas,
- discontinuidades de la función.

Derivadas: veremos que se aplican para:

- determinar dónde la función f alcanza sus valores máximos y mínimos.
- detectar intervalos donde la función crece y donde decrece.
- estudiar la curvatura 'hacia arriba' o 'hacia abajo' de la gráfica de f.
- determinar dónde se presenta un cambio de curvatura (punto de inflexión)

Valores extremos de una función

Máximos y mínimos absolutos

Sea f una función con dominio D. Decimos que f tiene un máximo absoluto en D en el punto $c \in D$ si:

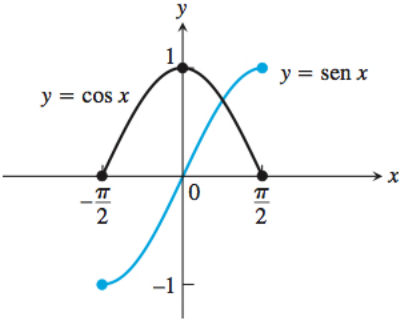
$$f(x) \leq f(c)$$

para todo x en D. De forma análoga, decimos que f tiene un mínimo absoluto en D en el punto c si:

$$f(x) \geq f(c)$$

para todo x en D.

Considere las funciones $y = sen(x)$ y $y = cos(x)$ para $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.



El máximo absoluto de $y = sen(x)$ en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es 1 . El mínimo absoluto de $y = sen(x)$ en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es -1. Analizar la función coseno.

Valores extremos de una función

Consideremos os siguientes casos (realizar gráficos):

Regla de la función	Dominio D	Extremos absolutos en D
(a) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	No hay máximo absoluto. Mínimo absoluto de 0 en $x = 0$.
(b) $y = x^2$	$[0, 2]$	Máximo absoluto de 4 en $x = 2$. Mínimo absoluto de 0 en $x = 0$.
(c) $y = x^2$	$(0, 2]$	Máximo absoluto de 4 en $x = 2$. No hay mínimo absoluto.
(d) $y = x^2$	$(0, 2)$	No hay extremos absolutos.

Observación importante: los valores máximos y mínimos absolutos de una función dependen del dominio en donde se considere la función.

Valores extremos de una función continua

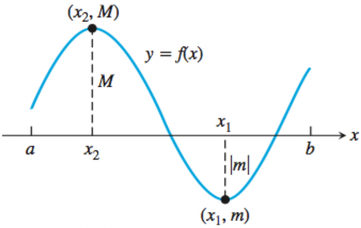
Teorema de los valores extremos para funciones continuas

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, entonces existen puntos $x_1 \in [a, b]$ y $x_2 \in [a, b]$ tales que:

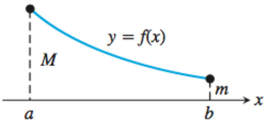
$$f(x_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_2) = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

En otras palabras, una función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza su valor mínimo absoluto y su valor máximo absoluto en $[a, b]$.

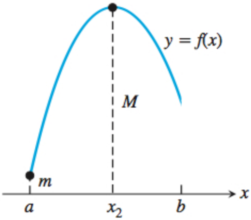
Valores extremos de una función continua



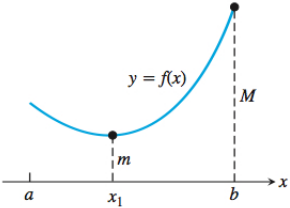
Máximo y mínimo en puntos interiores.



Máximo y mínimo en los extremos del intervalo.



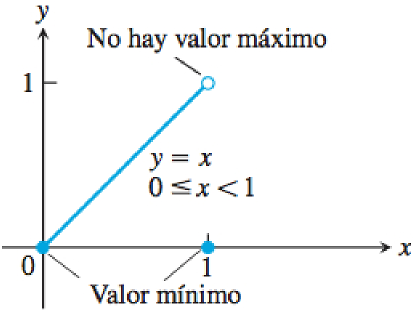
Máximo en punto interior, mínimo en un extremo.



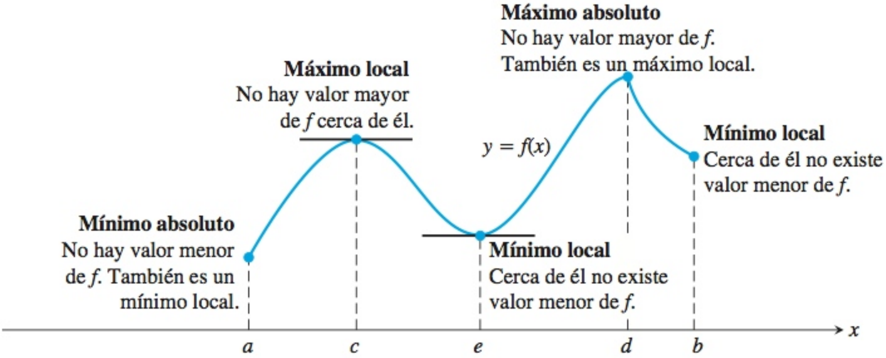
Mínimo en un punto interior, máximo en un extremo.

Valores extremos de una función

Un punto de discontinuidad puede evitar que una función tenga un extremo en un intervalo cerrado:



Introducción a extremos locales.



Extremos locales o relativos

Sea f una función definida en un dominio D. Decimos que f tiene un máximo local o relativo en el punto c si existe un intervalo abierto $(c-r, c+r)$ centrado en c tal que:

$$f(x) \leq f(c)$$

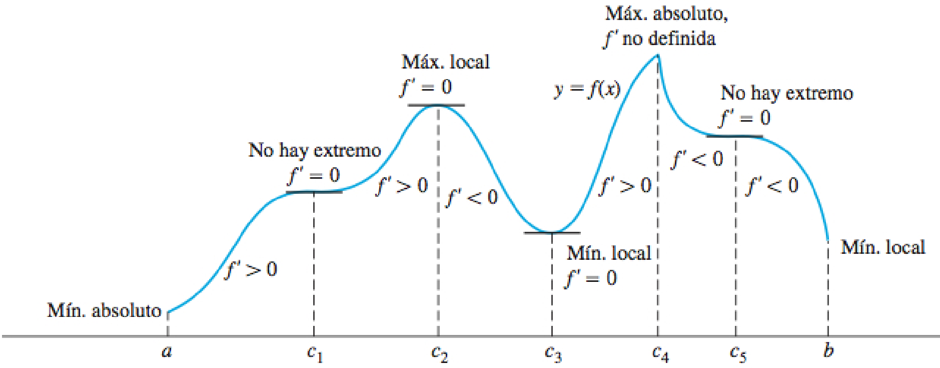
para todo x que pertenezca a D y a $(c-r, c+r)$. De forma similar, decimos que f tiene un mínimo local o relativo en el punto c si existe un intervalo abierto $(c-r, c+r)$ centrado en c tal que:

$$f(x) \geq f(c)$$

para todo x que pertenezca a D y a $(c-r, c+r)$.

¿Cómo determinar extremos relativos y/o absolutos en funciones continuas?

Observar el siguiente gráfico:



¿Cómo determinar extremos en funciones continuas?

Candidatos a ser puntos donde f tiene un extremo (relativo o absoluto):

- Puntos x donde $f'(x) = 0$.
- Puntos donde f' no existe.
- Puntos que no son interiores al dominio de f (generalmente, serán los extremos del dominio de f).

¿Cómo determinar extremos en funciones continuas?

Candidatos a ser puntos donde f tiene un extremo (relativo o absoluto):

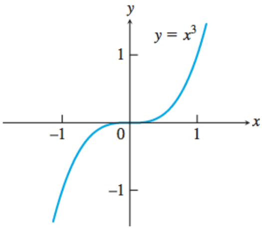
- Puntos x donde $f'(x) = 0$.
- Puntos donde f' no existe.
- Puntos que no son interiores al dominio de f (generalmente, serán los extremos del dominio de f).

Punto Crítico

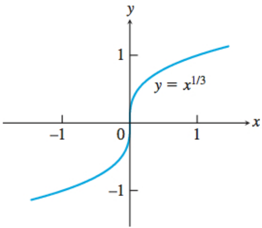
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Decimos que $c \in (a, b)$ es un punto crítico de f si $f'(c) = 0$ o si $f'(c)$ no existe.

Así, los candidatos en donde la función tiene extremos son los puntos críticos y los puntos que no son interiores al dominio.

No en todos los puntos críticos hay extremos



(a)



(b)

Primero nos ocuparemos de los extremos absolutos y luego estudiaremos cómo encontrar extremos locales.

¿Cómo determinar extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado?

Procedimiento para determinar extremos absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$

(1) Determine los puntos críticos de f en (a, b).

(2) Evalúe f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo a y b.

(3) El valor máximo de f en $[a, b]$ será el mayor de los valores obtenidos en (2), y el valor mínimo, el menor de los valores obtenidos en (2).

Ejemplo: determine los extremos absolutos de $f(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$ y de $g(x) = x^{2/3}$ en $[-2, 3]$.

Solución: consideremos la función $f(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$. Observar que f es continua en $[-2, 1]$ por ende f alcanza un máximo y un mínimo en el intervalo. Para localizar dónde alcanza f los extremos, aplicamos el procedimiento de la diapositiva anterior.

- Primero encontramos los puntos críticos de f en $(-2, 1)$. Observar que f es un polinomio por ende admite derivada en todo el intervalo $(-2, 1)$. Así los únicos puntos críticos son aquéllos donde $f'(t) = 0$. Entonces:

$$f'(t) = 8 - 4t^3 = 0 \quad \Rightarrow t = \sqrt[3]{2} \text{ (no pertenece a } [-2, 1]).$$

Solución: consideremos la función $f(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$. Observar que f es continua en $[-2, 1]$ por ende f alcanza un máximo y un mínimo en el intervalo. Para localizar dónde alcanza f los extremos, aplicamos el procedimiento de la diapositiva anterior.

- Primero encontramos los puntos críticos de f en $(-2, 1)$. Observar que f es un polinomio por ende admite derivada en todo el intervalo $(-2, 1)$. Así los únicos puntos críticos son aquéllos donde $f'(t) = 0$. Entonces:

$$f'(t) = 8 - 4t^3 = 0 \quad \Rightarrow t = \sqrt[3]{2} \text{ (no pertenece a } [-2, 1]).$$

- Evaluamos f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

$$f(-2) = -32$$

$$f(1) = 7$$

Solución: consideremos la función $f(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$. Observar que f es continua en $[-2, 1]$ por ende f alcanza un máximo y un mínimo en el intervalo. Para localizar dónde alcanza f los extremos, aplicamos el procedimiento de la diapositiva anterior.

- Primero encontramos los puntos críticos de f en $(-2, 1)$. Observar que f es un polinomio por ende admite derivada en todo el intervalo $(-2, 1)$. Así los únicos puntos críticos son aquéllos donde $f'(t) = 0$. Entonces:

$$f'(t) = 8 - 4t^3 = 0 \quad \Rightarrow t = \sqrt[3]{2} \text{ (no pertenece a } [-2,1]).$$

- Evaluamos f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

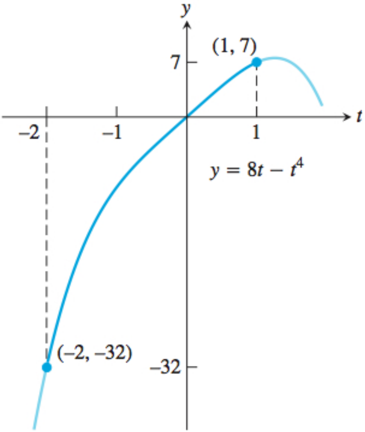
$$f(-2) = -32$$

$$f(1) = 7$$

- Así, f alcanza su máximo absoluto en $t = 1$ y el mínimo absoluto en $t = -2$.

¿Cómo determinar extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado?

Ejemplo



Solución: consideremos la función $g(x) = x^{2/3}$ en $[-2, 3]$. Observar que g es continua en $[-2, 3]$ por ende g alcanza un máximo y un mínimo en el intervalo. Para localizar dónde alcanza g los extremos, aplicamos el procedimiento de la diapositiva anterior.

- Primero encontramos los puntos críticos de g en $(-2, 3)$. Observar que $g'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ y g no es derivable en $x = 0$. También:

  $$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

  lo cual genera una contradicción. Luego, el único punto crítico de g es $x = 0$.

Solución: consideremos la función $g(x) = x^{2/3}$ en $[-2, 3]$. Observar que g es continua en $[-2, 3]$ por ende g alcanza un máximo y un mínimo en el intervalo. Para localizar dónde alcanza g los extremos, aplicamos el procedimiento de la diapositiva anterior.

- Primero encontramos los puntos críticos de g en $(-2, 3)$. Observar que $g'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ y g no es derivable en $x = 0$. También:

  $$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

  lo cual genera una contradicción. Luego, el único punto crítico de g es $x = 0$.
- Evaluamos g en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

  $$g(-2) = \sqrt[3]{4}$$
  $$g(3) = \sqrt[3]{9}$$
  $$g(0) = 0$$

Solución: consideremos la función $g(x) = x^{2/3}$ en $[-2, 3]$. Observar que g es continua en $[-2, 3]$ por ende g alcanza un máximo y un mínimo en el intervalo. Para localizar dónde alcanza g los extremos, aplicamos el procedimiento de la diapositiva anterior.

- Primero encontramos los puntos críticos de g en $(-2, 3)$. Observar que $g'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ y g no es derivable en $x = 0$. También:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

 lo cual genera una contradicción. Luego, el único punto crítico de g es $x = 0$.

- Evaluamos g en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

$$g(-2) = \sqrt[3]{4}$$

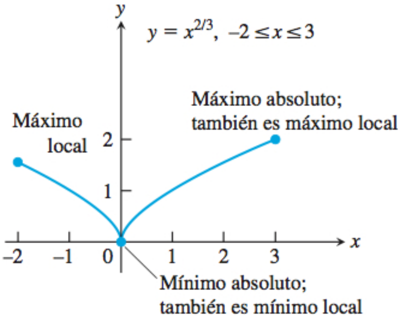
$$g(3) = \sqrt[3]{9}$$

$$g(0) = 0$$

- Así, g alcanza su máximo absoluto en $x = 3$ y el mínimo absoluto en $x = 0$.

¿Cómo determinar extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado?

Ejemplo



Extremos relativos o locales

Observar:

- Si f tiene un máximo absoluto en c, entonces tiene un máximo relativo en c. El recíproco no siempre es cierto (ilustrar con un ejemplo).
- Si f tiene un mínimo absoluto en c, entonces tiene un mínimo relativo en c. El recíproco no siempre es cierto (ilustrar con un ejemplo).

Teorema de Rolle

Observar que los puntos c tales que

$$f'(c) = 0$$

son muy importantes en Análisis, pues nos ayudan a determinar extremos de funciones (entre otras aplicaciones que veremos más adelante). El siguiente teorema da una condición suficiente para localizar tales puntos:

Teorema de Rolle

Observar que los puntos c tales que

$$f'(c) = 0$$

son muy importantes en Análisis, pues nos ayudan a determinar extremos de funciones (entre otras aplicaciones que veremos más adelante). El siguiente teorema da una condición suficiente para localizar tales puntos:

Teorema de Rolle

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Supongamos que:

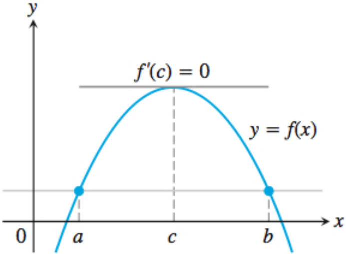
$$f(a) = f(b).$$

Entonces existe c en (a, b) tal que:

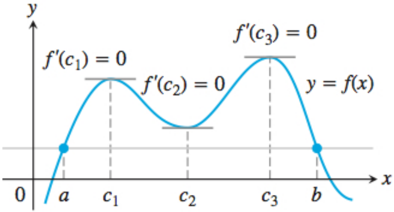
$$f'(c) = 0.$$

Sin demostración.

Teorema de Rolle: interpretación geométrica

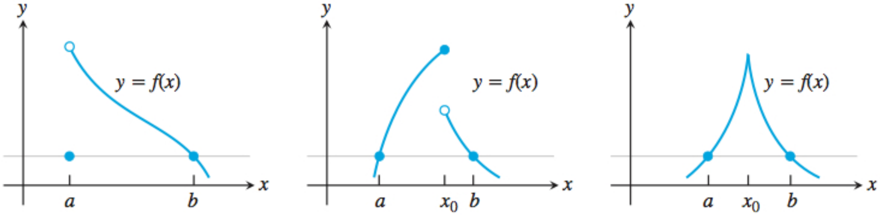


(a)



(b)

Las hipótesis en el Teorema de Rolle son esenciales:



(a) Discontinuidad en un extremo del intervalo $[a, b]$

(b) Discontinuidad en un punto interior de $[a, b]$

(c) Continua en $[a, b]$, pero no diferenciable en un punto

Observar que en los gráficos (a), (b) y (c) no existe ningún punto en el intervalo (a, b) donde la derivada de la función se anule.

Teorema del Valor Medio: una generalización del Teorema de Rolle

Teorema del Valor Medio

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces, existe c en (a, b) tal que:

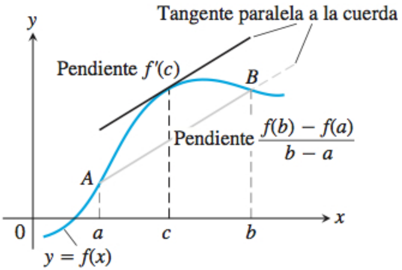
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

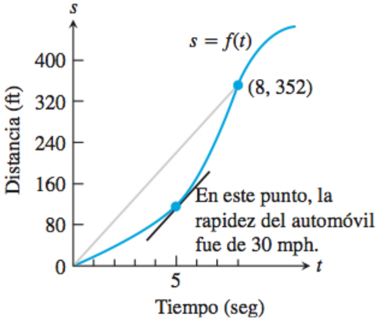
Teorema del Valor Medio: una generalización del Teorema de Rolle

Teorema del Valor Medio

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces, existe c en (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$





Así, el Teorema del Valor Medio dice que, bajo hipótesis adecuadas, la tasa de cambio promedio de una función en un intervalo es igual a la tasa de cambio instantánea de la función en algún punto interior del intervalo

Demostración del Teorema del Valor Medio: trazamos una recta que pase por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$. Utilizando la ecuación punto pendiente, resulta que la ecuación de dicha recta es

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Demostración del teorema del Valor Medio

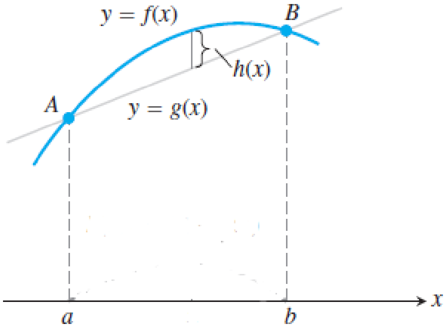
Demostración del Teorema del Valor Medio: trazamos una recta que pase por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$. Utilizando la ecuación punto pendiente, resulta que la ecuación de dicha recta es

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Construimos una nueva función h definida como la diferencia entre las funciones f y g para cada x en $[a, b]$, así

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad (1) \end{aligned}$$

Las funciones f, g y h se muestran en el siguiente gráfico.



Ahora, veamos que la función h satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a, b]$.

Demostración del teorema del Valor Medio

- Por hipótesis la función f es continua en $[a, b]$ y la función g es continua en $[a, b]$ por ser una función polinómica. Luego, por la *propiedad de la resta de funciones continuas*, h resulta continua en $[a, b]$.

Demostración del teorema del Valor Medio

- Por hipótesis la función f es continua en $[a, b]$ y la función g es continua en $[a, b]$ por ser una función polinómica. Luego, por la *propiedad de la resta de funciones continuas*, h resulta continua en $[a, b]$.
- Por hipótesis la función f es derivable en (a, b) y la función g es derivable en (a, b) por ser una función polinómica. Luego, por la *regla de la derivada de la diferencia*, h resulta derivable en (a, b).

Demostración del teorema del Valor Medio

- Por hipótesis la función f es continua en $[a, b]$ y la función g es continua en $[a, b]$ por ser una función polinómica. Luego, por la *propiedad de la resta de funciones continuas*, h resulta continua en $[a, b]$.
- Por hipótesis la función f es derivable en (a, b) y la función g es derivable en (a, b) por ser una función polinómica. Luego, por la *regla de la derivada de la diferencia*, h resulta derivable en (a, b).
- Como en a y en b las funciones f y g coinciden, se tiene

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - g(a) = 0 \\ h(b) &= f(b) - g(b) = 0 \end{aligned}$$

  Luego, $h(a) = h(b) = 0$.

Por lo tanto, la función h cumple las hipótesis del teorema de Rolle, entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$h'(c) = 0 \tag{2}$$

Demostración del teorema del Valor Medio

Derivemos, ahora, en ambos lados la ecuación (1) con respecto a x

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Luego, evaluando en $x = c$ resulta

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3}$$

Utilizando (2) y (3) se obtiene

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Reordenando, obtenemos

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Que es lo que queríamos probar.

Consecuencias del Teorema del Valor Medio

Teorema

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que:

$$f'(x) = 0$$

para todo x en (a, b). Entonces f es una función constante en $[a, b]$.

No demostrar.

Teorema

Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) tales que:

$$f'(x) = g'(x)$$

para toda x de (a, b), entonces existe una constante C tal que:

$$f(x) = g(x) + C \qquad \text{para toda } x \in [a, b].$$

Demostración: sea $h(x) = f(x) - g(x)$. Entonces h es continua en el intervalo $[a, b]$ (pues es una diferencia de funciones continuas) y h es derivable en (a, b) (ya que es una diferencia de funciones derivables).

Además, como por hipótesis $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, se obtiene:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para todo $x \in (a, b)$. Por la primera consecuencia del teorema del valor medio, se tiene que h es una función constante en $[a, b]$. Por lo tanto, existe una constante C tal que:

$$h(x) = C$$

para todo $x \in [a, b]$. Recordando que $h(x) = f(x) - g(x)$, se llega a :

$$f(x) = g(x) + C$$

para toda x en $[a, b]$.